Jméno a příjmení (čitelně): ______________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Kůs Řada

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test LS 2019/20
Test 1, Varianta D

1A. (6 bodů) Pro funkci $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1}$ určete (a) její definiční obor, (b) limity ve všech krajních bodech def. oboru (všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte).

1B. (4 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty}(3x-6)\ln\frac{x-1}{x-2}.$$

2. (10 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce

$$f(x) = -x^2 - 4x + 5.$$

Určete rovnici tečny ke grafu funkce v bodě $x_0 = -1$. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou, u tečny určete a vyznačte její průsečíky s osami a bod dotyku s parabolou.

3. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{e^{1-2x}}{x-1},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, obor hodnot, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.
Pomůcka: $e \doteq 2,72$.

Jméno a příjmení (čitelně): ____________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Kůs Řada

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test LS 2019/20
Test 2, Varianta D

4. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4\}.$$

Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

5. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x^2z - y^2$ na množině

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

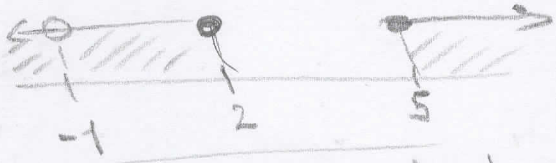
Pomůcka: $\frac{16}{3\sqrt{3}} \doteq 3,08.$

1A $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-7x+10}}{x+1}$

I. $x^2-7x+10 \geq 0$

$(x-2)(x-5) \geq 0$

	$-\infty$	2		5	∞
$x-2$	$-$		$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$+$
	$+$		$-$		$+$



II. $x+1 \neq 0$

$x \neq -1$

$$\boxed{D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,2\rangle \cup \langle 5,\infty)}$$

$$\lim_{x\to -1_+} f(x) = \frac{\sqrt{18}}{0_+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1_-} f(x) = \frac{\sqrt{18}}{0_-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2_-} f(x) = \frac{\sqrt{0}}{3} = 0$$

$$\lim_{x\to 5_+} f(x) = \frac{\sqrt{0}}{6} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}}{\underset{+1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1-0+0}}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}}{\underset{(-1)}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -\frac{\sqrt{1-0+0}}{1+0} = -1$$

(1B) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-6)\ln\frac{x-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{x-1}{x-2}}{\frac{1}{3x-6}} =$

$\overset{L.P.}{=}$ typ „$\frac{0}{0}$" $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\frac{x-1}{x-2}}\cdot\frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2}}{-\frac{1}{(3x+6)^2}\cdot 3} =$

$= \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-1)(3x+6)^2}{(x-1)(x-2)}$

$= \left(+\frac{1}{3}\right)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\cdot\left(3+\frac{6}{x}\right)^2}{\cancel{x^2}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3+0)^2}{(1-0)(1+0)} = \frac{9}{3} = \underline{\underline{3}}$

