Náhodná veličina a její charakteristiky

Představte si, že provádíte náhodný pokus, jehož výsledek jste schopni ohodnotit nějakým číslem. Před provedením pokusu jeho výsledek a tedy ani sledovanou hodnotu neznáte. Proto je proměnná, která připisuje výsledku náhodnému pokusu vámi sledovanou hodnotu, označována jako náhodná veličina. Náhodnou veličinu značíme velkým písmenem, např. X. Množinu možných hodnot náhodné veličiny nazýváme obor hodnot náhodné veličiny X a značíme jej $\mathcal{X}$. Poté, co je pokus proveden, je naměřená hodnota náhodné veličiny značena malým písmenem, např. $x = 21\text{mm}$.

Náhodnou veličiny může být například

- podíl vadných výrobků mezi tisíci
- počet chybně přenesených bitů
- proud v elektrickém obvodu
- doba do dopadu projektilu
- počet škrábnutí na desce
- objem plynu, který unikne při plnění plynové bomby
- průměr vysoustružené součástky

Uveďmě nyní matematicky trochu přesnější popis náhodné veličiny. Pro plně korektní definici náhodné veličiny by bylo třeba znát pojmy z teorie míry. Z důvodu přístupnosti látky studentům budou pojmy a vlastnosti v tomto textu zavedeny ve stejné podstatě nicméně s mírnými odchylkami od přesných matematických formulací.

1. Pojem **Náhodnou veličinou** (vzhledem k jevovému poli $\mathcal{A}$) rozumíme zobrazení $X : \Omega \to (-\infty, \infty)$, pro které je množina $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ jevem v $\mathcal{A}$ pro každé $x \in (-\infty, \infty)$. **Obor hodnot** náhodné veličiny X značíme $\mathcal{X}$. Realizaci náhodné veličiny, tj. $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, značíme x.

2. Poznámka V textu budeme užívat zkrácení zápisu

$$\begin{aligned} \{X < x\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \\ \{X = x\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

a podobně.

3. Pojem Reálnou funkci

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x)$$

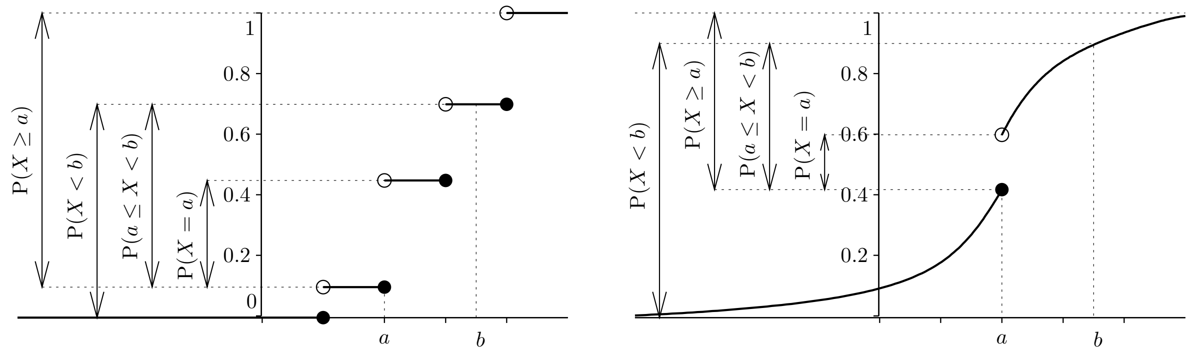
definovanou na $(-\infty, \infty)$ nazýváme **distribuční funkce** náhodné veličiny X.

4. Vlastnosti Distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X má následující vlastnosti.

1. $F(x)$ je neklesající.
2. $F(x)$ je zleva spojitá.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.
4. $0 \le F(x) \le 1$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.
5. $F(x)$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.
6. $\mathrm{P}(a \le X < b) = F(b) - F(a)$ pro všechna $a < b,\ a, b \in (-\infty, \infty)$.
7. $\mathrm{P}(a \le X) = 1 - F(a)$ pro všechna $a \in (-\infty, \infty)$.
8. $\mathrm{P}(X \le a) = \lim\limits_{x \to a^+} F(x)$ pro všechna $a \in (-\infty, \infty)$.
9. $\mathrm{P}(X = a) = \lim\limits_{x \to a^+} F(x) - F(x)$ pro všechna $a \in (-\infty, \infty)$.

