Testování statistických hypotéz

1 Statistická hypotéza a její test

V praxi jsme nuceni rozhodnout, zda nějaké tvrzeni o parametrech náhodných veličin nebo o veličině samotné je pravdivé či nikoli. Např.: Zda zmetkovitost tří různých výrobních linek je stejná. Zda variabilita zisků 5 různých prodejců je stejná. Zda průměry hřídelí se chovají podle zákonů normálního rozdělení. Tato tvrzení budeme nazývat statistické hypotézy, přesněji bude pojem zaveden v následující definici, a matematický postup vedoucí k zamítnutí či nezamítnutí dané hypotézy se nazývá test statistické hypotézy.

Předem upozorňujeme na to, že neexistuje matematický postup, který prokáže platnost statistické hypotézy. Pouze rozhodneme, zda danou *hypotézu zamítáme* a dopustíme se chyby s pravděpodobností menší než zvolené α, nebo *hypotézu nezamítáme*, ale nevíme zda hypotéza platí či máme jenom nedostatek informací (většinou počet měření) k zamítnutí hypotézy.

1. Pojmy **Statistická hypotéza** H je tvrzení o vlastnostech rozdělení pravděpodobnosti pozorované náhodné veličiny X s distribuční funkcí $F(x, \vartheta)$ nebo náhodného vektoru (X, Y) se simultánní distribuční funkcí $F(x, y, \vartheta)$ apod.

Postup, jímž ověřujeme danou hypotézu, se nazývá **test statistické hypotézy**. Proti testované hypotéze H, nazývané také **nulová hypotéza**, stavíme tzv. **alternativní hypotézu** $\bar{H}$, kterou volíme dle požadavků úlohy.

Jestliže H je hypotéza, že parametr ϑ má hodnotu ϑ_0, píšeme $H : \vartheta = \vartheta_0$. Případ $\bar{H} : \vartheta \neq \vartheta_0$ je **dvoustranná** alternativní hypotéza a $\bar{H} : \vartheta > \vartheta_0$, resp. $\bar{H} : \vartheta < \vartheta_0$, je **jednostranná** alternativní hypotéza.

2. Příklad Nulová hypotéza (parametrická): Střední hodnota výšky studentů je 175 cm.
Jednostranná alternativní hypotéza: Střední hodnota výšky studentů je menší než 175 cm.
Oboustranná alternativní hypotéza: Střední hodnota výšky studentů není 175 cm.
Nulová hypotéza (neparametrická): Výška studentů má normální rozdělení.
Alternativní hypotéza: Výška studentů nemá normální rozdělení.

3. Pojmy Pro testování hypotézy $H : \vartheta = \vartheta_0$ proti nějaké zvolené alternativní hypotéze $\bar{H}$ se konstruuje vhodná statistika $T(X_1, \ldots, X_n)$, tzv. **testové kritérium**.

Obor hodnot testového kritéria $T(X_1, \ldots, X_n)$ se za předpokladu, že platí hypotéza $H : \vartheta = \vartheta_0$, rozdělí na dvě disjunktní podmnožiny: **kritický obor** W_α a jeho doplněk $\overline{W}_\alpha$ (viz Obrázek 1). Kritický obor W_α se vzhledem k alternativní hypotéze $\bar{H}$ stanoví tak, aby pravděpodobnost toho, že testové kritérium $T(X_1, \ldots, X_n)$ nabude hodnotu z kritického oboru W_α, byla α (přesněji pro diskrétní náhodnou veličinu T nejvýše α).

Číslo $\alpha > 0$ je **hladina významnosti** testu a volíme ji blízkou nule, obvykle 0,05 anebo 0,01. Hladina významnosti se někdy uvádí také v % (např. v softwarových aplikacích pro PC), tedy obvykle 5 % anebo 1 %.

4. Příklad Určete kritický obor $W_{0,05}$ vzhledem k oboustranné alternativní hypotéze, jestliže víte, že testové kritérium T má rozdělení N(0,1).

