(1a) $y'' - 6y' + 10y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$

$D = 36 - 4 \cdot 10 = -4$

$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$

F.S. tvoří: $e^{3x}\cos x$, $e^{3x}\sin x$

$y = c_1 e^{3x}\cos x + c_2 e^{3x}\sin x \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(1b) $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda = 2 \vee \lambda = 1$

FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM TVOŘÍ: e^{2x}, e^{x}

homogenní řešení: $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2) $y_p = Ax + B$

$y_p' = A$

$y_p'' = 0$

dosazením do rovnice

$y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$

$0 - 3A + 2(Ax + B) = 2x + 1$

$-3A + 2Ax + 2B = 2x + 1$

I. $2Ax = 2x \Rightarrow A = 1$

II. $-3A + 2B = 1 \Rightarrow B = 2$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + x + 2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

(2.)

$$y'' - 10y' + 25y = e^{5x} \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

1) $y'' - 10y' + 25y = 0$

$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$

$(\lambda - 5)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 5 \Rightarrow$ FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM TVOŘÍ: e^{5x}, xe^{5x}

2) $y_p = A \cdot e^{5x} \cdot x^2$

$y_p' = 5Ae^{5x} \cdot x^2 + Ae^{5x} \cdot 2x = Ae^{5x}(5x^2 + 2x)$

$y_p'' = 5Ae^{5x}(5x^2 + 2x) + Ae^{5x}(10x + 2)$

$= Ae^{5x} \cdot (25x^2 + 20x + 2)$

Dosazením do rovnice:

$Ae^{5x}(25x^2 + 20x + 2) - 10Ae^{5x}(5x^2 + 2x) + 25Ae^{5x}x^2 = e^{5x} \quad | : e^{5x}$

$25Ax^2 + 20Ax + 2A - 50Ax^2 - 20Ax + 25Ax^2 = 1$

$2A = 1$

$A = \frac{1}{2}$

Obecné řešení: $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x} + \frac{1}{2}x^2 e^{5x}$

$y(0) = 1$: $y(0) = c_1 + 0c_2 + 0 = 1 \rightarrow c_1 = 1$

$y' = 5e^{5x} + c_2 e^{5x} + c_2 x \cdot 5e^{5x} + xe^{5x} + \frac{5}{2}x^2 e^{5x}$

$y'(0) = 1$: $y'(0) = 5 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -4$

řešení: $y = e^{5x} - 4xe^{5x} + \frac{1}{2}x^2 e^{5x} \quad | \quad x \in \mathbb{R}$

(3) $y' = x - y$

přesné řešení: $y' + y = x \quad | \cdot e^{P(x)}$

$P(x) = \int 1\,dx = x$

$y' \cdot e^x + y \cdot e^x = x e^x$

$(y e^x)' = x e^x$

$y e^x = \int x e^x\,dx$

PER-PARTES: $\left|\begin{matrix} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{matrix}\right|$

$\int x e^x = x e^x - e^x$

$y e^x = x e^x - e^x + c \quad | : e^x$

$y = x - 1 + c \cdot e^{-x}$

$y(0) = 1 : 1 = 0 - 1 + c \cdot e^0$

$\Rightarrow c = 2$

$y\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{4}{10} - 1 + 2 \cdot e^{-\frac{4}{10}} \doteq 0{,}74$

přibližné řešení - Eulerova metoda, krok $h = 0{,}2$

i	0	1	2
x_i	0	0,2	0,4
y_i	1	0,8	0,68

$y_1 = 1 + 0{,}2 \cdot (0 - 1)$

$y_1 = 0{,}8$

$y_2 = 0{,}8 + 0{,}2(0{,}2 - 0{,}8)$

$y_2 = 0{,}68$

rozdíl: $0{,}74 - 0{,}68 \doteq 0{,}06$