5. Poznámka Každá funkce splňující vlastnosti 1., 2., 3. z odstavce 4 je distribuční funkcí vhodné náhodné veličiny.

6. Příklad Na obrázku 1 jsou uvedeny příklady distribučních funkcí a je znázorněno stanovování některých pravděpodobností.



Obrázek 1: Ukázky distribučních funkcí

Diskrétní náhodná veličina

7. Pojem Řekneme, že náhodná veličina X je **diskrétní**, resp. má **diskrétní rozdělení pravděpodobnosti** je-li její obor hodnot nejvýše spočetná množina $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, tj. nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot $x_1, x_2, \ldots$, tak, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(X = x_i) = 1.$$

Příkladem diskrétní náhodné veličiny je

- počet studentů, kteří přišli na přednášku ze statistiky
- počet bodů získaných na testu
- počet vadných výrobků mezi tisíci
- počet chybně přenesených bitů
- počet škrábnutí na desce

8. Pojem **Pravděpodobnostní funkce** diskrétní náhodné veličiny X je funkce $p : (-\infty, \infty) \to \langle 0, 1 \rangle$ daná předpisem

$$p(x) = \mathrm{P}(X = x).$$

9. Vlastnosti Pravděpodobnostní funkce $p(x)$ náhodné veličiny X s oborem hodnot $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ má následující vlastnosti.

1. $p(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.
2. $\sum\limits_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$.
3. $p(x) \leq 1$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.
4. $p(x) = \lim\limits_{t \to x^+} F(t) - F(x)$.
5. $F(x) = \sum\limits_{t<x} p(t)$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.
6. $\mathrm{P}(x \in M) = \sum\limits_{x \in M} p(x)$ pro libovolnou množinu reálných čísel M.

10. Poznámka V předchozím tvrzení jsou užita zkrácení zápisu v následujícím smyslu

$$\begin{aligned} \sum_{t<x} p(t) &= \sum_{x \in M_1} p(t), \quad \text{kde } M_1 = \mathcal{X} \cap (-\infty, x) \\ \sum_{x \in M} p(x) &= \sum_{x \in M_2} p(t), \quad \text{kde } M_2 = \mathcal{X} \cap M. \end{aligned}$$

11. Poznámka Každá funkce splňující vlastnosti 1., 2. z odstavce 9 je pravděpodobnostní funkcí vhodné diskrétní náhodné veličiny.

12. Příklad Při výrobě polovodičů jsou testovány dvě desky z mnoha. U každé desky je možný výsledek testu *funkční (f)*, *nefunkční (n)*. Předpokládejme, že pravděpodobnost, že vrstva projde testem s výsledkem *funkční* je 0.8 a kvality vrstev jsou nezávislé. Náhodná veličina X udává počet funkčních testovaných vrstev. Její pravděpodobnostní funkci vypočteme následovně

$$p(x) = \begin{cases} \mathrm{P}(X=0) = 0.2^2 = 0.04 & \text{pro } x = 0 \\ \mathrm{P}(X=1) = 0.2 \cdot 0.8 + 0.8 \cdot 0.2 = 0.32 & \text{pro } x = 1 \\ \mathrm{P}(X=2) = 0.8^2 = 0.64 & \text{pro } x = 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Výsledek můžeme zapsat do pravděpodobnostní tabulky (Tabulka 1) a znázornit graficky (Obrázek 2).

x	0	1	2
$p(x)$	0.04	0.32	0.64

Tabulka 1: Pravděpodobnostní tabulka náhodné veličiny X z příkladu 12

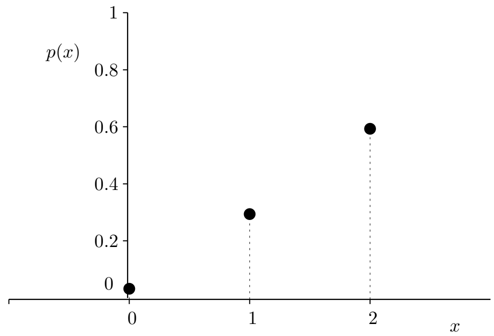
Z pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X odvodíme její distribuční funkci ve tvaru