2. $f(x) = -x^2-4x+5 = (-1)(x^2+4x-5) = (-1)(x-1)(x+5)$

x	1	-5	0	-2
$f(x)$	0	0	5	9

průsečíky s osami: $P_{x_1} = [1;0]$
$P_{x_2} = [-5;0]$
$P_y = [0;5]$

VRCHOL: $[-2;9]$
TEČNÝ BOD: $[-1;8]$

vrchol: $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1+(-5)}{2} = -2$

$f(-2) = 9$

TEČNA

$f'(x) = -2x-4$

$f'(-1) = -2 = k$

$f(-1) = 8$

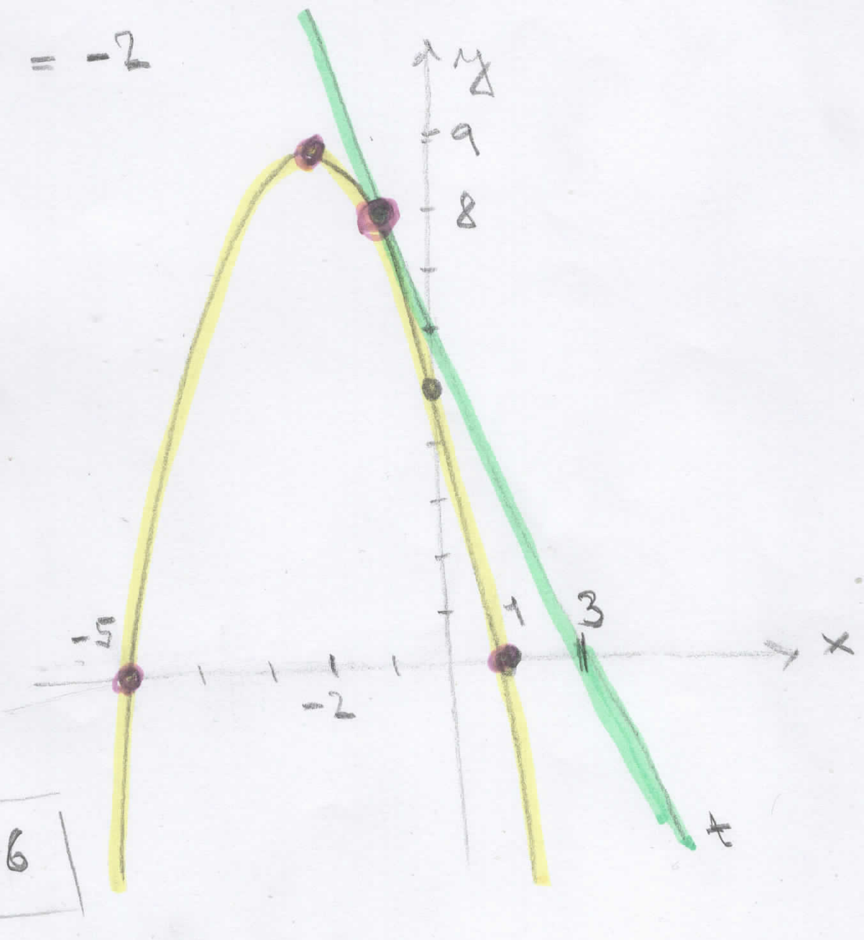
$t: y = kx+q$

$y = (-2)x+q$

$8 = (-2)\cdot(-1)+q$

$q = 6$

ROVNICE TEČNY: $\boxed{y=-2x+6}$



3. $f(x) = \dfrac{e^{1-2x}}{x-1}$

x	1	$\frac{1}{2}$	0
$f(x)$	N.D.	-2	$-e$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to 1_+} f(x) = \frac{e^{-1}}{0_+} = \underline{\underline{+\infty}} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty}}{\infty} = \frac{0}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to 1_-} f(x) = \frac{e^{-1}}{0_-} = \underline{\underline{-\infty}} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{(-2)e^{1-2x}}{1} = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$f'(x) = \frac{(-2)e^{1-2x}(x-1) - e^{1-2x}}{(x-1)^2} = e^{1-2x} \cdot \frac{-2x+2-1}{(x-1)^2} = e^{1-2x} \cdot \frac{(-2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff -2x+1 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

$f'>0 \quad \frac{1}{2} \quad f'<0 \quad 1 \quad f'<0$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{e^0}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2$$

$$f''(x) = -2e^{1-2x} \cdot \frac{(-2x+1)}{(x-1)^2} + e^{1-2x} \cdot \frac{(-2)(x-1)^2 - (-2x+1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= e^{1-2x} \cdot \left(\frac{4x-2}{(x-1)^2} + \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (-2x+2+4x-2)}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} \right)$$

$$= e^{1-2x} \cdot \frac{(4x-2)(x-1) + 2x}{(x-1)^3} = e^{1-2x} \cdot \frac{4x^2-4x+2}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \iff 4x^2 - 4x + 2 = 0$$
$$D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 2 < 0$$
$$\Rightarrow f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f \text{ nemá inflexní bod}$$

$\underline{\forall x \in (1, \infty)}: f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je konvexní

$\underline{\forall x \in (-\infty, 1)}: f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je konkávní

