Jméno a příjmení (čitelně): ____________________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Kůs Řada

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test LS 2019/20
Test 1, Varianta C

1A. (6 bodů) Pro funkci $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{36-x^2}$ určete (a) její definiční obor, (b) limity ve všech krajních bodech def. oboru (všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte).

1B. (4 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1).$$

2. (10 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 10.$$

Určete body $x_0 \in \mathbb{R}$, v nichž má tečna ke grafu funkce f rovnici tvaru $y = -2x + q$. V každém takovém bodě pak spočtěte hodnotu koeficientu q a napište rovnici příslušné tečny. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou, u tečny určete a vyznačte její průsečíky s osami a bod dotyku s parabolou.

3. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \log_2 \frac{8x - 16}{x - 1},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, obor hodnot, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Jméno a příjmení (čitelně): ____________________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Kůs Řada

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test LS 2019/20
Test 2, Varianta C

4. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 3x + 4y$ na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 \leq 25;\ y \geq x - 4\}.$$

Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

5. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{3}y^3$ na množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9\}.$$

(1A) $f(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{36-x^2}$

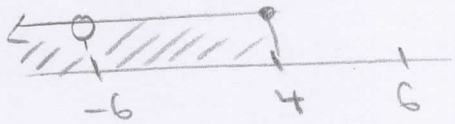
I. $4-x \geq 0 \quad |+x$

$x \leq 4$

II. $36-x^2 \neq 0$

$(6-x)(6+x) \neq 0$

$\underline{x \neq 6} \wedge \underline{x \neq -6}$



$$\boxed{D_f=(-\infty,-6)\cup(-6,4\rangle}$$

$$\lim_{x\to 4_-} f(x)=\frac{\sqrt{0}}{36-4^2}=\underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x\to -6_+} f(x)=\frac{\sqrt{10}}{0_+}=\underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{x\to -6_-} f(x)=\frac{\sqrt{10}}{0_-}=\underline{\underline{-\infty}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)\overset{L.P.}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-x}}}{(-2x)}=\underline{\underline{0}}$$

(1B)

$$\lim_{x\to +\infty} x\cdot\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}}= \text{typ } „\tfrac{0}{0}“$$

$$\overset{L.P.}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(-\frac{2}{x^2}\right)\cdot e^{\frac{2}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty} 2e^{\frac{2}{x}}=2e^0=\underline{\underline{2}}$$

nebo: $$\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)=\lim_{\substack{y\to 0_+ \\ |x=\frac{1}{y}|}}\frac{e^{2y}-1}{y}\underset{„\frac{0}{0}“}{\overset{L.P.}{=}}\lim_{y\to 0_+}\frac{2e^{2y}}{1}=$$

$$=2e^0=\underline{\underline{2}}$$

(2.) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 10$

x	0	2	10	6
y	10	0	0	-8

tečna: $y = -2x + q$

$f'(x) = x - 6 \stackrel{?}{=} -2$

$x = 4$

$f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + 10 = -6$

dotyčný bod: $[4; -6]$

$y = -2x + q$

$-6 = (-2) \cdot 4 + q \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = 2}$