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \mathrm{P}(X=0) = 0.04 & \text{pro } 0 < x \leq 1 \\ \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) = 0.04 + 0.32 = 0.36 & \text{pro } 1 < x \leq 2 \\ \mathrm{P}(X=1) + \mathrm{P}(X=1) + \mathrm{P}(X=2) = 0.04 + 0.32 + 0.64 = 1 & \text{pro } 2 < x \end{cases}$$

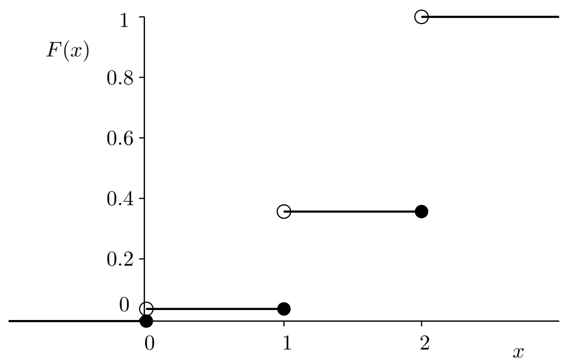
Graf distribuční funkce $F(x)$v Obrázku 3 má schodovitý tvar. Schodovitý tvar mají distribuční funkce všech diskrétních náhodných veličin.

Pravděpodobnost, že alespoň jedna polovodičová deska projde testem s výsledkem *funkční* lze spočítat jak z pravděpodobnostní funkce

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = \mathrm{P}((X=1) \vee (X=2)) = \mathrm{P}(X=1) + \mathrm{P}(X=2) = p(1) + p(2) = 0.32 + 0.64 = 0.96,$$



Obrázek 2: Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X z příkladu 12



Obrázek 3: Distribuční funkce náhodné veličiny z příkladu 12

tak z distribuční funkce

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X < 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.04 = 0.96.$$

Spojitá náhodná veličina

13. Pojem Řekneme, že náhodná veličina X je **spojitá**, resp. má **spojité rozdělení pravděpodobnosti**, je-li její distribuční funkce $F(x)$ spojitá.

Spojitou náhodnou veličiny může být například

- doba čekání na oběd v menze
- hodnota včerejších deštových srážek
- proud v elektrickém obvodu
- doba do dopadu projektilu
- objem plynu, který unikne při plnění plynové bomby
- průměr vysoustružené součástky

14. Pojem **Hustota** spojité náhodné veličiny X je nezáporná funkce $f : (-\infty, \infty) \to \langle 0, \infty)$ taková, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

15. Vlastnosti Hustota $f(x)$ náhodné veličiny X má následující vlastnosti.

1. $f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$.
3. $f(x) = F'(x)$.
4. $\mathrm{P}(x \in M) = \int\limits_{x \in M} f(x)$ pro libovolnou množinu reálných čísel M.
5. $\mathrm{P}(x = c) = 0$ pro každé $c \in (-\infty, \infty)$.

16. Příklad Správce počítačové sítě zjišťuje zatížení systému pomocí příkazu, který dává dobu mezi zadáním příkazu a přihlášením nového uživatele do systému. Náhodná veličina X udává délku takového časového intervalu v hodinách. Za určitých předpokladů je hustota náhodné veličiny X tvaru

$$f(x) = \begin{cases} 15\mathrm{e}^{-15x} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

jejíž graf je uveden v obrázku 4 (a).

