Jméno a příjmení (čitelně): ______________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka   Kryštof   Kůs   Řada

9:15   11:00   12:45   14:30   16:15   18:00

Závěrečný test LS 2019/20
Test 1, Varianta B

1A. (6 bodů) Pro funkci $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$ určete (a) její definiční obor, (b) limity ve všech krajních bodech def. oboru (všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte).

1B. (4 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 3} \frac{\ln(x^3 - 7x - 5)}{x^2 - 10x + 21}.$$

2. (10 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce

$$f(x) = (-4x)^2 + 4x - 2$$

Určete body $x_0 \in \mathbb{R}$, v nichž má tečna ke grafu funkce f rovnici ve tvaru $y = -28x + q$. V každém takovém bodě pak spočtěte hodnotu koeficientu q a napište rovnici příslušné tečny. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou, u tečny určete a vyznačte její průsečíky s osami a bod dotyku s parabolou.

3. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, obor hodnot, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.
Pomůcka: $2^{\frac{1}{3}} \doteq 1,26$; $2^{-\frac{1}{3}} \doteq 0,79$.

Jméno a příjmení (čitelně): ______________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka   Kryštof   Kůs   Řada

9:15   11:00   12:45   14:30   16:15   18:00

Závěrečný test LS 2019/20
Test 2, Varianta B

4. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = xy - 3x$ na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x - 3 \leq y \leq 3 + 2x - x^2\}.$$

Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.
Pomůcka:

5. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^4 - 3z^2$ na množině

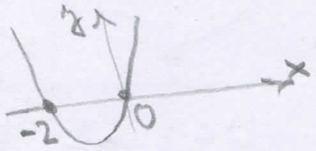
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^4 + (y-2)^2 + z^2 \leq 1\}.$$

1A $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$

$x^2+2x \ge 0$

$x(x+2) \ge 0$

$\boxed{D_f = (-\infty,-2\rangle \cup \langle 0,\infty)}$



$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to -2_-} f(x) = +2$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\right) = \frac{2}{0_+} = \underline{\underline{+\infty}}$$

1B $$\lim_{x\to3}\frac{\ln(x^3-7x-5)}{x^2-10x+21} \overset{L.P.}{\underset{\downarrow\ \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to3}\frac{\frac{3x^2-7}{x^3-7x-5}}{2x-10} =$$

$$= \frac{\frac{20}{1}}{(-4)} = \underline{\underline{-5}}$$

2. $f(x) = (-4x)^2 + 4x - 2 = 16x^2 + 4x - 2$

$f'(x) = 32x + 4$

$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{8}$

$f' < 0 \quad -\frac{1}{8} \quad f' > 0$

$f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{16}{64} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$

