Jméno a příjmení (čitelně): ______________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Kůs Řada

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

**Závěrečný test LS 2019/20**
**Test 1, Varianta F**

**1A.** (6 bodů) Pro funkci $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} - x$ určete (a) její definiční obor, (b) limity ve všech krajních bodech def. oboru (všechny kroky výpočtu podrobně zdůvodněte).

**1B.** (4 body) Spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 6x}{1 - e^{2x}}.$$

**2.** (10 bodů) Nechť $f(x) = -x^2 + bx + c$. Určete hodnoty koeficientů $b, c$ tak, aby funkce $f$ měla v bodě $x_0 = 4$ tečnu $y = -3x + 30$. Pro tyto spočtené hodnoty $b, c$ nakreslete příslušnou parabolu včetně průsečíků s osami, vrcholu paraboly a zadané tečny.

**3.** (20 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1 - 2x^3}{x^2},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je $f$ kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech $D_f$, derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, obor hodnot, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.
Pomůcka: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \doteq 0,79$.

Jméno a příjmení (čitelně): ____________________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Kůs Řada

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

**Závěrečný test LS 2019/20**
**Test 2, Varianta F**

**4.** (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + xy - y^2 - 8x + y$ na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 9;\ y \leq x\}.$$

Množinu $M$ nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

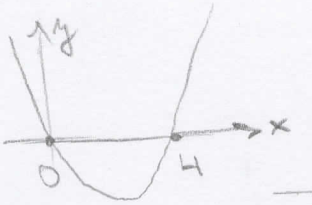
**5.** (20 bodů) Určete globální extrémy funkce $f(x,y,z) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2$ s vazbami

$$x + y = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$

1A $f(x)=\sqrt{x^2-4x}-x$

$D_f$: $x^2-4x\geq 0$

$x(x-4)\geq 0$




$x\in(-\infty,0\rangle\cup\langle 4,\infty)$

$\boxed{D_f=(-\infty,0\rangle\cup\langle 4,\infty)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-4x)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1\right)}$$

$$A-B=\frac{A^2-B^2}{A+B}$$

$$=\frac{(-4)}{\sqrt{1-0}+1}=\underline{\underline{-2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-4x)^{(-1)}}{\cancel{|x|}\cdot\left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}}-1\right)}=\frac{4}{0_+}=\underline{\underline{+\infty}}$$

$\frac{x}{|x|}=-1$ pro $x<0$

$$\lim_{x\to0_-}f(x)=f(0)=\sqrt{0}-0=\underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x\to4_+}f(x)=f(4)=\sqrt{16-16}-4=\underline{\underline{-4}}$$

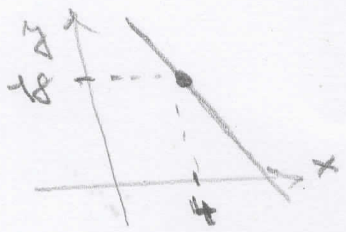
1B $$\lim_{x\to0}\frac{x^3+6x}{1-e^{2x}}\overset{\text{L.P.}}{\underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}}\lim_{x\to0}\frac{3x^2+6}{(-2)e^{2x}}=\frac{3\cdot0^2+6}{(-2)\cdot e^{2\cdot0}}=\frac{6}{(-2)}=\underline{\underline{-3}}$$

(2.) $f(x) = -x^2 + bx + c$

tečna v bodě $x_0 = 4$ je $y = -3x + 30$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| $

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad k = f'(4)$




$f'(x) = -2x + b$

$f'(4) = (-2)\cdot 4 + b = -3$

$\boxed{b = 5}$

TEČNÝ BOD: $[4; 18]$

$f(4) = -16 + 5\cdot 4 + c = 18 \implies \boxed{c = 14}$

$\boxed{f(x) = -x^2 + 5x + 14} = (-1)(x^2 - 5x - 14) = (-1)(x-7)(x+2)$

| $x$ | 7 | -2 | 0 | $\frac{5}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 0 | 14 | $\frac{81}{4}$ |

