Jméno a příjmení (čitelně): ____

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka   Kryštof   Kůs   Řada

9:15   11:00   12:45   14:30   16:15   18:00

Závěrečný test LS 2019/20
Test 1, Varianta E

1A. (6 bodů) Pro funkci $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ určete (a) její definiční obor, (b) limity ve všech krajních bodech def. oboru (všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte).

1B. (4 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{-2n} + 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{9}{6}\right)^{n} - \left(\frac{11}{10}\right)^{2n-1}}.$$

2. (10 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6.$$

Určete rovnici tečny ke grafu funkce v bodě $x_0 = 1$. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou, u tečny určete a vyznačte její průsečíky s osami a bod dotyku s parabolou.

3. (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt{x}(x-5)^2,$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, obor hodnot, intervaly monotonie, asymptoty.

Spočtěte druhou derivaci a rozhodněte zda hodnoty $x = 1$ resp. $x = 3$ leží v intervalu konvexity nebo konkavity. (Neurčujte inflexní body.)

Nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Jméno a příjmení (čitelně): ________________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Kůs Řada

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test LS 2019/20
Test 2, Varianta E

4. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x + y$ na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 9 \leq y \leq -x^2 - 2x + 15\}.$$

Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

5. (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y,z) = xy - 2z$ na množině

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 20,\ x + y + z = 0\}.$$

Pomůcka: $4\sqrt{10} \doteq 12,65$.

1A $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2+1 > 0$ $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

$x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\ln(x^2+1)}{x} \underset{\downarrow \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{L.P.}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \frac{\frac{2\cdot 0}{0^2+1}}{1} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} \underset{\downarrow \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\overset{L.P.}{=}} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} \underset{\downarrow \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\overset{L.P.}{=}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{2x} = \underline{\underline{0}}$$

1B
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{-2n} + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{9}{6}\right)^{n} - \left(\frac{11}{10}\right)^{2n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^{2n} + \cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n} - \left(\frac{11}{10}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^{2n}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{36}{25}\right)^{n} + 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n} - \frac{10}{11}\cdot\left(\frac{121}{100}\right)^{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{\left(\frac{3}{2}\right)^{n}}\cdot\left(\left(\frac{36}{25}\cdot\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\right)}{\cancel{\left(\frac{3}{2}\right)^{n}}\cdot\left(1 - \frac{10}{11}\cdot\left(\frac{121}{100}\cdot\frac{2}{3}\right)^{n}\right)}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{150}{100} > \frac{121}{100}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{75}{50} > \frac{72}{50} = \frac{36}{25}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{72}{75}\right)^{n} + 3}{1 - \left(\frac{121}{150}\right)^{n}} = \frac{0+3}{1-0} = \underline{\underline{3}}$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} q^n = 0 \text{ pro } q \in (0,1)}$$

2.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

$f'(x) = x - 4$

$f'(x) = 0 \iff x = 4$

$f' < 0 \quad 4 \quad f' > 0$

$f'(1) = -3 = k \; , \; f(1) = \frac{1}{2} - 4 + 6 = \frac{5}{2}$

TEČNÝ BOD: $\boxed{[1; \frac{5}{2}]}$

TEČNA: $y = -3x + q$

$\frac{5}{2} = -3 \cdot 1 + q \implies q = \frac{11}{2}$

$$\boxed{y = -3x + \frac{11}{2}}$$

VRCHOL PARABOLY: $f(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 16 + 6 = -2$

$[4; -2]$

PRŮSEČÍKY S OSAMI: $f(0) = 6 \implies P_y = [0; 6]$

$y = 0 \iff \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0 \quad | \cdot 2$