směrnice tečny $k = -28$

$k = f'(x)$

$-28 = 32x + 4 \quad | -4$

$-32 = 32x$

$\boxed{x = -1}$

$\boxed{y = 10}$ $\rightarrow$ $y = -28x + q$

$10 = (-28) \cdot (-1) + q$

$\boxed{q = -18}$

$t: y = -28x - 18$

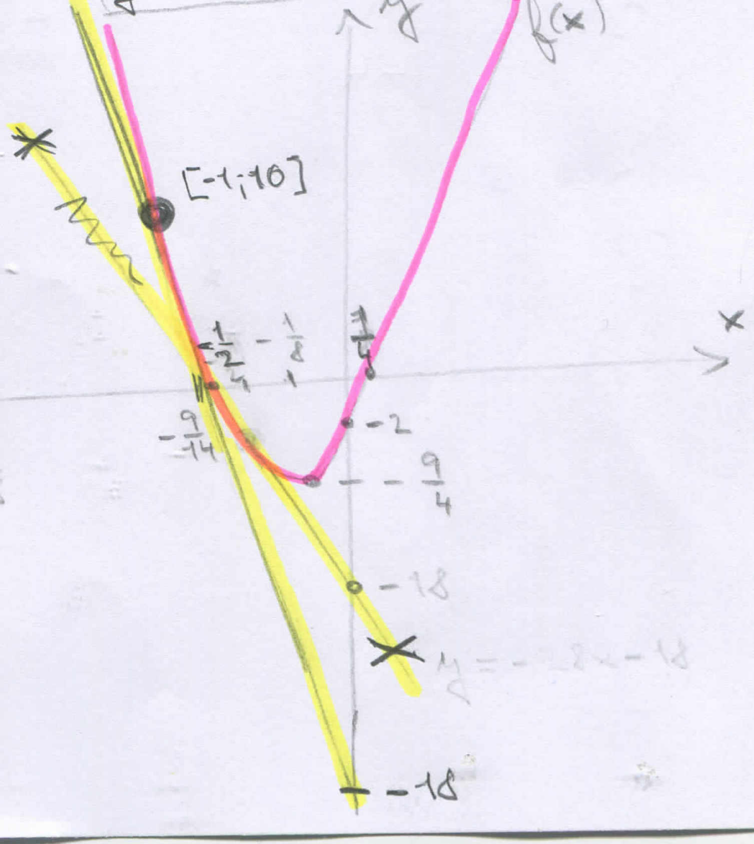
$\boxed{y = -28x - 18}$

$f(x) = 0 \iff 16x^2 + 4x - 2 = 0$

$8x^2 + 2x - 1 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{16} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{cases}$



3. $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

x	0	1	$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$
y	$-$	3	0

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3 - 2}{x^3}$

$f'(x) = 0 \iff 2x^3 - 2 = 0$

$x^3 - 1 = 0$

$\underline{\underline{x = 1}}$

$f' > 0 \quad 0 \quad f' < 0 \quad 1 \quad f' > 0$

$f''(x) = \frac{6}{x^4}$ $\quad \forall x \in D_f : f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je konvexní

$f(x) = 0 \iff 2x + \frac{1}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$

$2x^3 + 1 = 0$

$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$

$\lim_{x \to 0} \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \Rightarrow$ svislá asymptota $x = 0$

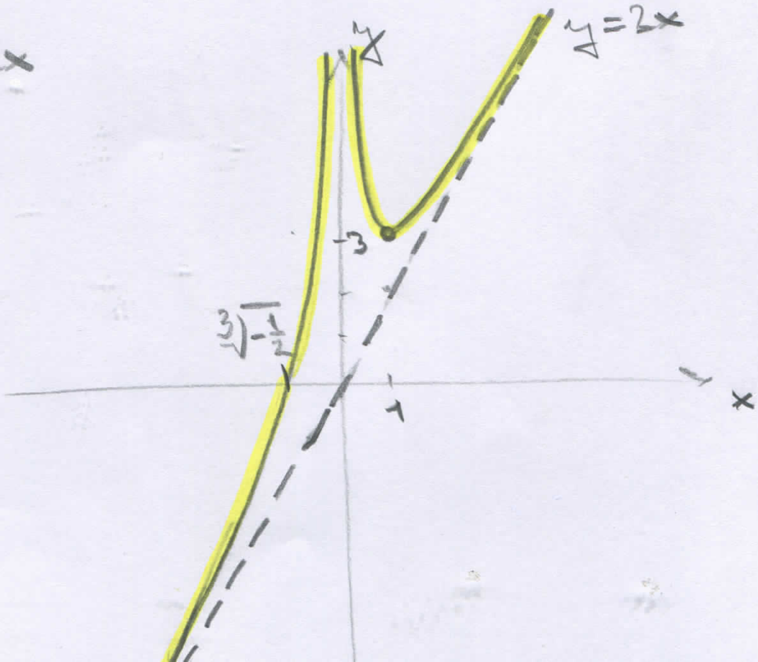
šikmá asymptota: $y = kx + q$

$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 + \frac{1}{x^3}\right) = \underline{\underline{2}}$

$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2x + \frac{1}{x^2} - 2 \cdot x\right) = \underline{\underline{0}}$