Distribuční funkci náhodné veličiny X vypočteme z hustoty následovně

$$F(x) \quad = \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 15\mathrm{e}^{-15t}\mathrm{d}t = \frac{15}{-15}[\mathrm{e}^{-15t}]_0^x = -[\mathrm{e}^{-15x} - 1] = 1 - \mathrm{e}^{-15x} & \text{pro } x > 0, \\ \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1}$$

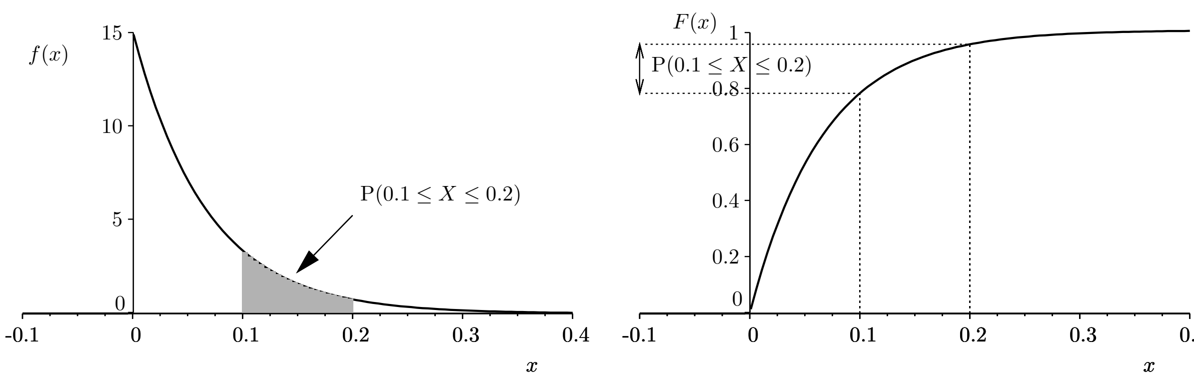
Pravděpodobnost, že se nový uživatel přihlásí do systému mezi 6-tou a 12-tou minutou, tj. od 0.1 hod do 0.2 hod, lze vypočíst jak z hustoty náhodné veličiny X

$$\mathrm{P}(0.1 \leq X \leq 0.2) = \int_{0.1}^{0.2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0.1}^{0.2} 15\mathrm{e}^{-15t}\mathrm{d}t = -[\mathrm{e}^{-15t}]_{0.1}^{0.2} = \mathrm{e}^{-15\cdot 0.1} - \mathrm{e}^{-15\cdot 0.2} = 0.1733$$

tak z její distribuční funkce

$$\mathrm{P}(0.1 \leq X \leq 0.2) = F(0.2) - F(0.1) = (1 - \mathrm{e}^{-15\,0.2}) - (1 - \mathrm{e}^{-15\,0.1}) = \mathrm{e}^{-15\cdot 0.1} - \mathrm{e}^{-15\cdot 0.2} = 0.1733$$

Oba způsoby výpočtu jsou graficky znázorněny na obrázku 4.



(a) Hustota náhodné veličiny X

(b) Distribuční funkce náhodné veličiny X

Obrázek 4: Výpočet pravděpodobnosti $\mathrm{P}(0.1 \leq X \leq 0.2)$ pomocí hustoty a distribuční funkce náhodné veličiny X z příkladu 16

Číselné charakteristiky náhodných veličin

17. Pojem **Střední hodnotou** náhodné veličiny X rozumíme reálné číslo

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \sum\limits_{x\in\mathcal{X}} xp(x) & \text{je-li X diskrétní,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x) & \text{je-li X spojitá} \end{cases}$$

pokud příslušná řada, resp. integrál, absolutně konverguje.

18. Vlastnosti Pro střední hodnoty náhodných veličin $X, X_1, \ldots, X_n$ platí

1. $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\mathrm{E}(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i)$.
3. $\mathrm{E}(\Pi_{i=1}^{n} X_i) = \Pi_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i)$, jsou-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé (viz. kapitola Náhodný vektor).

19. Poznámka Střední hodnota je jednou z charakteristik polohy rozdělení náhodné veličiny. Dalšími takovými charakteristikami jsou

- medián $x_{0.5}$ – reálné číslo takové, že $F(x_{0.5}) \leq 0.5$ a $\lim_{x\to x_{0.5}^+} F(x) \geq 0.5$.
- modus $\hat{x}$ – reálné číslo takové, že maximalizuje (případně je suprémem) pravděpodobnostní funkce $p(x)$, resp. hustotu $f(x)$, náhodné veličiny X.