$f(x) = 0 \iff \frac{1}{2}x^2 - 6x + 10 = 0 \quad | \cdot 2$

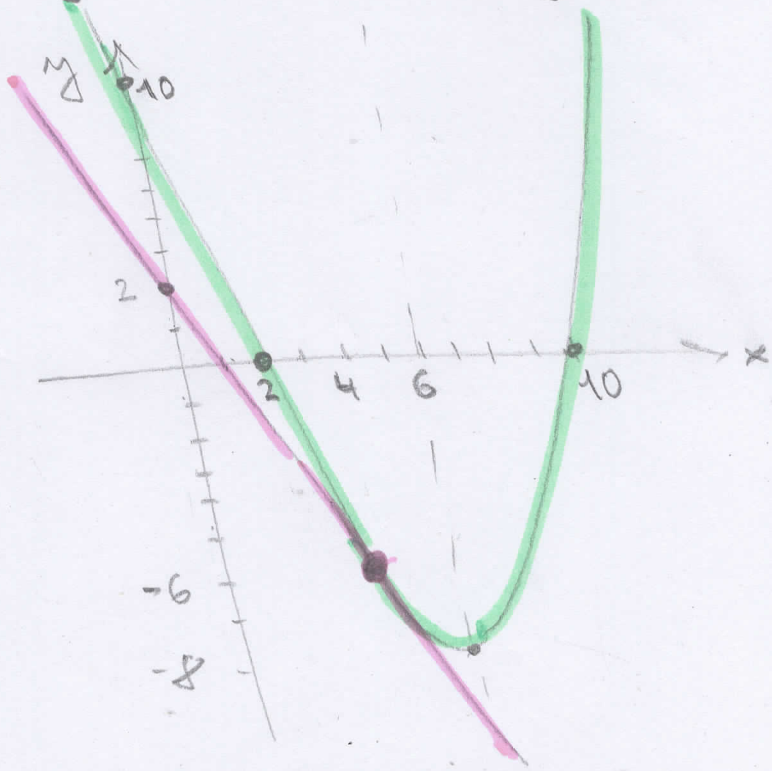
$x^2 - 12x + 20 = 0$

$D = 144 - 80 = 64$

$x_{1,2} = \frac{12 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{matrix} 10 \\ 2 \end{matrix} \right.$

Vrchol paraboly: $\frac{10+2}{2} = 6 \qquad f(6) = \frac{1}{2} \cdot 36 - 36 + 10 = -8$

$[6; -8]$



(3) $f(x) = \log_2 \frac{8x-16}{x-1}$

x	0	$\frac{15}{7}$
$f(x)$	4	0

• DEF. OBOR: $\frac{8x-16}{x-1} > 0 \implies \boxed{D_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)}$

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$8x-16$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$-\infty \quad \oplus \quad 1 \quad - \quad 2 \quad \oplus \quad \infty$

$\implies f$ není sudá ani lichá

$f(-x) \neq f(x)$

$f(-x) \neq -f(x)$

• PRŮSEČÍKY S OSAMI:

$\underline{x=0}$: $f(0) = \log_2 16 = 4$

$\underline{y=0}$: $f(x) = 0 \iff 0 = \log_2 \frac{8x-16}{x-1}$

$1 = \frac{8x-16}{x-1} \quad / \cdot (x-1)$

$x - 1 = 8x - 16$

$15 = 7x$

$x = \frac{15}{7}$

• LIMITY: $\lim_{x \to \pm\infty} \log_2\left(\frac{8x-16}{x-1}\right) = \log_2\left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{8x-16}{x-1}\right) \overset{L.P.}{=} \log_2\left(\lim \frac{8}{1}\right)$

$= \log_2 8 = \underline{\underline{3}} \implies$ přímka $y=3$ je vodorovná asymptota

$\lim_{x \to 1_-} f(x) = \log_2\left(\frac{-8}{0_-}\right) = \log_2 \frac{8}{0_+} = \log_2(+\infty) = \underline{\underline{+\infty}}$

$\lim_{x \to 2_+} f(x) = \log_2\left(\frac{0_+}{1}\right) = \underline{\underline{-\infty}}$

svislé asymptoty: $\underline{x=1}$, $\underline{x=2}$

• 1. DERIVACE $f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\frac{8x-16}{x-1}} \cdot \left(\frac{8x-16}{x-1}\right)' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{8x-16} \cdot \frac{8(x-1)-(8x-16)}{(x-1)^{\cancel{2}}}$

$= \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{8x - 8 - 8x + 16}{(8x-16)(x-1)} = \frac{\cancel{8}}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\cancel{8} \cdot (x-2)(x-1)}$

$\forall x \in D_f : f'(x) \neq 0 \implies$ Funkce f nemá stacionární bod

$\forall x \in (2, \infty) : f'(x) > 0 \implies f$ roste

$\forall x \in (-\infty, 1) : f'(x) > 0 \implies f$ roste

$f' > 0 \quad 1 \quad 2 \quad f' > 0$

• 2. DERIVACE: $f''(x) = \left(\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{(x-2)(x-1)}\right)' = \frac{1}{\ln 2}\cdot\left((x^2-3x+2)^{-1}\right)'$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot(-1)\cdot(x^2-3x+2)^{-2}\cdot(2x-3) = -\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$$

