Domácí úkol z Matematiky B na 11. týden

1. Mějme vektorové pole $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x+2z}{y^2}, \frac{2}{y}\right)$.

   (a) Ověřte, že funkce $U(x,y,z) = \frac{x+2z}{y}$ je potenciálem vektorového pole $\vec{F}$ v oblasti $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ y > 0\}$.

   (b) Vypočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, kde křivka $\mathcal{K}$ je závit šroubovice dána parametrickými rovnicemi $x = \cos t,\ y = 2t,\ z = \sin t,\ t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi \rangle$, a je orientovaná souhlasně s parametrizací.

2. Vypočtěte
$$\int\limits_{\mathcal{K}} (x+1)\,\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}y\,,$$
kde křivka $\mathcal{K}$ je oblouk hyperboly $(x-3)^2 - 5y^2 = 4$ s počátečním bodem $(1,0)$ a koncovým bodem $(0,1)$.

3. Ověřte, že diferenciální forma
$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{y}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\operatorname{arccotg} x - \frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y$$
je totálním diferenciálem nějaké funkce $U(x,y)$ na co možná největší oblasti G, že bod $(1,-1)$ patří do G. Určete tuto oblast a funkci $U(x,y)$ tak, aby platilo $U(1,-1) = \frac{\pi}{2}$.