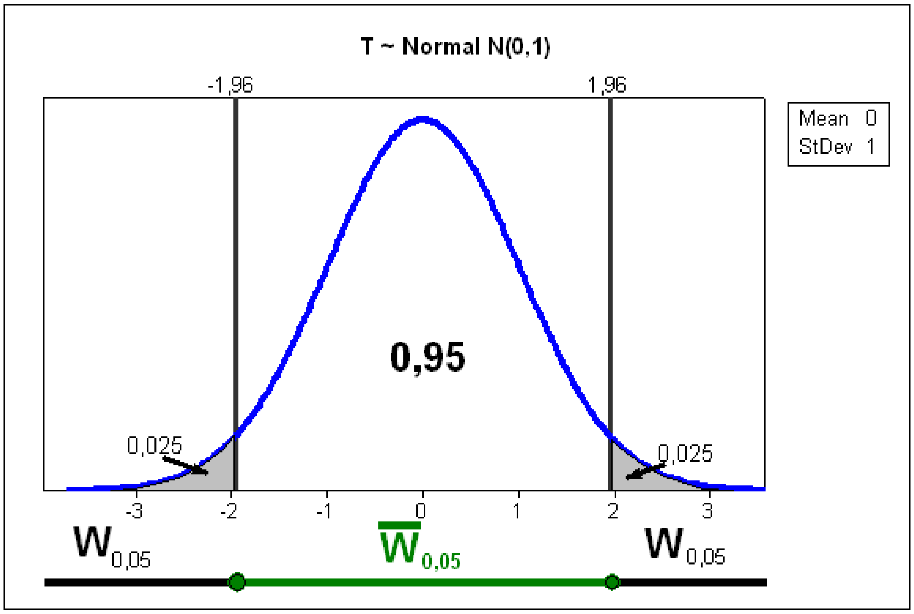
Řešení Kritický obor určujeme vzhledem k oboustranné alternativní hypotéze, tedy zvolíme kritický obor $W_{0,05} = (-\infty; t_1) \cup (t_2; +\infty)$ tak, aby platilo

$$P(T < t_1) = P(t_2 < T) = \frac{0,05}{2},$$

dostaneme pro kritické hodnoty t_1, t_2 rovnice

$$\Phi(t_1) = \frac{0,05}{2} = 0,025, \Phi(t_2) = 1 - \frac{0,05}{2} = 0,975.$$

Odtud je $t_1 = u_{0,025} = -u_{0,975}$ a $t_2 = u_{0,975}$, kde $u_{0,975}$ je 0,975-kvantil normovaného normálního rozdělení N(0; 1). Hodnoty kvantilu lze získat z tabulky **T1**, odkud pro hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ je



Obrázek 1: Určení kritického oboru

$u_{0,975} = 1,960$. Takto získaný kritický obor je znázorněn na Obrázku 1 včetně odpovídajících pravděpodobností.

5. Pojmy Rozhodnutí o hypotéze H pomocí pozorovaných hodnot náhodné veličiny X je pak založeno na následující konvenci. Jestliže tzv. **pozorovaná hodnota testového kritéria** $t = T(x_1, \ldots, x_n)$ na získaném statistickém souboru $(x_1, \ldots, x_n)$ padne do kritického oboru, tedy $t \in W_\alpha$, zamítáme hypotézu H a současně nezamítáme hypotézu $\bar{H}$ na hladině významnosti α. Jestliže naopak nepadne t do kritického oboru, tedy $t \in \overline{W_\alpha}$, nezamítáme hypotézu H a současně zamítáme hypotézu $\bar{H}$ na hladině významnosti α.

6. Poznámka Nezamítnutí hypotézy H, resp. $\bar{H}$, neznamená ještě prokázání její platnosti, neboť jsme na základě realizace náhodného výběru získali pouze informace, které nestačí na její zamítnutí. Je-li to možné, je vhodné před **přijetím** dané hypotézy zvětšit rozsah statistického souboru a znovu hypotézu H testovat.

Při testování hypotézy H mohou nastat čtyři možnosti znázorněné v Tabulce 1 Jestliže zamítáme neplatnou hypotézu anebo nezamítáme platnou hypotézu, je vše v pořádku, avšak při rozhodnutí o hypotéze H na základě testu se můžeme dopustit jedné ze dvou chyb:

1. **Chyba prvního druhu** nastane, jestliže hypotéza H platí, avšak $t \in W_\alpha$, takže hypotézu H zamítáme. Pravděpodobnost této chyby je hladina významnosti $\alpha = P(T \in W_\alpha / H)$.

