Pravděpodobnost a její vlastnosti

Náhodné jevy

Náhodný jev je výsledek **pokusu** (tj. realizace určitého systému podmínek) a jeho charakteristickým rysem je, že může, ale nemusí nastat. Míru možnosti jeho nastoupení vyjadřuje v číselné formě jeho **pravděpodobnost**. U náhodných jevů požadujeme **hromadnost** a **stabilitu**, tj. dostatečnou opakovatelnost a neměnnost pokusu. Nezbytným předpokladem je také **rozpoznatelnost** náhodných jevů.

1. Pojmy

Elementárním náhodným jevem ω označíme jednotlivý výsledek pokusu.
Základní prostor Ω je množina všech možných výsledků pokusu ($\omega \in \Omega$).
Náhodným jevem A pak rozumíme libovolnou podmnožinu základního prostoru Ω, tedy $A \subseteq \Omega$.
Jistý jev je náhodný jev, který nastane při každém pokusu.
Nemožný jev je náhodný jev, který nenastane při žádném pokusu.

2. Vlastnosti

1. **Jistý jev** je ekvivalentní základnímu prostoru Ω.
2. **Nemožný jev** je ekvivalentní prázdné množině $\emptyset$.
3. Vztahy mezi náhodnými jevy vyjadřujeme pomocí množinových inkluzí:
   (a) $A \subseteq B$ znamená, že nastoupení náhodného jevu A má za následek nastoupení náhodného jevu B.
   (b) $A = B$ značí **rovnost** (ekvivalenci) náhodných jevů A a B.
4. Operace s náhodnými jevy vyjadřujeme pomocí množinových operací:
   (a) **Průnik** náhodných jevů $A \cap B$ nastane, jestliže nastanou oba náhodné jevy A a B. Analogicky definujeme náhodné jevy $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ a $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, které nastanou, jestliže nastanou všechny náhodné jevy A_i.
   (b) **Sjednocení** náhodných jevů $A \cup B$ nastane, jestliže nastane aspoň jeden z náhodných jevů A a B, tedy A nebo B. Analogicky definujeme náhodné jevy $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ a $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, které nastanou, jestliže nastane aspoň jeden náhodný jev A_i.
   (c) **Rozdíl** náhodných jevů $A - B$ nastane, jestliže nastane náhodný jev A a nenastane náhodný jev B.
   (d) **Opačný** náhodný jev k náhodnému jevu A je jev $\bar{A} = \Omega - A$, který nastane, jestliže nenastane náhodný jev A.
   (e) Náhodné jevy A a B jsou **disjunktní**, jestliže $A \cap B = \emptyset$. Náhodné jevy A_i, $i = 1, 2, \ldots$ jsou disjunktní, jestliže jsou disjunktní všechny dvojice náhodných jevů A_i, A_j pro $i \neq j$.
5. Vlastnosti operací s náhodnými jevy jsou totožné s vlastnostmi operací s množinami:
   (a) $A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A$
   (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$
   (c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
   (d) $A \cap A = A,\ A \cup A = A.$
   (e) $A \cap \emptyset = \emptyset,\ A \cup \emptyset = A.$
   (f) $A \cap \Omega = A,\ A \cup \Omega = \Omega.$
   (g) $\overline{(\bar{A})} = A.$

(h) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
(i) $A - B = A \cap \bar{B}$, $A - B \neq B - A$.

Nyní, kdy již máme nadefinovaný pojem náhodný jev, přistoupíme k určení „míry“ nastoupení náhodného jevu. Tuto „míru“ nastoupení budeme označovat pravděpodobností náhodného jevu. Pravděpodobnost náhodného jevu ale nelze definovat nad libovolnou množinou náhodných jevů. Pokud dokážeme určit pravděpodobnost náhodného jevu A, tak dokážeme určit i pravděpodobnost opačného jevu $\bar{A} = \Omega - A$. Tedy do množiny náhodných jevů musí spolu s náhodným jevem A patřit i opačný jev. Podobný požadavek máme pro sjednocení a průnik náhodných jevů. Strukturu, která splňuje tyto požadavky, nazýváme jevovým polem.

3. Pojmy **Jevové pole Σ** na Ω je množina náhodných jevů (systém podmnožin základního prostoru Ω) s vlastnostmi:

1. Pro každý náhodný jev $A \in \Sigma$ je $\bar{A} \in \Sigma$.
2. Pro každou posloupnost náhodných jevů $A_i \in \Sigma$, $i = 1, 2, \dots$ je $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

4. Vlastnosti

1. $\emptyset \in \Sigma$, $\Omega \in \Sigma$;
2. $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A - B \in \Sigma$;
3. $A_i \in \Sigma, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \Sigma$;
4. $A_i \in \Sigma, i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

5. Příklad Náhodný pokus spočívá v jednom hodu šestistěnnou hrací kostkou se stěnami očíslovanými od 1 do 6. Náhodný jev A nastoupí, jestliže padne sudé číslo a náhodný jev B nastoupí, jestliže padne číslo větší než 4. Určete: Ω, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, Σ.

