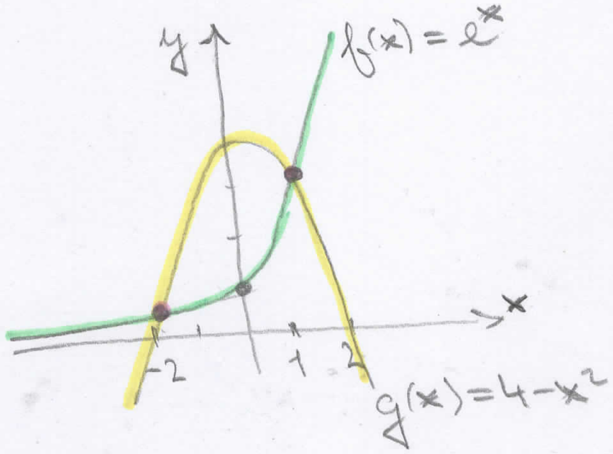
1. $\underbrace{e^x + x^2 - 4}_{=: F(x)} = 0$

$$e^x = 4 - x^2$$

$$f(x) = g(x)$$



a) 2 řešení - $x_1 \in (-2,-1)$

$x_2 \in (1,2)$

$x_2 > x_1$

neboť $F \in C(-2,-1)$

$$\left.\begin{aligned} F(-2) &= e^{-2} + 4 - 4 > 0 \\ F(-1) &= e^{-1} + 1 - 4 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists x_1 \in (-2,-1) : F(x_1) = 0$$

$$F(1) = e^1 + 1^2 - 4 \doteq 3{,}7 - 4 < 0$$

$$F(2) = e^2 + 4 - 4 > 0 \quad \Rightarrow \exists x_2 \in (1,2) : F(x_2) = 0$$

b)

Předpoklady Newtonovy metody:

- F je spojitá funkce na $\langle 1,2 \rangle$
- $F(1) \cdot F(2) < 0$
- $F'(x) = e^x + 2x > 0 \quad \forall x \in \langle 1,2 \rangle$
- $F''(x) = e^x + 2 > \quad \forall x \in \langle 1,2 \rangle$

c) $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Zvolme např. $x_0 = \frac{3}{2}$

1. iterace: $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{F(\frac{3}{2})}{F'(\frac{3}{2})} = \frac{3}{2} - \frac{e^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{4} - 4}{e^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot \frac{3}{2}} \doteq \underline{\underline{1{,}1348}}$$

2. $S(a) = a^2$

1) $\Delta S(2;0{,}03) = S(2+0{,}03) - S(2) = (2+0{,}03)^2 - 2^2$
$= \underline{0{,}1209\ m^2}$

Diference funkce S v bodě 2 s krokem 0,03

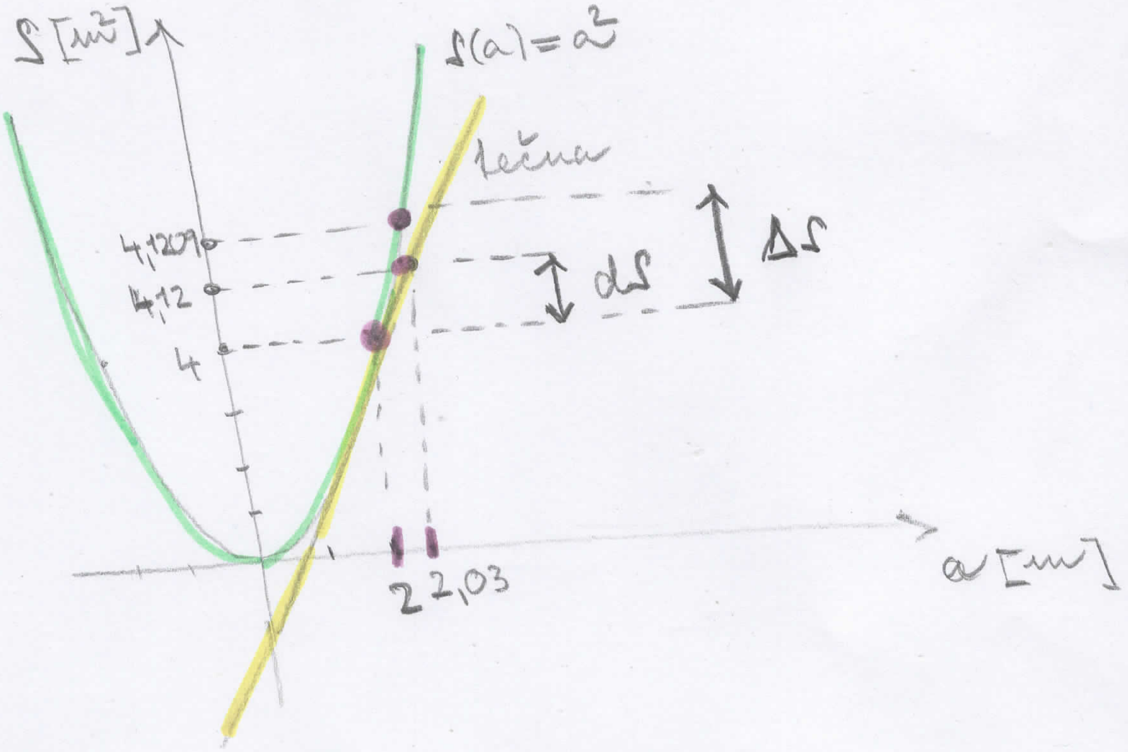
2) $dS = S'(2) \cdot dx = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}03 = \underline{0{,}12\ m^2}$

$S'(a) = 2a$

Diferenciál funkce S v bodě 2 s přírůstkem $dx = 0{,}03$

Chyba, které se dopustíme, když nahradíme diferenci diferenciálem je $|0{,}1209 - 0{,}12| = 0{,}0009\ m^2$

3)



3. Taylorův polynom 3. stupně funkce f v bodě a

je: $T^3_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2$
$+ \frac{f'''(a)}{3!}\cdot(x-a)^3$

$f(x) = \sin x, \; a = 0$

$f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x) = \cos x \,\big|_{x=0} = 1$

$f''(x) = -\sin x \,\big|_{x=0} = 0$

$f'''(x) = -\cos x \,\big|_{x=0} = -1$

$T^3_{\sin x,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ ... Taylorův polynom 3. stupně funkce $\sin x$ v 0

$T^3_{\sin x,0}(0{,}3) = 0{,}3 - \frac{(0{,}3)^3}{3!} = 0{,}3 - \frac{0{,}027}{6} \doteq \underline{0{,}2955}$

užitím kalkulačky: $\sin(0{,}3) = 0{,}29552$

tj. chyba, které se dopustíme je řádu 10^{-5},

$\left| T^3_{\sin x,0}(0{,}3) - \sin(0{,}3) \right| \doteq 0{,}00002$