20. Pojem **Rozptylem** náhodné veličiny X rozumíme reálné číslo

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}([X - \mathrm{E}X]^2).$$

Z rozptylu stanovujeme **směrodatnou odchylku** náhodné veličiny X jako reálné číslo

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{D}(X)}.$$

21. Vlastnosti Pro rozptyly náhodných veličin $X, X_1, \ldots, X_n$ platí

1. $\mathrm{D}(X) \geq 0$.
2. $\mathrm{D}(a) = 0$ pro všechna $a \in \mathbb{R}$.
3. $\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$.
4. $\mathrm{D}(aX + b) = a^2\mathrm{D}(X)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.
5. $\mathrm{D}(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{D}(X_i)$, jsou-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé (viz. kapitola Náhodný vektor)

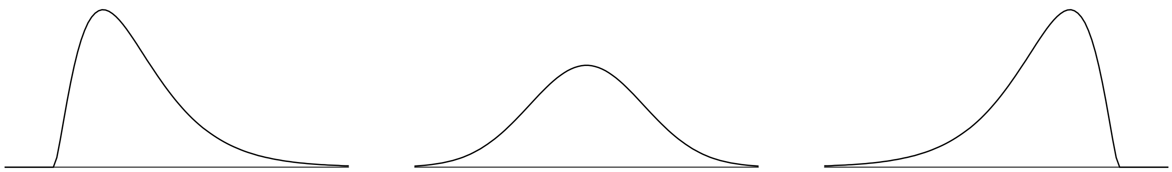
Vlastnosti směrodatné odchylky lze přímo odvodit z vlastností rozptylu.

22. Pojem **Šikmostí** náhodné veličiny X s nenulovým rozptylem rozumíme reálné číslo

$$\mathrm{A}_3(X) = \frac{\mathrm{E}\left([X - \mathrm{E}(X)]^3\right)}{[\sigma(X)]^3}.$$

23. Vlastnosti Pro šikmost náhodné veličiny X platí

1. $\mathrm{A}_3(X) = 0$, je-li rozdělení náhodné veličiny X symetrické, viz. obr. 5 (b).
2. $\mathrm{A}_3(X) < 0$, je-li rozdělení náhodné veličiny X doprava zešikmené, viz. obr. 5 (c).
3. $\mathrm{A}_3(X) > 0$, je-li rozdělení náhodné veličiny X doleva zešikmené, viz. obr. 5 (a).
4. $\mathrm{A}_3(aX + b) = \mathrm{A}_3(X)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.



(a) Hustota při $\mathrm{A}_3(X) > 0$ (b) Hustota při $\mathrm{A}_3(X) = 0$ (c) Hustota při $\mathrm{A}_3(X) < 0$

Obrázek 5: Ukázka tvaru hustot příslušných náhodným veličinám s různými šikmostmi

24. Pojem **Špičatostí** náhodné veličiny X s nenulovým rozptylem rozumíme reálné číslo

$$\mathrm{A}_4(X) = \frac{\mathrm{E}([X - \mathrm{E}(X)]^4)}{[\sigma(X)]^4} - 3.$$

25. Vlastnosti Pro špičatost náhodné veličiny X platí

1. Špičatost náhodné veličiny s normálním rozdělením je $\mathrm{A}_4(X) = 0$.
2. $\mathrm{A}_4(aX + b) = \mathrm{A}_4(X)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

26. Pojem **100p% kvantil** náhodné veličiny X je pro $p \in (0, 1)$ reálné číslo

$$x_p = \inf\{x : F(x) \geq p\}$$

Některé kvantily mají vlastní názvy, např. $x_{0.25}$ je označován jako **dolní kvartil**, $x_{0.75}$ jako **horní kvartil** a $x_{0.5}$ jako **medián**.

