Příklady

Příklad 4.1. Určete (přirozený) definiční obor funkce f.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = (\sqrt{x})^2$

e) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

f) $f(x) = \ln x^2$

g) $f(x) = 2\ln x$

h) $f(x) = \ln\left(2x - x^2\right)$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$

j) $f(x) = \log_3\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

Řešení 4.1.

a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

b) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 2\rangle \cup \langle 3, \infty)$

c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

d) $\mathcal{D}(f) = \langle 0, \infty)$

e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

g) $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$

h) $\mathcal{D}(f) = (0, 2)$

i) $\mathcal{D}(f) = (-4, 4)$

j) $\mathcal{D}(f) = (0, 1)$

Příklad 4.2. Určete definiční obor funkce f.

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+6} + \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{2x+6}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+6}}$

d) $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x+1)}$

f) $f(x) = \sqrt{3 - \log x}$

g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x^2 + 3x - 2}$

h) $f(x) = \sqrt{\log_2 x - 2}$

Řešení 4.2.

a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

b) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -3) \cup \langle 2, \infty)$

c) $\mathcal{D}(f) = \langle 2, \infty)$

d) $\mathcal{D}(f) = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle 0, \sqrt{3}\right\rangle$

e) $\mathcal{D}(f) = (-1, 0) \cup (0, \infty)$

f) $\mathcal{D}(f) = (0, 1000\rangle$

g) $\mathcal{D}(f) = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

h) $\mathcal{D}(f) = \langle 4, \infty)$

Příklad 4.3. Určete definiční obor funkce f (těžší příklady*).

a) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 2\right)$

b) $f(x) = \operatorname{cotg} 3x$

c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-1}}$

e)* $f(x) = \ln(\ln(\sin x))$

f)* $f(x) = \frac{\ln(4-x^2)}{e^x - 1} + \sqrt{3-2x}$

g)* $f(x) = \sqrt[4]{x \cdot \ln(x+2)}$

h)* $f(x) = \sqrt{x^2 - \sqrt{x}}$

Řešení 4.3.

a) $\mathcal{D}(f) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\mathcal{D}(f) = \langle 1, 17\rangle$

e)* $\mathcal{D}(f) = \emptyset$

f)* $\mathcal{D}(f) = (-2, 0) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right\rangle$

g)* $\mathcal{D}(f) = (-2, -1\rangle \cup \langle 0, \infty)$

h)* $\mathcal{D}(f) = \{0\} \cup \langle 1, \infty)$

Příklad 4.6. Zjistěte, zda jsou následující funkce sudé/liché.

a) $f(x) = x \sin x$

b) $f(x) = x^3 + 2$

c) $f(x) = x^3 \cos x$

d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

e) $f(x) = \frac{\ln(1+x^4)}{x}$

f) $f(x) = -\operatorname{sgn}(x)$

g) $f(x) = x e^x$

h) $f(x) = \operatorname{tg} x - x^3$

i) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-4}}$

j) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

k) $f(x) = 2^x\, 2^{-x}$

l)* $f(x) = \ln\frac{2-x}{2+x}$

Řešení 4.6.

a) s.

b) ani ani

c) l.

d) l.

e) l.

f) l.

g) ani ani

h) l.

i) s.

j) l.

k) s.

l)* l.

Příklad 4.11. Funkce definované po částech: Načrtněte graf funkce f. Z grafu určete obor hodnot $\mathcal{H}(f)$, zda je funkce omezená, prostá a zda je na svém $\mathcal{D}(f)$ monotonní.

a) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x < 0 \\ \log 100, & x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 - 1, & x \in (-3, 0) \\ \log_2(x+1), & x \in \langle 0, 3) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-2, 1\rangle \\ |2-x|\,, & x \in (1, 4) \end{cases}$

*(**Nejde** o složené funkce!)*

d) $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, & x > 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{4}, & x \in (-\infty, -1\rangle \\ x^3, & x \in (-1, 1) \\ \mathrm{e}^{-x+1} & x \in \langle 1, \infty) \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1}, & x < 0 \\ 0\,, & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} + 1, & x > 0 \end{cases}$

Řešení 4.11.

a) $\mathcal{H}(f) = (0, 1) \cup \{2\}$, omez., neklesající

b) $\mathcal{H}(f) = (-9, 2)$, omez., rostoucí, prostá

c) $\mathcal{H}(f) = \langle 0, 4)$, omez.

d) $\mathcal{H}(f) = (0, \infty)$, prostá na $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ (přesto, že klesající na $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí na $(0, \infty)$)

e) $\mathcal{H}(f) = (-1, 1\rangle$, omez.

f) $\mathcal{H}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$