Jméno a příjmení (čitelně): ______________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Hložek Jaroš Johanovská Konopka

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test ZS 2021/22
Varianta C

V každé úloze všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte.

1. (4 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2n} + \left(\frac{11}{9}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{16}{9}\right)^{n+1}}.$$

2. (4 body) Zderivujte funkci

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right),$$

spočtenou derivaci co nejvíce zjednodušte. Určete definiční obor funkce i její derivace.

3. (12 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce $f(x) = -x^2 + 3x - 2$. Určete body $x_0 \in \mathbb{R}$, v nichž má tečna ke grafu funkce f rovnici $y = kx + q$ se směrnicí $k = -3$. V každém takovém bodě pak spočtěte hodnotu koeficientu q a napište rovnici příslušné tečny. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou.

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = 8\sqrt{x} - x$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami, limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce.

5. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 100;\ x + y \le 2\}.$$

U kandidátů na zakřivené části hranice množiny M spočtěte příslušnou hodnotu λ. Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2n} + \left(\frac{11}{9}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{16}{9}\right)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\left(\frac{16}{9}\right)^{n}}\cdot\left(4 + \frac{11}{9}\cdot\left(\frac{11}{9}\cdot\frac{9}{16}\right)^{n}\right)}{\cancel{\left(\frac{16}{9}\right)^{n}}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{16}\right)^{n} - \frac{16}{9}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{11}{9}\cdot\left(\frac{11}{16}\right)^{n}}{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n} - \frac{16}{9}} = \frac{4+0}{0-\frac{16}{9}} = \frac{4}{1}\cdot\left(-\frac{9}{16}\right) = -\frac{9}{4}$$

2.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) \qquad \frac{x}{x+2} > 0$$

		-2		0	
x	$-$		$-$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x+2}} \cdot \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{x(x+2)} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} - \{0; -2\}$$

3.

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2 \qquad f(3) = -9 + 9 - 2 = -2$$

$$f'(x) = -2x + 3 = -3$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

tečný bod: $[3; -2]$

tečna: $y = -3x + q$

$$-2 = -9 + q$$

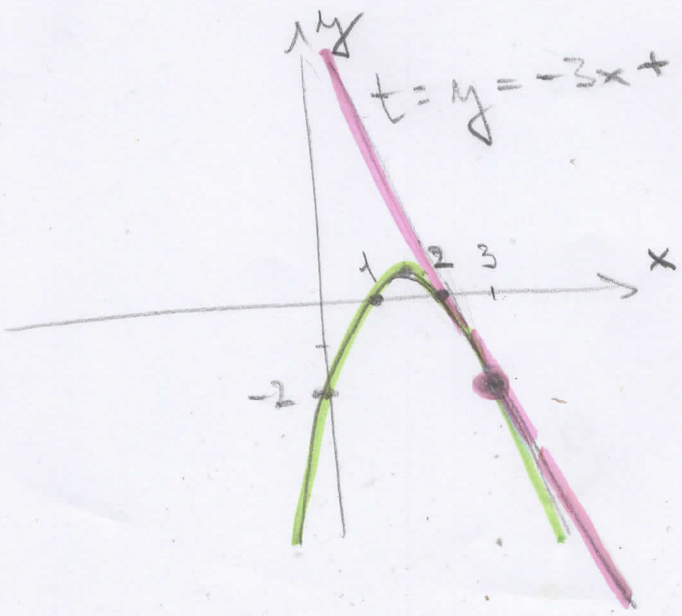
$$q = 7$$

$$\boxed{y = -3x + 7}$$

$$f(x) = -(x^2 - 3x + 2) = -(x-1)(x-2)$$

x	1	2	$\frac{3}{2}$	0
$f(x)$	0	0	$\frac{1}{4}$	-2

x	0	$\frac{7}{3}$
y	7	0



4.