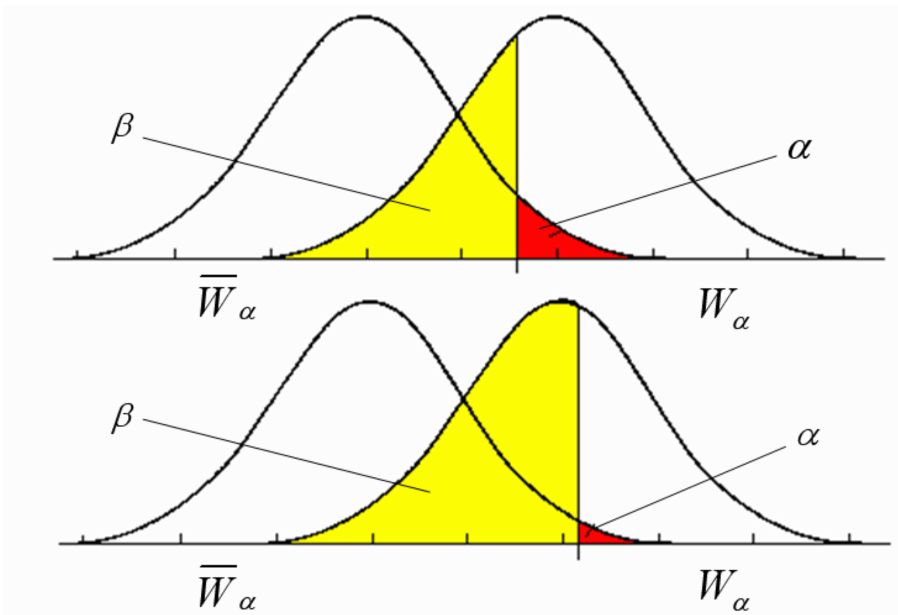
2. **Chyba druhého druhu** nastane, jestliže hypotéza H neplatí, avšak $t \notin W_\alpha$ (tj. $t \in \overline{W_\alpha}$), takže hypotézu H nezamítáme. Pravděpodobnost této chyby je $\beta = P\left(T \notin W_\alpha / \bar{H}\right)$ a pravděpodobnost $1 - \beta = P\left(T \in W_\alpha / \bar{H}\right)$ je tzv. **síla testu**.

Hladina významnosti, tj. pravděpodobnost chyby prvního druhu α má ten praktický význam, že při mnoha opakovaných realizacích náhodného výběru (např. řádově v tisících) a současné platnosti testované hypotézy H se v přibližně 100 α % testech této hypotézy zmýlíme, tedy zamítneme platnou hypotézu. Podobně když hypotéza H neplatí, tak se v přibližně 100 β % testech zmýlíme a nezamítneme ji. Avšak snížením hladiny významnosti α se při nezměněném rozsahu statistického souboru n zvýší β a naopak, takže pro zvolenou hladinu významnosti α zajišťujeme snížení β zvýšením rozsahu n. Riziko chyb

H	PLATÍ	NEPLATÍ
ZAMÍTÁME	CHYBA 1. DRUHU (α)	—
NEZAMÍTÁME	—	CHYBA 2. DRUHU (β)

Tabulka 1: Skutečnost versus rozhodnutí

prvního i druhého druhu nelze v reálných úlohách eliminovat, pouze je můžeme snížit. Vztah mezi α a β je ilustrován na Obrázku 2, kde pro jednoduchost je i alternativní hypotéza $\bar{H}$ jednoduchá. Na tomto obrázku křivky vlevo odpovídají hustotě (pravděpodobnostní funkci) testového kritéria T při platnosti hypotézy H a křivky vpravo odpovídají hustotě (pravděpodobnostní funkci) testového kritéria T při platnosti hypotézy $\bar{H}$.