Řešení Základní prostor je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je konečný a elementární náhodné jevy jsou $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Dále je $A = \{2, 4, 6\}$ a $B = \{5, 6\}$, takže
$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ ... padne liché číslo,
$\bar{B} = \{1, 2, 3, 4\}$ ... padne číslo menší než 5,
$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$ ... nepadne číslo 1 a 3,
$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{5, 6\} = \{6\}$ ... padne číslo 6,
$A - B = \{2, 4, 6\} - \{5, 6\} = \{2, 4\}$ ... padne číslo 2 nebo 4,
$B - A = \{5, 6\} - \{2, 4, 6\} = \{5\}$ ... padne číslo 5.
Protože nejsou stanovena žádná omezení na náhodné jevy, můžeme uvažovat maximální jevové pole (množinu všech podmnožin konečného základního prostoru Ω) $\Sigma = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{5, 6\}, \dots, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\big\}$, které obsahuje $2^6 = 64$ náhodných jevů.

6. Příklad Nechť základní prostor $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Máme náhodné jevy $A = \{a\}$ a $B = \{c, d\}$. Doplňte náhodné jevy A a B tak, abyste dostali co nejmenší jevové pole.

Řešení Jevové pole musí obsahovat: $\emptyset$ a Ω.
S každým jevem obsahuje opačný jev: $\bar{A} = \{b, c, d\}$, $\bar{B} = \{a, b\}$.
S každými náhodnými jevy obsahuje jejich průnik a sjednocení: $A \cup B = C = \{a, c, d\}$.
S náhodným jevem C obsahuje i opačný jev: $\bar{C} = \{b\}$.

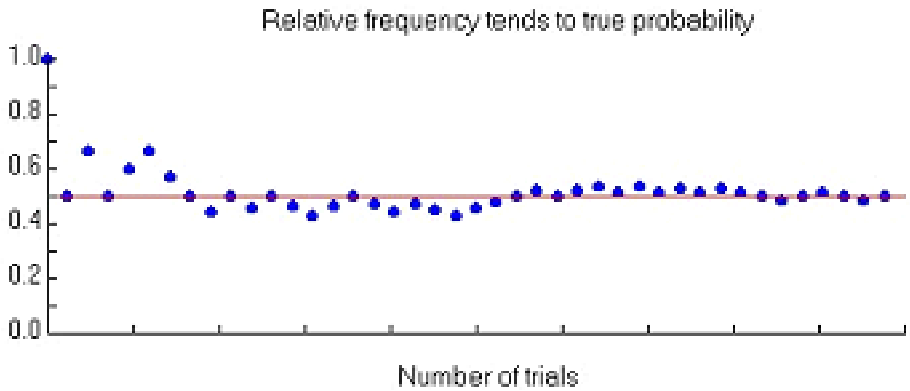
Pomocí opačného jevu, sjednocení a průniku již nedostaneme žádný další náhodný jev. Tedy $\Sigma = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \Omega\big\}$.

Pravděpodobnost a její vlastnosti

Jestliže při opakovaných sériích náhodných pokusů, které sestávají vždy z N pokusů, sledujeme chování relativní četnosti nastoupení náhodného jevu A, tj. posloupností čísel

$$\frac{N(A)}{N},$$

kde $N(A)$ je počet nastoupení jevu A v dané sérii N pokusů, pak vidíme, že posloupnosti relativních četností mají ve skoro všech sériích snahu konvergovat pro dostatečně velký počet pokusů N k jisté pevné hodnotě - viz příklad jedné takové posloupnosti na následujícím Obrázku 1. Tato teoretická hodnota $P(A)$ vyjadřuje míru možnosti nastoupení náhodného jevu A v jednotlivém pokusu a hovoříme o tzv. „**statistické definici pravděpodobnosti** “ náhodného jevu A.