šikmá asymptota: $y = 2x$

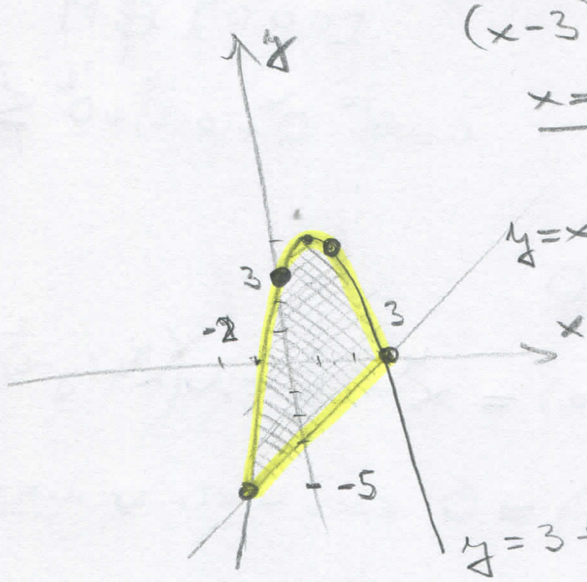
obor hodnot $H_f = \mathbb{R}$



(4.) $M: \; x-3 \le y \le 3+2x-x^2$

průsečíky křivek: $\quad x-3 = 3+2x-x^2$

$$x^2-x-6=0$$
$$(x-3)(x+2)=0$$
$$\underline{x=3} \;\vee\; \underline{x=-2}$$



$$-x^2+2x+3 = -(x^2-2x-3)$$
$$= -(x-3)(x+$$

$$f(x,y) = xy-3x \quad = x(y-3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y-3 \quad = 0 \iff y=3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \quad = 0 \iff x=0$$

Stac. bod: $[0,3]$

I. $g(x) := f(x, x-3) = x\cdot(x-6) = x^2-6x$

$g'(x) = 2x-6 = 0 \iff \underline{x=3}$

II. $g(x) := f(x, 3+2x-x^2) = x\cdot(2x-x^2) = 2x^2-x^3$

$g'(x) = 4x-3x^2 = 0 \iff x\cdot(4-3x)=0$

$\underline{x=0} \vee x=\frac{4}{3}$

$y = 3+\frac{8}{3}-\frac{16}{9}$

$y = \frac{27+24-16}{9} = \frac{35}{9}$

$f(3,0) = -9$ minimum

$f(0,3) = 0$

$f(-2,-5) = 16$ maximum

$f\left(\frac{4}{3}, \frac{35}{9}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{35-27}{9} = \frac{32}{27}$

(5.) $f(x,y,z) = x^4 - 3z^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 = 0 \iff x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -6z = 0 \iff z = 0$$

$\Big\}\Rightarrow$ stacionární bod $[0,0,0] \notin M$

neboť $0^4 + (0-2)^2 + 0^2 \not\leq 1$

$$g(x,y,z) = x^4 + (y-2)^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$L(x,y,z) := f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z) = x^4 - 3z^2 + \lambda\left(x^4 + (y-2)^2 + z^2 - 1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x^3 + 4x^3\lambda = 4x^3(1+\lambda) = 0 \iff \underline{x=0} \vee \underline{\lambda=-1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-2)\lambda = 0 \iff \underline{\lambda=0} \vee \underline{y=2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -6z + 2z\lambda = 2z(-3+\lambda) = 0 \iff \underline{z=0} \vee \underline{\lambda=3}$$

I. $\underline{\lambda = -1}$: $\underline{y=2}$, $\underline{z=0}$, $\underline{x=\pm 1}$

II. $\underline{\lambda = 2}$: $\underline{x=0}$, $\underline{z=0}$, $(y-2)^2 - 1 = 0$

$$(y-2-1)(y-2+1) = 0$$

$$(y-3)(y-1) = 0$$

$$\underline{y=3} \vee \underline{y=1}$$

III. $\underline{\lambda = 3}$: $y=2$, $x=0$, $z=\pm 1$

$f(\pm 1, 2, 0) = 1$ – maxima

$f(0,1,0) = f(0,3,0) = 0$

$f(0,2,\pm 1) = -3$ – minima