$f''<0 \quad 1 \quad f''>0$

$\forall x \in (1, \infty): f(x) > 0$

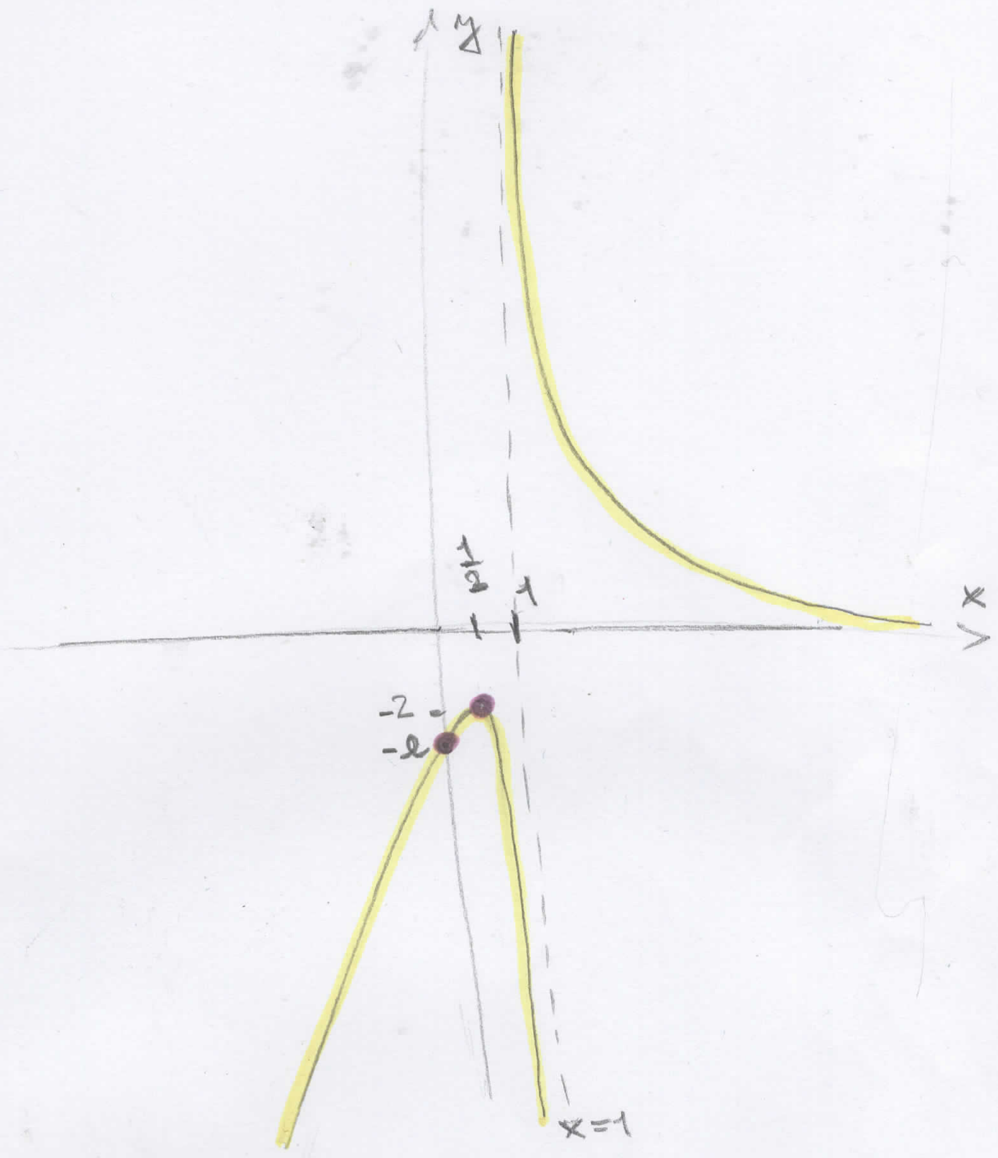
$\forall x \in (-\infty, 1): f(x) < 0$

asymptoty: vodorovná v $+\infty$: $y = 0$

svislá: $x = 1$

Obor hodnot: $H_f = (-\infty, -2\rangle \cup (0, \infty)$

lok. maximum: $[\frac{1}{2}; -2]$



$$f(2) = \frac{e^{-3}}{1} \qquad f(-2) = \frac{e^{5}}{(-3)}$$

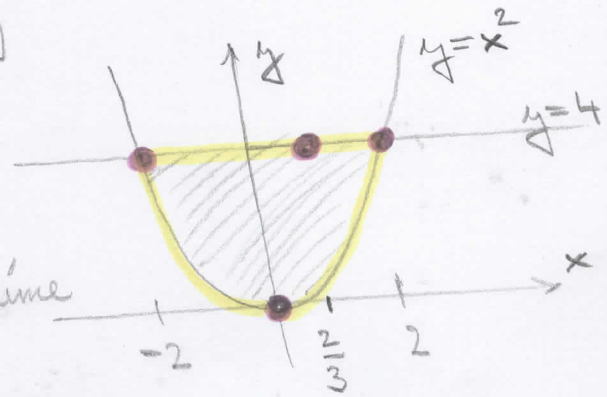
$\Rightarrow f(2) \neq f(-2) \Rightarrow f$ není sudá

$-f(2) \neq f(-2) \Rightarrow f$ není lichá

4.