$f(x) = 8\sqrt{x} - x \qquad D_f = \langle 0, \infty)$

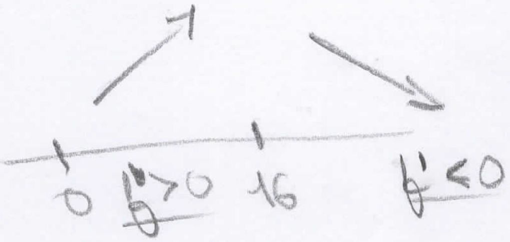
x	0	64	16
$f(x)$	0	0	16

$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 0$

$\frac{4}{\sqrt{x}} = 1$

$4 = \sqrt{x}$

$16 = x$



$f(16) = 8 \cdot 4 - 16 = 16$

globální maximum: $[16; 16]$

$f''(x) = -2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} < 0 \quad \forall x \in D_f \implies f$ je konkávní

$f(x) = 0 \iff 8\sqrt{x} - x = 0$

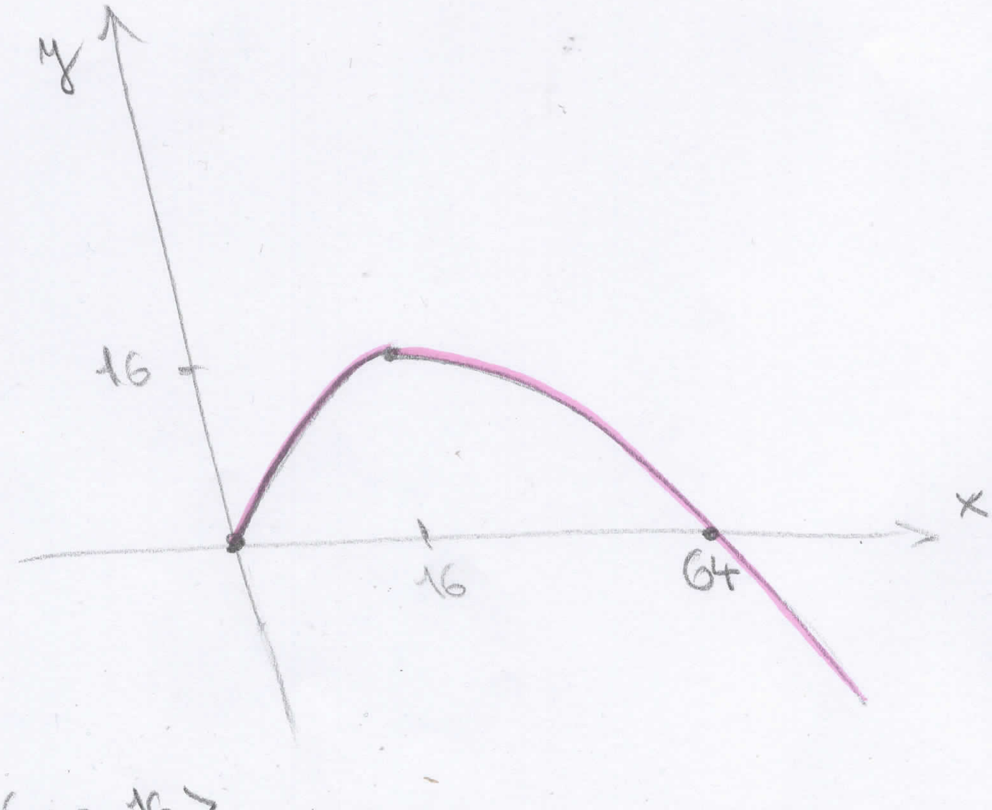
$8\sqrt{x} = x$

$64x = x^2$

$0 = x(x-64)$

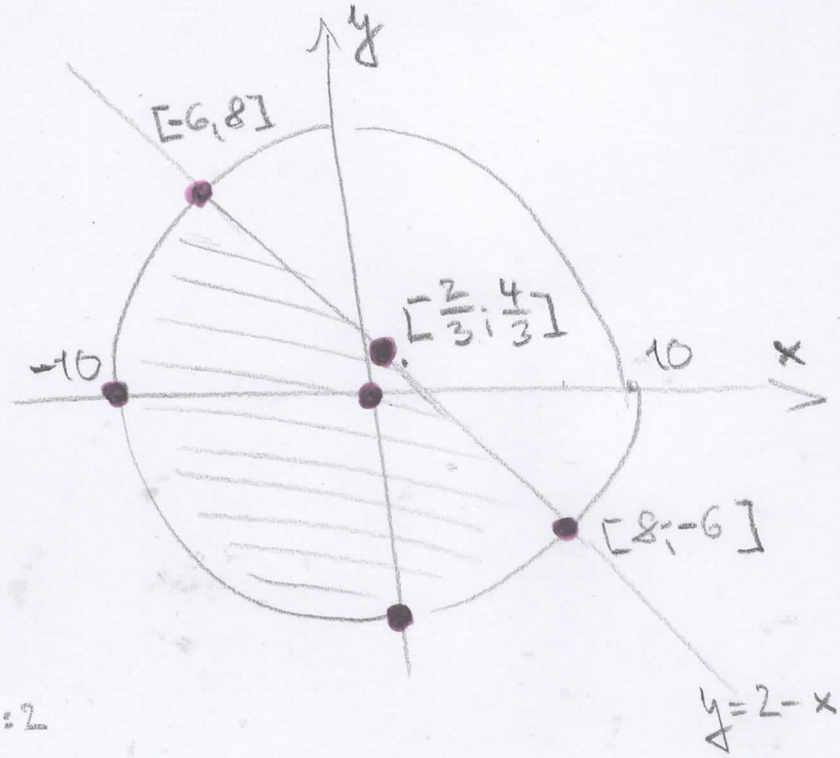
$x = 0 \lor x = 64$

$\lim\limits_{x \to \infty} (8\sqrt{x} - x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot \left(\frac{8}{\sqrt{x}} - 1 \right) \right) = \infty \cdot (0-1) = -\infty$



$H_f = (-\infty, 16\rangle$

5. $f(x,y) = 2x^2 + y^2$



$M: \; x^2 + y^2 \leq 100$

$\quad x + y \leq 2$

$y = 2 - x$

$x^2 + y^2 = 100$

$x^2 + (2-x)^2 = 100$

$x^2 + 4 - 4x + x^2 = 100$

$2x^2 - 4x - 96 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 2x - 48 = 0$

$(x-8)(x+6) = 0$

$\underline{x = 8} \lor \underline{x = -6}$

I. $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ stac. bod $[0,0]$

II. $g(x,y) = x + y - 2 = 0 \;, x \in \langle -6, 8 \rangle$

$L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = 2x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2)$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 4x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y - 4x = 0$

$\boxed{y = 2x}$

$\lambda = -4x$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 2 = 0$

$3x - 2 = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{array}}$

$\lambda = -\frac{8}{3}$

III. $g(x,y) = x^2 + y^2 - 100$

$$L(x,y) = 2x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 100)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + 2\lambda x = 2x(2+\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 2y(1+\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 100 = 0$$

$\lambda = -2$: $y = 0$, $x = \pm 10$

$\lambda = -1$: $x = 0$, $y = \pm 10$

kandidáti na extrém: $[0,0]$, $[-6,8]$, $[8;-6]$, $[0;-10]$, $[-10,0]$, $[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$

$f(0,0) = 0$ → minimum

$f(8,-6) = 2 \cdot 64 + 36 = 128 + 36 = 164$

$f(-6,8) = 2 \cdot 36 + 64 = 136$

$f(0,-10) = 100$

$f(-10,0) = 200$ → maximum

$f(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) = 2 \cdot \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = \frac{24}{9}$