Obrázek 2: Vztah chyby prvního a druhého druhu

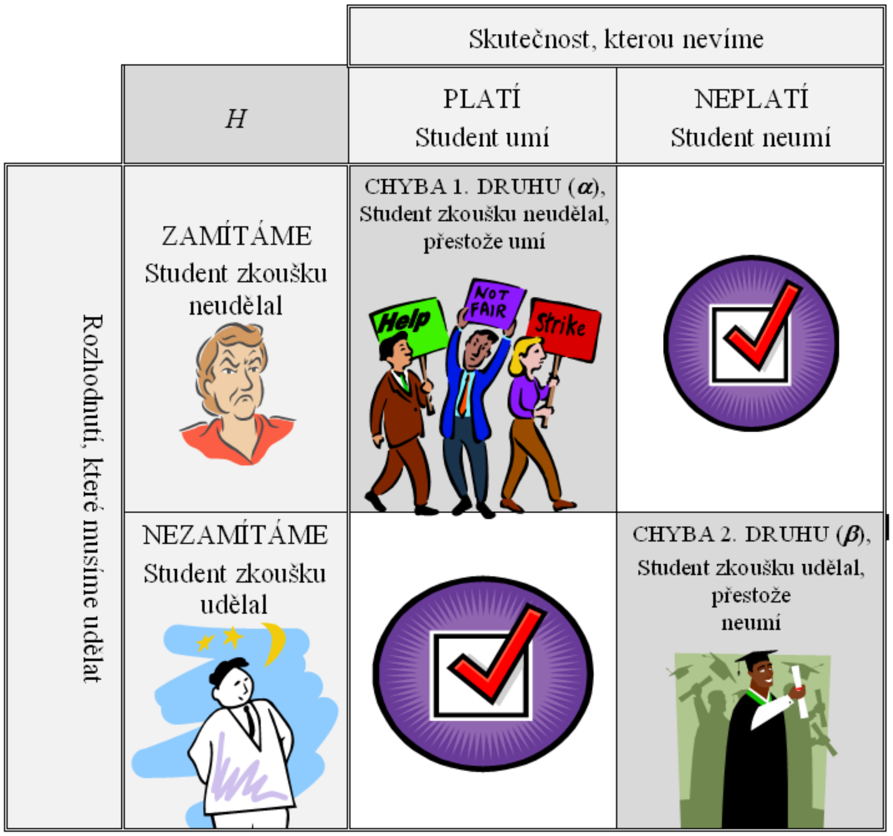
7. Příklad Rozdílnost chyby prvního a druhého druhu a jejich vzájemnou souvislost si ukážeme na vám velmi blízkém případu - zkoušení studenta.

Nulová hypotéza H: student umí

Alternativní hypotéza: student neumí.

Závěry vyučujícího: student zkoušku udělal (tedy H nezamítáme) nebo student zkoušku neudělal (tedy H zamítáme).

Chybu prvního a druhého druhu ilustruje Obrázek 3. Nyní je vám zřejmé, že mezi těmito chybami je významný rozdíl. A dále, že ze zvětšující se chybou prvního druhu (učitel je přísnější) se zmenšuje chyba druhého druhu a naopak. Jediná možnost jak zmenšit obě dvě chyby je získat více informací o znalostech studenta, což při testování statistických hypotéz znamená zvětšit rozsah souboru n.