$f''(x)=0 \iff 2x-3=0$

$x=\frac{3}{2} \notin D_f$

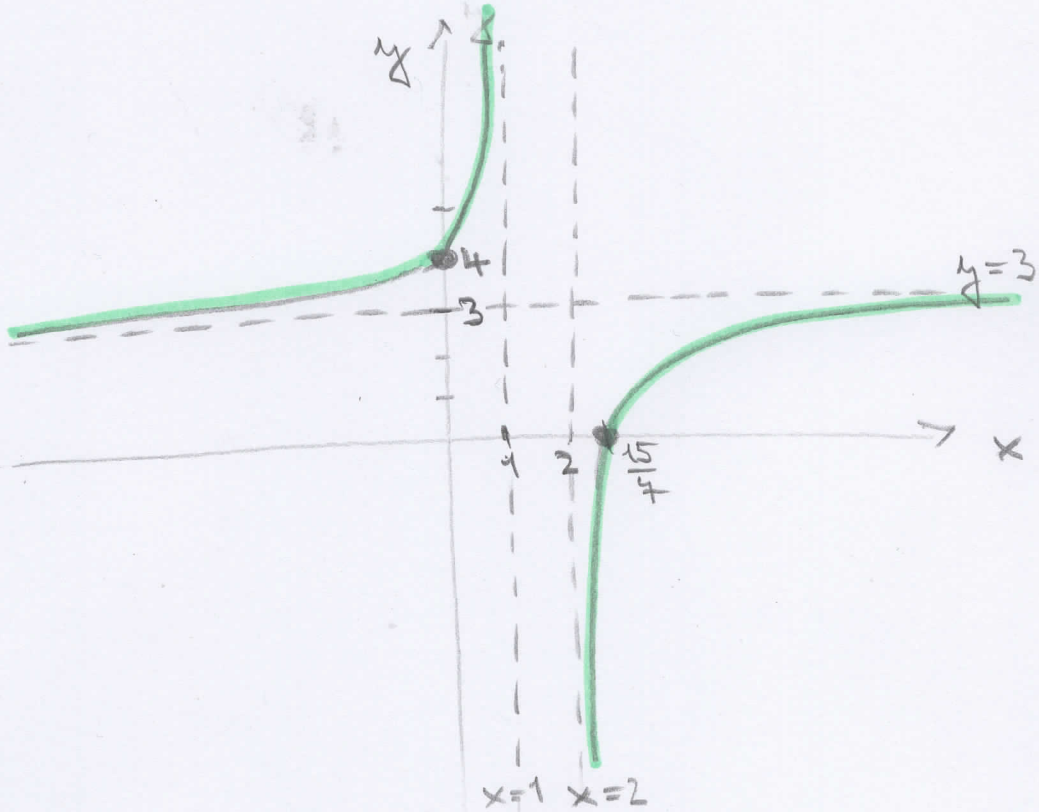
$\cup$ $\cap$

$f''>0$ $\quad 1 \quad 2 \quad$ $f''<0$ $\quad\Rightarrow$ f nemá inflexní bod

$\forall x\in(2,\infty)$: $f''(x)<0 \Rightarrow f$ je konkávní

$\forall x\in(-\infty,1)$: $f''(x)>0 \Rightarrow f$ je konvexní

• GRAF:



• OBOR HODNOT: $H_f = (-\infty,3)\cup(3,\infty)$

(4.) $f(x,y) = 3x + 4y$

$M:\ (x+1)^2 + y^2 \leq 25$ ... kruh se středem v bodě $[-1;0]$ a poloměrem 5

$y \geq x-4$ ... oblast nad přímkou $y = x-4$

průsečíky kružnice a přímky: $y = x-4$ ↘ dosazením

$$(x+1)^2 + y^2 = 25$$

$$(x+1)^2 + (x-4)^2 = 25$$

$$x^2+2x+1+x^2-8x+16 = 25$$

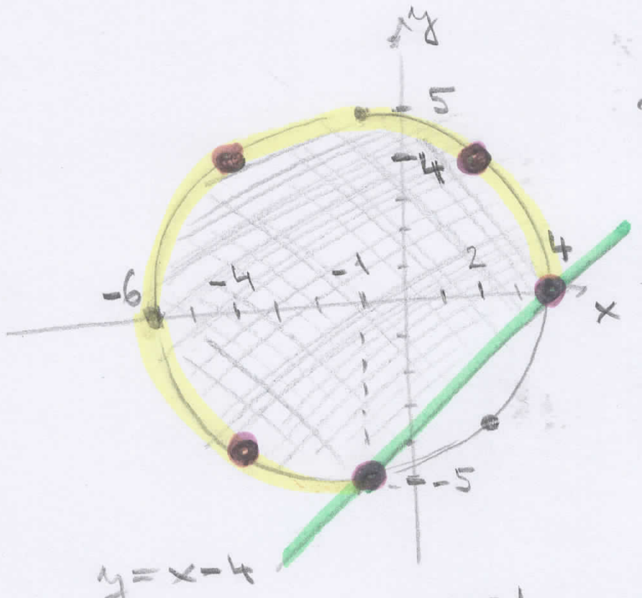
$$2x^2 - 6x - 8 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$\underline{x=4} \ \vee \ \underline{x=-1}$$

$$\underline{y=0} \qquad \underline{y=-5}$$



I. Vnitřek množiny M: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4 \neq 0$ $\Rightarrow$ f nemá stacionární body uvnitř M