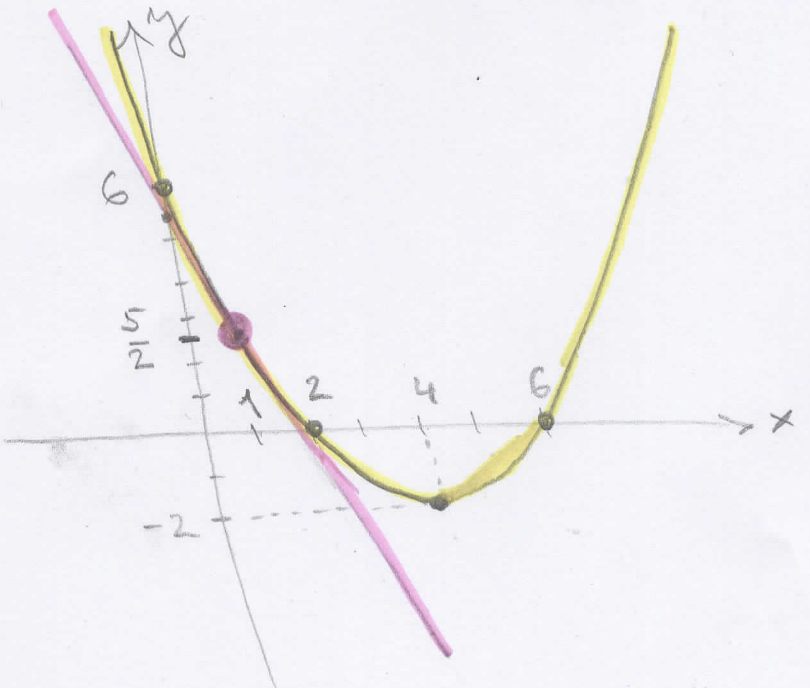
$x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-6)(x-2) = 0$

$\underline{x = 6} \lor \underline{x = 2}$

$P_{x_1} = [6; 0]$

$P_{x_2} = [2; 0]$



(3.) $f(x) = \sqrt{x}\,(x-5)^2$

x	0	5	1
y	0	0	16

$D_f = \langle 0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x-5)^2 + \sqrt{x} \cdot 2(x-5) = \frac{(x-5)^2 + 4x(x-5)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \iff (x-5)^2 + 4x(x-5) = 0$$
$$(x-5)(x-5+4x) = 0$$
$$(x-5)(5x-5) = 0$$
$$\underline{x=5} \lor \underline{x=1}$$

$$f'(x) = \frac{5(x-5)(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

0 $\quad$ 1 $\quad$ 5

$\underline{f'>0}$ $\quad$ $f'<0$ $\quad$ $f'>0$

$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$

$-\infty$ 0 $+$ 1 $-$ 5 $+$ ∞

$\underline{\forall x \in (0,1) \cup (5,\infty) : f'(x) > 0}$

$\Rightarrow$ Funkce roste

$\forall x \in \underline{(1,5)} : \underline{f'(x) < 0}$

$\Rightarrow$ Funkce klesá

lok. maximum: $[1;16]$

lok. minimum: $[0,0]$

$[5;0]$

$$f''(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{5}{2}\,\frac{(2x-6)\sqrt{x} - (x^2-6x+5)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{2x(2x-6) - (x^2-6x+5)}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{5}{4x^{\frac{5}{2}}} \cdot \Big(\underbrace{4x^2 - 12x - x^2 + 6x - 5}_{3x^2-6x-5}\Big)$$

$f''(1) = \frac{5}{4} \cdot (-8) < 0 \Rightarrow f$ je $\underline{\text{konkávní}}$

$f''(3) = \frac{5}{4} \cdot (27-18-5) = 5 > 0 \Rightarrow f$ je $\underline{\text{konvexní}}$

