

3. minitest - varianta A
Lokální extrémy funkce dvou proměnných
7. 3. 2024

Najděte lokální extrémy a sedlové body funkce

$$f(x, y) = x^3 + 18x^2 + y^2 - 6xy + 45x - 10y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 36x - 6y + 45 = 0 \quad | :3 \quad \leftarrow \text{dosadíme}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 6x - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad | \underline{y = 3x + 5} |$$

$$x^2 + 12x - 2(3x + 5) + 15 = 0.$$

$$x^2 + 12x - 6x - 10 + 15 = 0$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(x+5)(x+1) = 0$$

$$x = -5 \quad \vee \quad x = -1$$

$$y = -10 \quad \vee \quad y = 2$$

$$\text{Hessova matice: } H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(-1, 2) = \begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 60 - 36 = 24 > 0$$

$$\wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 2) > 0$$

\Rightarrow pozitivně definitní matice

$\Rightarrow [-1, 2]$ je lok. min.

$$H(-5, -10) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -24 < 0 \quad \Rightarrow \text{indefinitní matice}$$

$\Rightarrow [-5, -10]$ je sedlový bod

3. minitest - varianta B
Lokální extrémy funkce dvou proměnných
7. 3. 2024

Najděte lokální extrémy a sedlové body funkce

$$f(x, y) = x^3 + 12x^2 + y^2 - 6xy - 15x - 2y + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 24x - 6y - 15 = 0 \quad | :3 \quad \leftarrow \text{dosadíme}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 6x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \boxed{y = 3x + 1}$$

$$x^2 + 8x - 2(3x + 1) - 5 = 0$$

$$x^2 + 2x - 7 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 32$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

Stacionární body

$$A_1 = [-1 + 2\sqrt{2}; -2 + 6\sqrt{2}]$$

$$A_2 = [-1 - 2\sqrt{2}; -2 - 6\sqrt{2}]$$

Hessova matice:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 24 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(A_1) = \begin{pmatrix} 18 + 12\sqrt{2} & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det H(A_1) = 36 + 24\sqrt{2} - 36 > 0$$

$\wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_1) > 0 \Rightarrow$ pozitivně definitní matice

$\Rightarrow A_1$ je lok. min.

$$H(A_2) = \begin{pmatrix} 18 - 12\sqrt{2} & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det H(A_2) = -12\sqrt{2} < 0$$

\Rightarrow indefinitní matice $\Rightarrow A_2$ je sedlo