Obrázek 1: Konvergence posloupnosti relativních četností

Relativní četnosti

Z jakékoliv realizované série N pokusů však můžeme pravděpodobnost $P(A)$ náhodného jevu A pomocí zjištěné relativní četnosti $\frac{N(A)}{N}$ pouze více či méně přesně odhadnout. Naopak pravděpodobnost $P(A)$ znamená, že při mnoha pokusech (řádově tisíce a více) nastoupí náhodný jev A zhruba ve $100P(A)$ % pokusů. Na vlastnostech relativní četnosti

$$0 \leq \frac{N(A)}{N} \leq 1,$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \frac{N(A \cup B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N},$$

je založena následující obecná (axiomatická) definice pravděpodobnosti náhodného jevu.

7. Pojmy **Pravděpodobnost $P(A)$ náhodného jevu $A \in \Sigma$** je reálná funkce definovaná na jevovém poli Σ s vlastnostmi:

1. $P(A) \geq 0$ pro všechny náhodné jevy $A \in \Sigma$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Pro každou posloupnost disjunktních náhodných jevů $A_i \in \Sigma, i = 1, 2, \ldots$ je

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$

Uspořádaná trojice $(\Omega,\ \Sigma,\ P)$ se nazývá **pravděpodobnostní prostor**.

8. Vlastnosti

1. $P(\bar{A}) = 1 - P\,(A)$;
2. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B), P(B - A) = P(B) - P(A)$;
3. $P\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) =$
   $= \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum\limits_{i,j=1, i<j}^{n} P\left(A_i \cap A_j\right) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right), n \geq 2;$
   speciálně pro $n = 2$ je
   $P\left(A \cup B\right) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right).$

9. Pojmy Jestliže základní prostor Ω je konečný nebo spočetný (tj. elementární jevy $\{\omega\}$ lze uspořádat do posloupnosti), pak

$$P\left(A\right) = \sum_{\omega \in A} P\left(\{\omega\}\right)$$

a pro základní prostor Ω tvořený n stejně pravděpodobnými elementárními jevy $\{\omega\}$ je

$$P(A) = \frac{m}{n}\ ,$$

kde m je počet elementárních jevů $\{\omega\}$, z nichž sestává náhodný jev A.

Říkáme, že m je **počet příznivých výsledků pokusu** a n je **počet možných výsledků pokusu**. Hovoříme přitom o tzv. **„klasické definici pravděpodobnosti“** náhodného jevu A.

10. Příklad

Vypočtěte pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A - B)$, $P(B$ - $A)$ náhodných jevů z Příkladu 5 pro hrací kostku z homogenního materiálu ve tvaru krychle.

Řešení Všechny elementární náhodné jevy mají vzhledem k pravidelnosti a homogennosti hrací kostky stejnou pravděpodobnost $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ a $n = 6$. Přímým výpočtem z „klasické definice pravděpodobnosti“ obdržíme

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(\bar{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(\bar{B}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}, P(A - B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(A - B) = \frac{1}{6}.$$

Z vlastností pravděpodobnosti lze např. určit
$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$$P(A \cup B) \ = \ P(A) \ + \ P(B) - P(A \cap B) \ = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

11. Příklad Víme, že v dodávce 100 hřídelí nemá požadovaný průměr 10 kusů, požadovanou délku nemá 20 kusů a současně nemá požadovaný průměr i délku 5 kusů. Určete pravděpodobnost toho, že náhodně vybraná hřídel z dodávky má požadovaný průměr i délku.

Řešení Předpokládejme, že každá hřídel v dodávce má stejnou pravděpodobnost výběru. Jestliže A značí náhodný jev, že vybraná hřídel nemá požadovaný průměr a B značí náhodný jev, že vybraná hřídel nemá požadovanou délku, pak $P(A) = 10/100 = 0{,}10$, $P(B) = 20/100 = 0{,}20$, $P(A \cap B) = 5/100 = 0{,}05$. Pravděpodobnost toho, že náhodně vybraná hřídel má požadovaný průměr i délku, je

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P\left(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$$

$$= 1 - (0,10 + 0,20 - 0,05) = 0,75.$$

Podmíněná pravděpodobnost a nezávislé jevy

12. Pojmy Pravděpodobnost náhodného jevu $A \in \Sigma$ za podmínky (předpokladu), že nastane náhodný jev $B \in \Sigma$, $P(B) \neq 0$, je **podmíněná pravděpodobnost**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$ je relativní mírou nastoupení náhodného jevu A vzhledem k míře možnosti nastoupení náhodného jevu B.

13. Vlastnosti

1. $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$,
   speciálně pro $n = 2$ je $P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = P(B)\, P(A|B)$.

2. Pro náhodný jev $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, kde B_i jsou disjunktní náhodné jevy, $i = 1, \ldots, n$, je tzv. **úplná pravděpodobnost**

   $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)$$

   a pro $P(A) \neq 0$ platí **Bayesův vzorec**

   $$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Předpoklad $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ ve vlastnosti 2 se často nahrazuje předpokladem $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ a hovoří se o **úplné skupině disjunktních jevů** B_i.