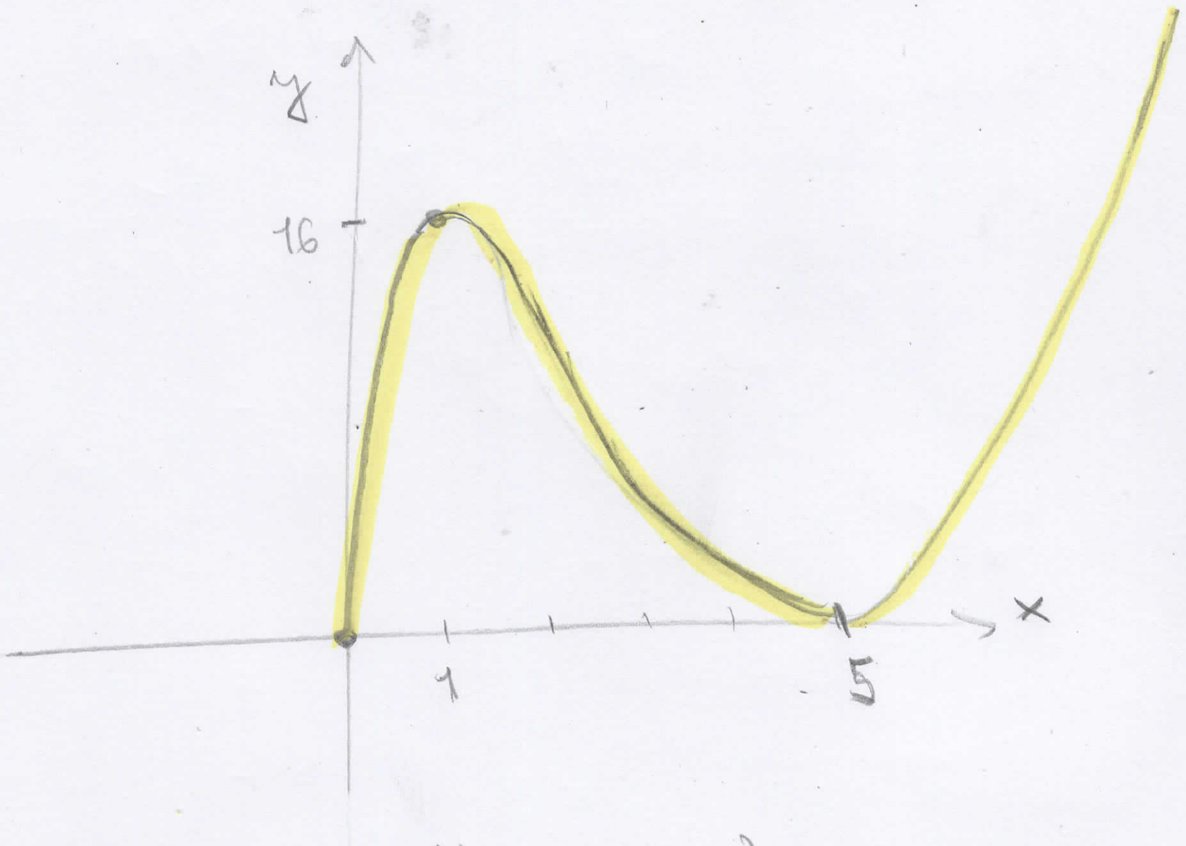
$$\lim_{x \to 0_+} \sqrt{x}(x-5)^2 = \sqrt{0} \cdot 25 = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(x-5)^2 = \underline{\underline{+\infty}}$$ $\Rightarrow$ nemá vodorovnou asymptotu

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} \cdot \frac{x^2 - 10x + 25}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x} \cdot \left(x - 10 + \frac{25}{x}\right)\right)$$
$$= \infty \cdot (\infty - 10 + 0)$$
$$= +\infty$$

$\Rightarrow$ nemá šikmou asymptotu

není sudá ani lichá, např. proto, že $f(1) = 16$ a $f(-1) \notin \mathbb{R}$ neboť $-1 \notin D_f$