Obrázek 3: Ukázka chyby prvního a druhého druhu

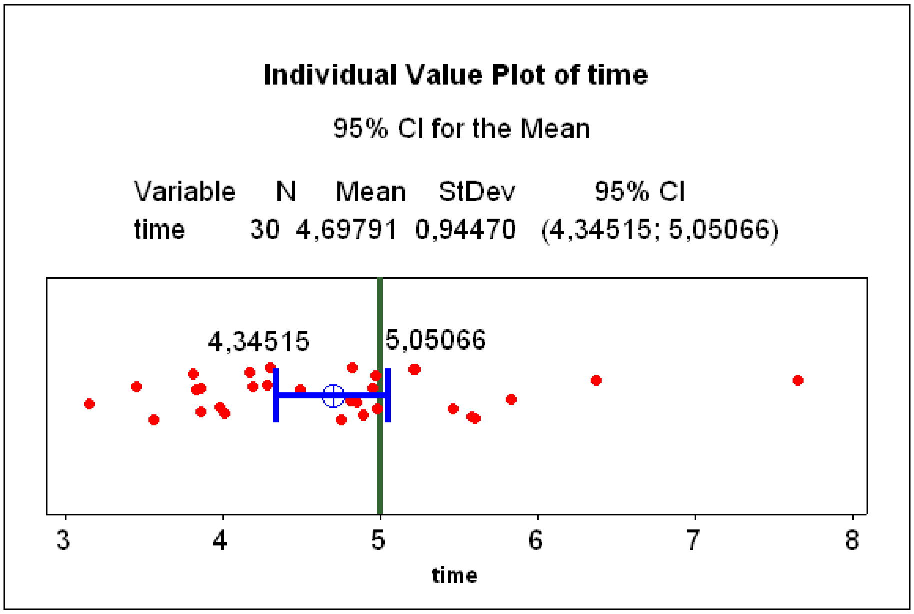
8. Poznámka Vzhledem k tomu, že testové kritérium T je náhodná veličina, bývá obor $\overline{W}_\alpha$ ve tvaru intervalu, např. $\langle t_1; t_2 \rangle$, kde t_1, t_2 jsou kvantily statistiky T (tzv. **kritické hodnoty**), podobně jako u intervalových odhadů. Poznamenejme, že intervalové odhady lze přímo použít k testování statistických hypotéz. Např. při testu hypotézy $H : \vartheta = \vartheta_0$ proti alternativě $\bar{H} : \vartheta \neq \vartheta_0$ na hladině spolehlivosti α, můžeme místo testového kritéria vzít oboustranný intervalový odhad parametru ϑ se spolehlivostí $1 - \alpha$. Jestliže tento intervalový odhad obsahuje hodnotu ϑ_0, hypotézu H nezamítáme na hladině významnosti α a naopak.

9. Příklad Byl získán statistický soubor padesáti hodnot o délce jisté výrobní operace a vypočteny číselné charakteristiky a intervalový odhad střední hodnoty se spolehlivostí 95% za předpokladu, že jsou data vybrána z normálního rozdělení (viz Obrázek 4). Rozhodněte na hladině významnosti 0,05, zda má pravdu normovač, který tvrdí, že střední hodnota doby operace je 5 min.

Vzhledem k tomu, že hodnota 5 leží uvnitř intervalového odhad střední hodnoty se spolehlivostí 95%, nezamítáme hypotézu $H : \mu = 5$ proti alternativě $\bar{H} : \mu \neq 5$ na hladině významnosti α.

2 Testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení

V tomto odstavci předpokládáme, že náhodné veličiny X a Y, resp. náhodný vektor (X, Y), mají normální rozdělení pravděpodobnosti. Předpoklad o normálním rozdělení pravděpodobnosti lze testovat pomocí testů popsaných v dalším odstavci této kapitoly. Dále uvádíme pouze testová kritéria pro dvoustranné alternativní hypotézy, např. $\bar{H} : \mu \neq \mu_0$ apod. Testy hypotéz H pro jednostranné alternativní hypotézy $\bar{H} : \mu > \mu_0$ a $\bar{H} : \mu < \mu_0$ se provádějí pomocí stejných testových kritérií a odlišují se pouze



Obrázek 4: Intervalový odhad střední hodnoty

jednostrannými kritickými obory , resp. obory nezamítnutí, a odpovídajícími kritickými. Poznamenejme, že testy hypotéz o parametrech normálního rozdělení se velmi často používají při statistickém zpracování naměřených dat z oblasti materiálových charakteristik, obrobitelnosti, trvanlivosti apod.

2.1 Test hypotézy $H : \mu = \mu_0$ při neznámém rozptylu σ^2

Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n-1}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\alpha/2}; t_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k = n - 1$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T2**. Jedná se o tzv. **t-test** nebo **Studentův test pro jeden výběr**.