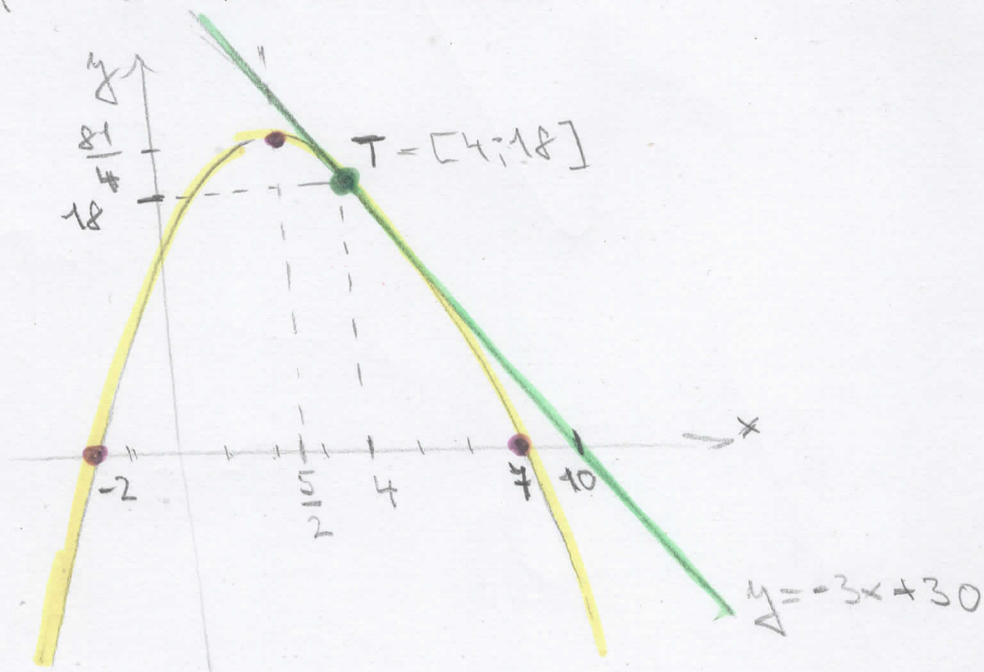
VRCHOL PARABOLY: $[\frac{5}{2}; \frac{81}{4}]$

$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7 + (-2)}{2} = \frac{5}{2}$

$f(\frac{5}{2}) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + 14 = \frac{-25 + 50 + 56}{4} = \frac{81}{4}$

TEČNA $y = -3x + 30$

| $x$ | 0 | 10 |
|---|---|---|
| $y$ | 30 | 0 |



(3.) $f(x) = \dfrac{1-2x^3}{x^2}$

| $x$ | $0$ | $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ | $-1$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | N.D. | $0$ | $3$ |

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(1) = -1$, $f(-1) = 3$

$f(1) \neq \pm f(-1)$

$\Rightarrow$ ani sudá ani lichá

$$f(x) = 0 \iff 1 - 2x^3 = 0$$
$$1 = 2x^3$$
$$\frac{1}{2} = x^3$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \doteq 0{,}79$$

1. DERIVACE: $f'(x) = \dfrac{(-6x^2)\cdot x^2 - 2x(1-2x^3)}{x^4} = \dfrac{-2x^4 - 2x}{x^4} =$

$= \dfrac{x\cdot(-2x^3-2)}{x^4} = -\dfrac{2x^3+2}{x^3} = -2 - \dfrac{2}{x^3}$

$$f'(x) = 0 \iff 2x^3 + 2 = 0 \quad | :2$$
$$x^3 + 1 = 0$$
$$x^3 = -1$$
$$x = -1$$

$f'<0$ $\quad -1 \quad$ $f'>0$ $\quad 0 \quad$ $f'<0$

Lokální minimum: $[-1; 3]$

$f(-1) = \dfrac{1-2\cdot(-1)^3}{(-1)^2} = 3$

2. DERIVACE: $f''(x) = \left(-2 - \dfrac{2}{x^3}\right)' = \dfrac{6}{x^4} > 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f$

$\Rightarrow f$ je konvexní na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$

LIMITY: $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \dfrac{1}{0_+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = \dfrac{1}{0_+} = +\infty$

ŠIKMÁ ASYMPTOTA: $y = kx + q$

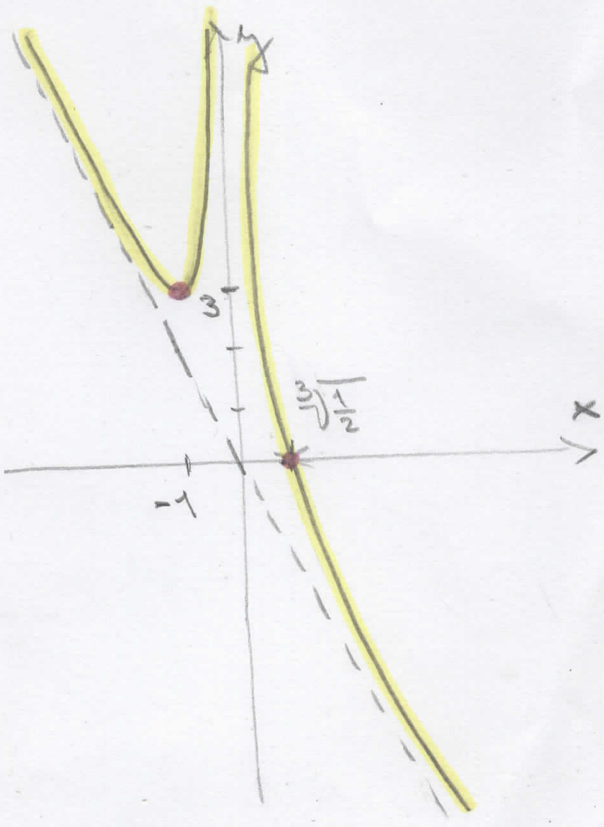
$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1-2x^3}{x^3} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-6x^2}{3x^2} = \underline{\underline{-2}}$