14. Příklad Ze skupiny 100 výrobků, která obsahuje 10 zmetků, vybereme náhodně bez vracení 3 výrobky. Pravděpodobnost toho, že první výrobek není zmetek – náhodný jev A_1, druhý výrobek není zmetek – náhodný jev A_2 a třetí výrobek je zmetek – náhodný jev $\bar{A}_3$, je

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1 \cap A_2) = \frac{90}{100}\frac{89}{99}\frac{10}{98} \approx 0,08256.$$

15. Příklad Do obchodu s potravinami dodávají rohlíky stejného druhu 3 pekárny v počtech 500, 1000 a 1500 kusů denně. Zmetkovitost jejich dodávek je 5 %, 4 % a 3 %. Jejich dodávky jsou v obchodě smíchány do celkové zásoby. Určete pravděpodobnost, že:
1. náhodně vybraný rohlík z celkové zásoby je zmetek;
2. tento rohlík byl dodán druhou pekárnou.

Řešení Označme náhodné jevy
A … vybraný rohlík je zmetek,
B_i … rohlík byl dodán i-tou pekárnou, $i = 1, 2, 3$.

Pravděpodobnosti jsou:
$P(B_1) = \frac{500}{500+1000+1500} = \frac{1}{6}, \quad P(A|B_1) = 0,05,$
$P(B_2) = \frac{1000}{500+1000+1500} = \frac{2}{6}, \quad P(A|B_2) = 0,04,$
$P(B_3) = \frac{1500}{500+1000+1500} = \frac{3}{6}, \quad P(A|B_3) = 0,03.$

1. Podle vzorce pro úplnou pravděpodobnost je

$$P(A) = 0,05\frac{1}{6} + 0,04\frac{2}{6} + 0,03\frac{3}{6} = \frac{0,22}{6} = 0,03\bar{6} \approx 0,03667,$$

takže zmetkovitost z hlediska zákazníka je přibližně 3,667 ;%.

2. Z Bayesova vzorce pro $j = 2$ je

$$P(B_2|A) = \frac{0,04\frac{2}{6}}{\frac{0,22}{6}} = \frac{0,08}{0,22} = 0,\overline{36} \approx 0,36364.$$

Analogicky lze získat $P(B_1|A) \approx 0,22727$ a $P(B_3|A) \approx 0,40909$, takže největší podíl na zmetkovitosti celkové zásoby má 3. pekárna. Přitom má absolutně nejmenší zmetkovitost ze všech tří dodavatelů, avšak dodává největší počet rohlíků.

16. Pojmy

1. Náhodné jevy $A, B \in \Sigma$ jsou **nezávislé**, jestliže $P(A|B) = P(A)$ anebo $P(B) = 0$.
2. Náhodné jevy $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ jsou **vzájemně nezávislé**, jestliže jsou nezávislé všechny dvojice náhodných jevů A_i, A_j pro všechny indexy $i \neq j$, dále jsou nezávislé A_i, $A_j \cap A_k$pro všechny indexy $i \neq j$, $i \neq k$, A_i, $A_j \cap A_k \cap A_m$ pro všechny indexy $i \neq j$, $i \neq k$ a $i \neq m$, atd.

17. Vlastnosti Pro nezávislé náhodné jevy platí:

1. A, B jsou nezávislé, právě když $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$.
2. Jestliže $A_1, \ldots, A_n$ jsou vzájemně nezávislé, pak:
   (a) $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n)$,
   (b) $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - [1 - P(A_1)] \cdots [1 - P(A_n)]$,
   (c) náhodné jevy $B_1, \ldots, B_n$ jsou vzájemně nezávislé pro libovolné varianty $B_i = A_i,\ \bar{A}_i,\ \Omega$.

18. Příklad Výrobek prochází třemi nezávislými operacemi, při kterých jsou pravděpodobnosti výroby zmetku $P(A_1) = 0{,}05$, $P(A_2) = 0{,}08$ a $P(A_3) = 0{,}03$. Určete pravděpodobnost výroby zmetku po všech třech operacích.

Řešení
Vzhledem k nezávislosti operací jsou vzájemně nezávislé i náhodné jevy A_1, A_2, A_3 a výrobek je zmetek, jestliže nastane aspoň jeden z těchto jevů, takže

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - [1 - P(A_1)]\,[1 - P(A_2)]\,[1 - P(A_3)] = 1 - 0{,}95 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}97 = 0{,}15222.$$