10. Příklad (řešený) Měřením délky 10 válečků byly získány empirické charakteristiky $\bar{x} = 5,37$ mm a $s^2 = 0,0019$ mm^2. Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu, že střední naměřená délka válečku je 5,40 mm, tedy $H : \mu = 5,40$.

Řešení Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{5,37 - 5,40}{\sqrt{0,0019}}\sqrt{10-1} = -2,0647.$$

Pro $10 - 1 = 9$ stupňů volnosti je $t_{0,975} = 2,262$ z tabulky **T2**, takže $\bar{W}_{0,05} = \langle -2,262; 2,262\rangle$. Protože $t \in \bar{W}_{0,05}$, hypotézu nezamítáme. Pro testování této hypotézy bylo možno použít také intervalový odhad se spolehlivostí 0,95 z Příkladu 10 kapitoly Odhady parametrů.Protože tento odhad obsahuje hypotetickou hodnotu 5,40, nezamítáme danou hypotézu na hladině významnosti $1 - 0,95 = 0,05$.

2.2 Test hypotézy $H : \sigma^2 = \sigma_0^2$

.

Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle \chi^2_{\alpha/2}; \chi^2_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde χ^2_P je P-kvantil Pearsonova rozdělení $\chi^2(k)$ s $k = n - 1$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T3**. Jedná se o tzv. **Pearsonův test**.

11. Příklad (řešený) Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že rozptyl naměřené délkyválečku z Příkladu 10 je $0,0025$ mm^2, tedy $H : \sigma^2 = 0,0025$.

Řešení Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{10 \cdot 0,0019}{0,0025} = 7,6.$$

Pro $10 - 1 = 9$ stupňů volnosti je $\chi^2_{0,025} = 2,700$ a $\chi^2_{0,975} = 19,023$ z tabulky **T3**, takže $\bar{W}_{0,05} = \langle 2,700; 19,023\rangle$. Protože $t \in \bar{W}_{0,05}$, hypotézu nezamítáme.

2.3 Test hypotézy $H : \rho = \rho_0$

Pozorovaná hodnota testového kritéria pro $n \geq 10$, $|r| \neq 1$ a $|\rho_0| \neq 1$ je

$$t = \left(\ln \frac{1+r}{1-r} - \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} - \frac{\rho_0}{n-1} \right) \frac{\sqrt{n-3}}{2}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle -u_{1-\alpha/2};\, u_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde $u_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil normálního rozdělení N(0; 1), jehož hodnoty lze získat z tabulky **T1**.

12. Příklad (řešený) Sledováním nákladů X a ceny Y stejného výrobku u deseti výrobců byl získán dvourozměrný statistický soubor s koeficientem korelace $r = 0,82482$. Na hladině významnosti $0,01$ testujte hypotézu, že veličiny X a Y jsou nekorelované (vzhledem k normálnímu rozdělení nezávislé), tedy $H : \rho = 0$.

Řešení Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \left(\ln\frac{1+0,82482}{1-0,82482} - \ln\frac{1+0}{1-0} - \frac{0}{10-1} \right) \frac{\sqrt{10-3}}{2} \approx 3,1001.$$

Pro danou hladinu významnosti je $u_{0,995} = 2,576$ z tabulky **T1**, takže $\overline{W}_{0,01} = \langle -2,576; 2,576\rangle$. Protože $t \notin \overline{W}_{0,01}$, hypotézu zamítáme a považujeme X, Y za závislé.

2.4 Test hypotézy $H : \mu\,(X) = \mu\,(Y)$ pro dvojice

Označme pro pozorované dvojice (x_i, y_i), kde $i = 1, \ldots, n$, náhodného vektoru (X, Y) jejich rozdíly $d_i = x_i - y_i$ a odpovídající empirické charakteristiky $\overline{d}$ a $s^2\,(d)$. Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\overline{d}}{s\,(d)} \sqrt{n-1}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\alpha/2};\, t_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k = n - 1$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T2**. Uvedený test se také nazývá **t-test (Studentův test) pro párové hodnoty**.