II. Hranice množiny M: 1) úsečka $y = x-4$, $x \in \langle -1, 4 \rangle$

$$g(x) := f(x, x-4) = 3x + 4(x-4) = 7x - 16$$

$$g'(x) = 7 \neq 0 \Rightarrow g \text{ nemá stac. bod}$$

2) kružnice $g(x,y) = (x+1)^2 + y^2 - 25 = 0$

Metoda Jakobiánu: $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2(x+1) & 2y \end{vmatrix} = 6y - 8(x+1) \overset{!}{=} 0$

$$\boxed{y = \frac{4}{3}(x+1)}$$

dosazením $y = \frac{4}{3}(x+1)$ do $g(x,y) = 0$:

$$(x+1)^2 + \frac{16}{9}(x+1)^2 = 25$$

$$(x+1)^2 \cdot \left(1 + \frac{16}{9}\right) = 25$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 \cdot \frac{25}{9} = 25 \quad | \cdot \frac{9}{25}$$

$$(x+1)^2 = 9$$

$(x+1)^2 = 9$

$x^2+2x+1-9=0$

$x^2+2x-8=0$

$(x-2)(x+4)=0$

$\underline{x=2} \vee \underline{x=-4}$

I. $\underline{x=2}$: $(2+1)^2+y^2=25$

$y^2=16$

$\underline{y=\pm 4}$

II. $\underline{x=-4}$: $(-4+1)^2+y^2=25$

$\underline{y=\pm 4}$

$[2,4] \in M$

$[2,-4] \notin M$

Kandidáti: $[4;0]$, $[-1;-5]$, $[2;4]$, $[-4;4]$, $[-4,-4]$

$f(x,y)=3x+4y$

$f(4,0)=12$

$f(-1,-5)=-23$

$f(2,4)=22$ ... vázané maximum

$f(-4,4)=4$

$f(-4,-4)=-28$ ... vázané minimum

f je spojitá funkce, $M \subset \mathbb{R}^2$ omezená uzavřená množina

$\Rightarrow$ f nabývá na M absolutních extrémů

5. $f(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{3}y^3$

$M: g(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 9 = 0$

LAGRANGEOVA FUNKCE:

$L(x,y,z) := f(x,y,z) + \lambda \cdot g(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{3}y^3 + \lambda\left(x^2+y^2+(z-1)^2-9\right)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \iff 2x\cdot(1+\lambda) = 0$

$\underline{x=0} \vee \underline{\lambda=-1}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = y^2 + 2\lambda y = 0 \iff y\cdot(y+2\lambda) = 0$

$\underline{y=0} \vee \underline{\lambda = -\frac{y}{2}}$

$\frac{\partial L}{\partial z} = \lambda \cdot 2(z-1) = 0 \iff \underline{z=1} \vee \underline{\lambda=0}$

I. $\underline{\lambda=-1}$: $\underline{z=1}$, $y^2 - 2y = 0$

$y(y-2) = 0$

$\underline{y=0} \vee \underline{y=2}$ ⊃ dosazením do $g(x,y,z)=0$

$\underline{x=\pm 3}$ $\underline{x=\pm\sqrt{5}}$

II. $\underline{\lambda = -\frac{y}{2}}$: $\underline{z=1} \vee y=0$

$\cancel{x=0} \vee \underline{y=2}$ $\quad x=0$

$\underline{y=\pm 3}$ $\underline{x=\pm\sqrt{5}}$ $\quad (z-1)^2 - 9 = 0$

$(z-1-3)(z-1+3) = 0$

$(z-4)(z+2) = 0$

$\underline{z=4} \vee \underline{z=-2}$

III. $\underline{\lambda=0}$: $y=0$, $x=0$ $\quad z=4 \vee z=-2$

$f(\pm 3, 0, 1) = 9$

$f(\pm\sqrt{5}, 2, 1) = \frac{23}{3}$

$f(0, \pm 3, 1) = \pm 9$

$f(0,0,-2) = 0$

$f(0,0,4) = 0$

minimum: $[0,-3,1]$

maxima: $[\pm 3, 0, 1]$

$[0,3,1]$