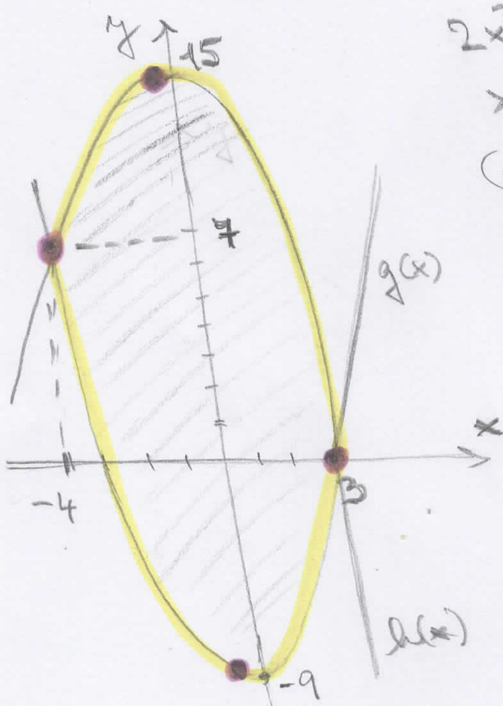


Obor hodnot $H_f = \langle 0, \infty)$

(4.) $f(x,y) = x + y$

$M: \underbrace{x^2 - 9}_{g(x)} \leq y \leq \underbrace{-x^2 - 2x + 15}_{h(x)}$

průsečíky křivek: $x^2 - 9 = -x^2 - 2x + 15$



$2x^2 + 2x - 24 = 0 \quad | : 2$

$x^2 + x - 12 = 0$

$(x+4)(x-3) = 0$

$\underline{x = -4} \lor \underline{x = 3}$

$y = 7 \qquad y = 0$

1) Volné extrémy

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \neq 0 \end{array}\right\}$ f nemá volné extrémy

2) Vázané extrémy: I. $k(x) := f(x, x^2 - 9) = x^2 - 9 + x$

$k'(x) = 2x + 1 = 0 \iff \boxed{x = -\frac{1}{2}}$

$y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 9 = -\frac{35}{4}$

II. $k(x) := f(x, -x^2 - 2x + 15) = x - x^2 - 2x + 15 = -x^2 - x + 15$

$k'(x) = -2x - 1 = 0 \iff \boxed{x = -\frac{1}{2}} \quad y = -\frac{1}{4} + 1 + 15 = \frac{63}{4}$

kandidáti: $[3;0]$, $[-4;7]$, $[-\frac{1}{2}; -\frac{35}{4}]$, $[-\frac{1}{2}; \frac{63}{4}]$

$f(3,0) = 3$

$f(-4,7) = 3$

$f(-\frac{1}{2}, -\frac{35}{4}) = \frac{-37}{4}$ minimum

$f(-\frac{1}{2}, \frac{63}{4}) = \frac{61}{4}$ maximum

(5.) $f(x,y,z) = xy - 2z$

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 20}_{g_1(x,y,z)} = 0$$

$$\underbrace{x + y + z}_{g_2(x,y,z)} = 0$$

Jakobián: $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & -2 \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 2y^2 - 4x\cdot 0 + 1\cdot x\cdot 0 - (-4y + 0\cdot 1\cdot y + 1\cdot 2x^2)$$

$$= 2y^2 + 4y - 2x^2 - 4x = 0 \quad |:2$$

SARRUSOVO PRAVIDLO

$$y^2 + 2y - x^2 - 2x = 0$$

$$y^2 + 2y = x^2 + 2x \quad |+1$$

$$y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2x + 1$$

$$(y+1)^2 = (x+1)^2$$

$$(y+1)^2 - (x+1)^2 = 0$$

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$$(y+1-(x+1))(y+1+(x+1)) = 0$$

$$(y-x)(y+x+2) = 0$$

dosazením do $x^2 + y^2 = 20$: $\quad y = x \quad \vee \quad y = -x-2$

$x^2 + x^2 = 20$

$2x^2 = 20$

$x^2 = 10$

$x = \pm\sqrt{10}$

$x^2 + (-x-2)^2 = 20$

$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 20$

$2x^2 + 4x - 16 = 0 \quad |:2$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x-2)(x+4) = 0$

$x = 2 \vee x = -4$

I. $x = \pm\sqrt{10}$, $y = \pm\sqrt{10}$: $z = \mp 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ kandidáti: $[\sqrt{10}, \sqrt{10}, -2\sqrt{10}]$

$[-\sqrt{10}, -\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$

II. $y = -x - 2$: $x = 2 \lor x = -4$

$y = -4 \qquad y = 2$

$z = 2 \qquad z = 2$

dosazením do $x + y + z = 0$

kandidáti: $[2; -4; 2]$

$[-4; 2; 2]$

$f(\sqrt{10}, \sqrt{10}, -2\sqrt{10}) = 10 + 4\sqrt{10}$ maximum

$f(-\sqrt{10}, -\sqrt{10}, 2\sqrt{10}) = 10 - 4\sqrt{10}$

$$\left.\begin{aligned} f(2,-4,2) &= -8-4 = -12 \\ f(-4,2,2) &= -8-4 = -12 \end{aligned}\right\} \text{minima}$$