13. Příklad (řešený) Měřením teploty dvěma přístroji byly během osmi dnů získány dvojice $(x_i, y_i) =$ (51,8; 49,5), (54,9; 53,3), (52,2; 50,6), (53,3; 52,0), (51,6; 46,8), (54,1; 50,5), (54,2; 52,1), (53,3; 53,0) $(°C)$. Na hladině významnosti 1% testujte hypotézu, že rozdíl středních hodnot je nevýznamný, tedy $H : \mu(X) = \mu(Y)$.

Řešení Pro $d_i = x_i - y_i$, $i = 1, \ldots, 8$, dostaneme $\bar{d} = 2,2$ °C a $s(d) = 1,3172$ °C. Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{2,2}{1,3172}\sqrt{8-1} \approx 4,4190.$$

Pro $8 - 1 = 7$ stupňů volnosti je $t_{0,995} = 3,499$ z tabulky **T2**, takže $\bar{W}_{0,01} = \langle -3,499; 3,499 \rangle$. Protože $t \notin \bar{W}_{0,01}$, hypotézu zamítáme na hladině významnosti 1 % a považujeme rozdíl naměřených hodnot za statisticky významný.

U dalších testů předpokládáme, že pozorováním dvou nezávislých náhodných veličin X a Y s normálními rozděleními s parametry $\mu(X)$, $\sigma^2(X)$ a $\mu(Y)$, $\sigma^2(Y)$ byly získány realizace nezávislých náhodných výběrů s rozsahy n_1 a n_2.

2.5 Test hypotézy $H : \mu(X) - \mu(Y) = \mu_0$ při neznámých rozptylech $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$

Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \mu_0}{\sqrt{n_1\, s^2(x) + n_2\, s^2(y)}} \sqrt{\frac{n_1\, n_2\, (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle -t_{1-\alpha/2}; t_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde $t_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k = n_1 + n_2 - 2$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T2**. Jedná se o tzv. **t-test** nebo **Studentův test pro dva výběry při stejných rozptylech**.

14. Příklad (řešený) Zkouškami pevnosti drátů vyrobených dvěma různými technologiemi byly získány dva statistické soubory s charakteristikami n_1= 33, $\bar{x}$= 5,4637 kN, $s^2(x)$ = 0,3302 kN^2, n_2= 28, $\bar{y}$= 6,1179 kN, $s^2(y) = 0,4522$ kN^2. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že rozdílné technologie nemají vliv na střední pevnost drátu (za předpokladu stejných rozptylů $\sigma^2(X)$ a $\sigma^2(Y)$), tedy $H : \mu(X) - \mu(Y) = 0$.

Řešení Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{5,4637 - 6,1179 - 0}{\sqrt{33 \cdot 0,3302 + 28 \cdot 0,4522}} \sqrt{\frac{33 \cdot 28\ (33 + 28 - 2)}{33 + 28}} \approx 4,030.$$

Pro $33 + 28 - 2 = 59$ stupňů volnosti je $t_{0,975} = 2,001$ interpolací z tabulky **T2**, takže $\bar{W}_{0,05} == \langle -2,001; 2,001 \rangle$. Protože $t \notin \bar{W}_{0,05}$, hypotézu zamítáme. Rozdílné technologie mají vliv na střední pevnost drátu.

2.6 Test hypotézy $H : \mu(X) - \mu(Y) = \mu_0$ při neznámých rozptylech $\sigma^2(X) \neq \sigma^2(Y)$

Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2(x)}{n_1-1} + \frac{s^2(y)}{n_2-1}}}$$

a $\overline{W}_\alpha = \left\langle -\bar{t}_{1-\alpha/2}; \bar{t}_{1-\alpha/2} \right\rangle$, kde

$$\bar{t}_{1-\alpha/2} = \frac{\frac{s^2(x)}{n_1-1}t(x) + \frac{s^2(y)}{n_2-1}t(y)}{\frac{s^2(x)}{n_1-1} + \frac{s^2(y)}{n_2-1}}$$

a $t(x)$, resp. $t(y)$, je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Studentova rozdělení S(k) s $k = n_1 - 1$, resp. $n_2 - 1$ stupni volnosti. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T2**. Jedná se o tzv. **t-test** nebo **Studentův test pro dva výběry při různých rozptylech**.