$q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim \left(\dfrac{1-2x^3}{x^2} + 2x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1-2x^3+2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = \underline{\underline{0}}$

Šikmá asymptota je přímka $y = -2x$

Obor hodnot $H_f = \mathbb{R}$



4. $f(x,y) = x^2 + xy - y^2 - 8x + y$

$M: (x-3)^2 + y^2 \le 9 \quad , y \le x$

průsečíky přímky a kružnice: $\quad y = x$ $\quad$ dosazení

$$(x-3)^2 + y^2 = 9$$

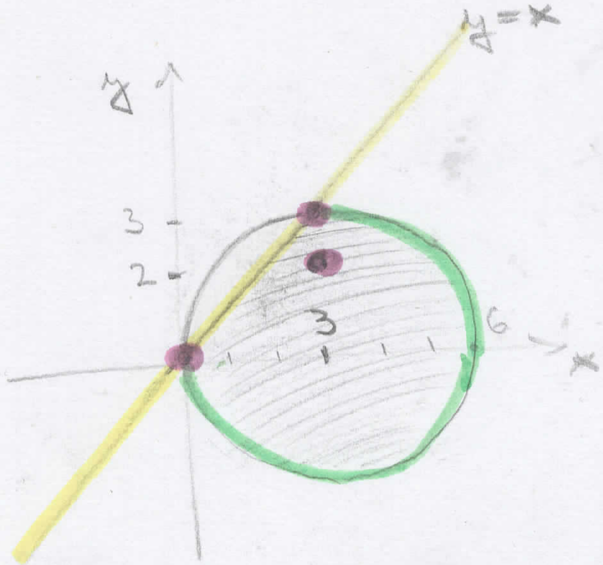
$$(x-3)^2 + x^2 = 9$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 = 9$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x-3) = 0$$

$$\underline{x=0} \vee \underline{x=3}$$




Volné extrémy: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 8 = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x - 2y + 1 = 0 \quad | \cdot (-2)$ $\quad \oplus$

$$5y - 10 = 0$$

$$5y = 10$$

$$\boxed{y = 2} \quad \boxed{x = 3}$$

Vázané extrémy: I. $y = x, \; x \in \langle 0, 3 \rangle$

$g(x) := f(x,x) = x^2 + x^2 - x^2 - 8x + x$

$= x^2 - 7x$

$g'(x) = 2x - 7 = 0 \iff \boxed{x = \frac{7}{2}} \notin \langle 0, 3 \rangle$

II. $\underbrace{(x-3)^2 + y^2 - 9}_{=: g(x,y)} = 0 \iff x^2 - 6x + 9 + y^2 - 9 = 0$

$\boxed{x^2 - 6x + y^2 = 0}$

Metoda Jakobiánu: $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x + y - 8 & x - 2y + 1 \\ 2(x-3) & 2y \end{vmatrix} =$

$$= (2x+y-8)\cdot 2y - (x-2y+1)\cdot 2(x-3)$$

$$= 4xy + 2y^2 - 16y - 2x^2 + 4xy - 2x + 6x$$

$$-12y + 6 = 2y^2 - 2x^2 - 28y + 4x + 8xy + 6$$

I. $y^2 - x^2 - 14y + 2x + 4xy + 3 = 0$

II. $x^2 - 6x + y^2 = 0 \iff y^2 = 6x - x^2$

$\Rightarrow$ Chybné zadání, tuto soustavu neřešit!

5. $f(x,y,z) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2$

$\underbrace{x+y}_{g_1(x,y,z)} = 0 \qquad \underbrace{x^2+y^2+z^2-16}_{g_2(x,y,z)} = 0$

Metoda Jakobiánu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & y & 2z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} =$$

$$= -2xz + 4yz - 4xz - 2yz = -6xz + 2yz$$

$$= 2z(-3x + y) = 0 \iff \underline{z=0} \vee \underline{y=3x}$$

1. $\underline{y=3x}$ $\longrightarrow$ dosazením do $x+y=0$ $\quad x+3x=0$, $4x=0$, $\underline{x=0}$, $\underline{y=0}$

dosazením do $x^2+y^2+z^2=16$ $\quad 0^2+0^2+z^2=16$, $\underline{z=\pm 4}$

11. $\underline{z=0}$: $x^2+y^2=16 \longleftarrow$ dosazením

$x+y=0 \iff |y=-x|$

$2x^2=16$

$x^2=8$

$x=\pm\sqrt{8}$

Kandidáti: $[0,0,\pm 4] = A$

$[\sqrt{8},-\sqrt{8},0]$

$[-\sqrt{8},\sqrt{8},0]$

$f(0,0,\pm 4) = 16$ – maxima

$\left.\begin{array}{l} f(\sqrt{8},-\sqrt{8},0) = 0 \\ f(-\sqrt{8},\sqrt{8},0) = 0 \end{array}\right\}$ minima