$$f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \leq y \leq 4\}$$



1) Vnitřek množiny M

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 8x - 2y = 0 \quad \text{dosadíme}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x = 0 \iff \boxed{y = x}$$

$$6x^2 + 8x - 2x = 0$$
$$6x^2 + 6x = 0 \quad |:6$$
$$x^2 + x = 0$$
$$x(x+1) = 0$$
$$\underline{x=0}, \ \underline{y=0} \ \vee \ \underline{x=-1}, \ \underline{y=-1}$$

$[0,0] \in M$

$[-1,-1] \notin M$

2) Hranice množiny M

I. $y=4,\ x \in \langle -2, 2 \rangle$: $g(x) := f(x,4) = 2x^3 + 4x^2 + 16 - 8x$

$$g'(x) = 6x^2 + 8x - 8 = 0 \quad |:2$$
$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$
$$D = 16 + 4\cdot 4\cdot 3 = 64$$
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{6} = \left\langle \begin{matrix} -2 \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \right.$$

$\searrow \quad \nearrow$

$-2 \quad g'<0 \quad \frac{2}{3} \quad g'>0$

II. $y = x^2,\ x \in \langle -2, 2 \rangle$: $g(x) := f(x, x^2) = \cancel{2x^3} + 4x^2 + x^4 \cancel{- 2x^3}$

$$g'(x) = 8x + 4x^3 = 0$$
$$4x(2 + x^2) = 0$$
$$\underline{x=0}, \ \underline{y=0} \ \vee \ 2 + x^2 = 0, \ x \notin \mathbb{R}$$

Kandidáti: $[0,0], [2,4], [-2,4], [\frac{2}{3}, 4]$

$f(0,0) = 0$ min

$f(2,4) = 16 + 16 + 16 - 16 = 32$ max

$f(-2,4) = -16 + 16 + 16 + 16 = 32$ max

$$f\left(\tfrac{2}{3}, 4\right) = \frac{16}{27} + \frac{16}{9} + 16 - \frac{16}{3} = 16 \cdot \frac{1+3+27-9}{27} = 16 \cdot \frac{22}{27} = \frac{352}{27}$$

5. $f(x,y,z) = 2x^2 z - y^2$

$g(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda \cdot g(x,y,z) = 2x^2 z - y^2 + \lambda(2x^2 + y^2 + z^2 - 4)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 4xz + 4\lambda x = 0 \iff 4x(z+\lambda) = 0$

$\underline{x=0} \vee \underline{\lambda = -z}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + 2\lambda y = 0 \iff 2y(-1+\lambda) = 0$

$y=0 \vee \underline{\lambda = 1}$

$\frac{\partial L}{\partial z} = 2x^2 + 2\lambda z = 0 \implies \underline{\lambda = -\frac{x^2}{z}}$

I. $\underline{\lambda = -z}$: dosazením do $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$: $\underline{z=-1}$ $\vee$ $y=0$

$3x^2 - 4 = 0$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$z = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

do $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$: $\boxed{z = \pm x}$

$\underline{x=1} \vee \underline{x=-1}$

$\underline{y=\pm 1}$ $\quad$ $\underline{y = \pm 1}$

II. $\underline{\lambda = 1}$: do $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$: $\underline{z=-1}$ $\vee$ $x=0$ spor s $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$

do $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$: $\underline{x = \pm 1}$ $\quad$ $\underline{y = \pm 1}$

III. $\underline{\lambda = -\frac{x^2}{z}}$: do $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$: $\underline{y=0}$ $\vee$ $-1 - \frac{x^2}{z} = 0$

$\underline{x=0} \vee z - \frac{x^2}{z} = 0$ $\quad$ $-z = x^2 \vee z = \pm x$

$z = \pm x$ $\quad$ $x = \pm 1$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\boxed{\begin{matrix} x=0 \\ z=0 \\ y=\pm 2 \end{matrix}}$

seznam kandidátů: $[1, \pm 1, -1]$, $[-1, \pm 1, -1]$, $[\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}]$,

$[\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{3}}]$, $[0, 0, \pm 2]$, $[0, \pm 2, 0]$

$$f(1, \pm 1, -1) = -2 - 1 = -3$$

$$f(-1, \pm 1, -1) = -2 - 1 = -3$$

$$f(0, 0, \pm 2) = 0$$

$$f(0, \pm 2, 0) = -4 \quad \text{minimum}$$

$$f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}} \doteq 3{,}08 \quad \text{maximum}$$

$$f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{16}{3\sqrt{3}} \doteq -3{,}08$$