15. Příklad (řešený) Při vyšetřování životnosti výrobků v různých systémech extrémních provozních podmínek byly získány dva statistické soubory s charakteristikami $n_1 = 21$, $\bar{x} = 3,581$, $s^2(x) = 0,114$, $n_2 = 23$, $\bar{y} = 3,974$, $s^2(y) = 0,041$ (životnost výrobků je v hodinách). Za předpokladu různých rozptylů $\sigma^2(X)$ a $\sigma^2(Y)$ testujte na hladině významnosti 0,05, že první systém extrémních provozních podmínek zvyšuje oproti druhému systému extrémních provozních podmínek střední životnost výrobku o 0,5 hod., tedy hypotézu $H : \mu(X) - \mu(Y) = -0,5$.

Řešení Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{3,581 - 3,974 - (-0,5)}{\sqrt{\frac{0,114}{21-1} + \frac{0,041}{23-1}}} \approx 1,2303.$$

Z tabulky **T2** pro $1 - \alpha/2 = 0,975$ je $t(x) = 2,086$ pro $21 - 1 = 20$ stupňů volnosti a $t(y) = 2,074$ pro $23 - 1 = 22$ stupňů volnosti, takže

$$\bar{t}_{0,975} = \frac{\frac{0,114}{21-1} 2,086 + \frac{0,041}{23-1} 2,074}{\frac{0,114}{21-1} + \frac{0,041}{23-1}} \approx 2,083$$

a $\overline{W}_{0,05} = \langle -2,083; 2,083 \rangle$. Protože $t \in \overline{W}_{0,05}$, hypotézu o zvýšení střední životnosti o 0,5 hod. nezamítáme.

2.7 Test hypotézy $H : \sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$

Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\max\left(\frac{n_1 s^2(x)}{n_1-1}; \frac{n_2 s^2(y)}{n_2-1}\right)}{\min\left(\frac{n_1 s^2(x)}{n_1-1}; \frac{n_2 s^2(y)}{n_2-1}\right)},$$

kde klademe $\bar{W}_\alpha = \left\langle 1 ; F_{1-\alpha/2} \right\rangle$ a $F_{1-\alpha/2}$ je $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-kvantil Fisherova - Snedecorova rozdělení $\mathrm{F}(k_1, k_2)$ se stupni volnosti $k_1 = n_1 - 1$ a $k_2 = n_2 - 1$ pro $\frac{n_1 s^2(x)}{n_1-1} \geq \frac{n_2 s^2(y)}{n_2-1}$ anebo $k_1 = n_2 - 1$ a $k_2 = n_1 - 1$ pro $\frac{n_1 s^2(x)}{n_1-1} \leq \frac{n_2 s^2(y)}{n_2-1}$. Kvantily tohoto rozdělení jsou uvedeny v tabulce **T4**. Jedná se o tzv. **F-test** nebo **Fisherův test**. Pomocí něho lze testovat předpoklady o rozptylech v obou předcházejících testech.

16. Příklad (řešený) Na hladině významnosti 0,05 ověřte předpoklad o různých rozptylech v řešeném Příkladu 15, tedy že $\sigma^2(X) \neq \sigma^2(Y)$, kde $s^2(x) = 0,114$, $n_1 = 21$, $s^2(y) = 0,041$, $n_2 = 23$.

Řešení Testujeme naopak hypotézu $H : \sigma^2(X) = \sigma^2(Y)$. Pozorovaná hodnota testového kritéria je

$$t = \frac{\max\left(\frac{21.0,114}{21-1}; \frac{23.0,041}{23-1}\right)}{\min\left(\frac{21.0,114}{21-1}; \frac{23.0,041}{23-1}\right)} \approx \frac{\max(0,11970; 0,04286)}{\min(0,11970; 0,04286)} \approx 2,7928.$$

Z tabulky **T4** je pro $k_1 = 21 - 1 = 20$ a $k_2 = 23 - 1 = 22$ stupňů volnosti $F_{0,975}$= 2,389, takže $\overline{W}_{0,05} = \langle 1; 2,389 \rangle$. Protože $t \notin \overline{W}_{0,05}$, hypotézu zamítáme a předpoklad o různých rozptylech v Příkladu 15 považujeme za správný.