27. Příklad Uvažujme náhodnou veličinu X z příkladu 12 s pravděpodobnostní tabulkou v Tabulce 1. Její střední hodnotu vypočteme jako

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot 0.04 + 1 \cdot 0.32 + 2 \cdot 0.64 = 1.6$$

Pro výpočet rozptylu $\mathrm{D}(X)$ využijeme vlastnosti 3. Bude tedy třeba nejdříve vyčíslit

$$\mathrm{E}(X^2) = 0^2 \cdot 0.04 + 1^2 \cdot 0.32 + 2^2 \cdot 0.64 = 2.88,$$

odkud dostáváme

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 2.88 - 1.6^2 = 0.32.$$

Směrodatná odchylka je odmocninou z rozptylu

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{D}(X)} \doteq 0.5656.$$

Z pravdivostní tabulky v Tabulce 1 je též možné určit hodnotu modusu $\hat{x} = \operatorname{argmax}(p(x)) = 2$. Horní, dolní kvartil a medián stanovujeme z distribuční funkce odvozené v příkladu 12

$$\begin{aligned} x_{0.75} &= \inf\{x : F(x) \geq 0.75\} = \inf\{x : x \in (2, \infty)\} = 2 \\ x_{0.25} &= \inf\{x : F(x) \geq 0.25\} = \inf\{x : x \in (1, \infty)\} = 1 \\ x_{0.5} &= \inf\{x : F(x) \geq 0.5\} = \inf\{x : x \in (2, \infty)\} = 2. \end{aligned}$$

Pro výpočet šikmosti je třeba nejdříve vyčíslit

$$\mathrm{E}\left([X - \mathrm{E}(X)]^3\right) = (0 - 1.6)^3 \cdot 0.04 + (1 - 1.6)^3 \cdot 0.32 + (2 - 1.6)^3 \cdot 0.64 = -0.192,$$

odkud

$$\mathrm{A}_3 = \frac{\mathrm{E}\left([X - \mathrm{E}(X)]^3\right)}{[\sigma(X)]^3} = \frac{-0.192}{0.32^{3/2}} \doteq -1.0606.$$

Podobně pro špičatost je třeba vypočíst

$$\mathrm{E}\left([X - \mathrm{E}(X)]^4\right) = (0 - 1.6)^4 \cdot 0.04 + (1 - 1.6)^4 \cdot 0.32 + (2 - 1.6)^4 \cdot 0.64 = 0.32,$$

z čehož

$$\mathrm{A}_4 = \frac{\mathrm{E}\left([X - \mathrm{E}(X)]^4\right)}{[\sigma(X)]^4} = \frac{0.32}{0.32^2} \doteq 3.125.$$

28. Příklad Vypočtěme číselné charakteristiky náhodné veličiny doby od zadání příkazu do přihlášení nového uživatele z příkladu 16. Pro výpočet střední hodnoty užijeme metodu integrace per partes

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{0} x\, 0\, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} 15x\mathrm{e}^{-15x} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = 15\mathrm{e}^{-15x} & v = -\mathrm{e}^{-15x} \end{array} \right| = \\ &= [-x\mathrm{e}^{-15x}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-15x} \mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^{-15x}]_0^\infty - \frac{1}{15}[\mathrm{e}^{-15x}]_0^\infty = \\ &= -[\lim_{x\to\infty} x\mathrm{e}^{-15x} - 0] - \frac{1}{15}[0 - 1] = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Pro výpočet rozptylu pomocí vztahu 3 nejprve stanovíme $\mathrm{E}(X^2)$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{0} x^2\, 0 \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} 15x^2\mathrm{e}^{-15x} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = 15\mathrm{e}^{-15x} & v = -\mathrm{e}^{-15x} \end{array} \right| = \\ &= [-x^2\mathrm{e}^{-15x}]_0^\infty + \int_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-15x} \mathrm{d}x = [-x^2\mathrm{e}^{-15x}]_0^\infty + \frac{2}{15}\mathrm{E}(X) = \\ &= -[\lim_{x\to\infty} x^2\mathrm{e}^{-15x} - 0] + \frac{2}{15}\frac{1}{15} = \frac{2}{15^2}. \end{aligned}$$

Odtud

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{2}{15^2} - \frac{1}{15^2} = \frac{1}{15^2}.$$

Směrodatná odchylka je proto $\sigma(X) = \sqrt{1/15^2} = 1/15$. Z grafu hustoty 4(a) lze stanovit $\hat{x} = 0$. Pro stanovení horního, dolního kvartilu a mediánu odvodíme obecný tvar 100p% kvantilu náhodné veličiny X s využitím distribuční funkce (1) z příkladu 16

$$\begin{aligned} x_p &= \inf\left\{x : 1 - \mathrm{e}^{-15x} \geq p\right\} = \inf\left\{x : \mathrm{e}^{-15x} \leq 1 - p\right\} = \inf\left\{x : -15x \leq \ln(1-p)\right\} = \\ &= \inf\left\{x : x \geq -\frac{1}{15}\ln(1-p)\right\} = -\frac{1}{15}\ln(1-p). \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x_{0.25} &= -\frac{1}{15}\ln(0.75) \doteq 0.019, \\ x_{0.5} &= -\frac{1}{15}\ln(0.5) \doteq 0.046, \\ x_{0.75} &= -\frac{1}{15}\ln(0.25) \doteq 0.092. \end{aligned}$$

Zbývá stanovit šikmost a špičatost náhodné veličiny X při jejichž výpočtu využijeme

$$\mathrm{E}([X-\mathrm{E}(X)]^3) = \mathrm{E}(X^3) - 3\mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(X) + 2[\mathrm{E}(X)]^3\,, \tag{2}$$

$$\mathrm{E}([X-\mathrm{E}(X)]^4) = \mathrm{E}(X^4) - 4\mathrm{E}(X^3)\mathrm{E}(X) + 6\mathrm{E}(X^2)[\mathrm{E}(X)]^2 - 3[\mathrm{E}(X)]^4. \tag{3}$$

Integrační metodou per partes vypočteme $\mathrm{E}(X^3)$ a $\mathrm{E}(X^4)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^3) &= \int_{-\infty}^0 x^3 0\mathrm{d}x + \int_0^\infty 15x^3\mathrm{e}^{-15x}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x^3 & u' = 3x^2 \\ v' = 15\mathrm{e}^{-15x} & v = -\mathrm{e}^{-15x} \end{vmatrix} = \\
&= [-x^3\mathrm{e}^{-15x}]_0^\infty + \int_0^\infty 3x^2\mathrm{e}^{-15x}\mathrm{d}x = [-x^3\mathrm{e}^{-15x}]_0^\infty + \frac{3}{15}\mathrm{E}(X^2) = \\
&= -[\lim_{x\to\infty} x^3\mathrm{e}^{-15x} - 0] + \frac{3}{15}\frac{2}{15^2} = \frac{6}{15^3} \\
\mathrm{E}(X^4) &= \int_{-\infty}^0 x^4 0\mathrm{d}x + \int_0^\infty 15x^4\mathrm{e}^{-15x}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x^4 & u' = 4x^3 \\ v' = 15\mathrm{e}^{-15x} & v = -\mathrm{e}^{-15x} \end{vmatrix} = \\
&= [-x^4\mathrm{e}^{-15x}]_0^\infty + \int_0^\infty 4x^3\mathrm{e}^{-15x}\mathrm{d}x = [-x^4\mathrm{e}^{-15x}]_0^\infty + \frac{4}{15}\mathrm{E}(X^3) = \\
&= -[\lim_{x\to\infty} x^4\mathrm{e}^{-15x} - 0] + \frac{4}{15}\frac{6}{15^3} = \frac{24}{15^4}
\end{aligned}$$

z čehož dosazením do (2) a (3) dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}([X-\mathrm{E}(X)]^3) &= \frac{6}{15^3} - 3\frac{2}{15^2}\frac{1}{15} + 2\frac{1}{15^3} = \frac{2}{15^3}\,, \\
\mathrm{E}([X-\mathrm{E}(X)]^4) &= \frac{24}{15^4} - 4\frac{6}{15^3}\frac{1}{15} + 6\frac{2}{15^2}\left(\frac{1}{15}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{15}\right)^4 = \frac{9}{15^4}\,,
\end{aligned}$$

a poté

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_3 &= \frac{\mathrm{E}\left([X-\mathrm{E}(X)]^3\right)}{[\sigma(X)]^3} = \frac{2/15^3}{1/15^3} = 2\,, \\
\mathrm{A}_4 &= \frac{\mathrm{E}\left([X-\mathrm{E}(X)]^4\right)}{[\sigma(X)]^4} = \frac{9/15^4}{1/15^4} = 9\,.
\end{aligned}$$