DEFINICE 1: 1. základní forma plochy $p: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$

je matice:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial p}{\partial u} \\ \frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial p}{\partial v} \end{pmatrix},$$

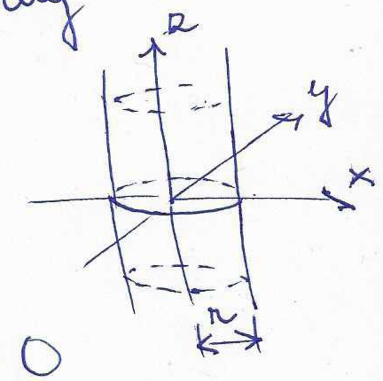
tedy matice, jejíž prvky jsou skalární součiny vektorů parciálních derivací plochy p

DEFINICE 2: Plocha $p: U \to \mathbb{R}^3$ je regulární v bodě $(u_0, v_0) \in U$, pokud jsou vektory $\frac{\partial p}{\partial u}(u_0,v_0)$ a $\frac{\partial p}{\partial v}(u_0,v_0)$ lineárně nezávislé.

VĚTA 1: Plocha je regulární $\Longleftrightarrow$ 1. základní forma této plochy je regulární matice

PŘÍKLAD 1: $p(u,v) = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \\ u \end{pmatrix}$, kde $v \in [0, 2\pi)$, $u \in \mathbb{R}$ a $r > 0$ je konstanta

je parametrizace válcové plochy



$$\frac{\partial p}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = \begin{pmatrix} -r\sin v \\ r\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial p}{\partial u} = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

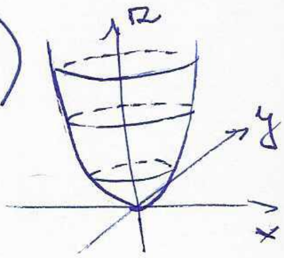
$$\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial p}{\partial v} = 0\cdot(-r\sin v) + 0\cdot r\cos v + 1\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial p}{\partial v} = (-r\sin v)\cdot(-r\sin v) + r\cos v\cdot r\cos v + 0\cdot 0$$
$$= r^2\sin^2 v + r^2\cos^2 v = r^2(\underbrace{\sin^2 v + \cos^2 v}_{1}) = \underline{\underline{r^2}}$$

1. základní forma plochy je: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ – regulární matice pro $r \neq 0$

PŘÍKLAD 2: $p(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2+v^2 \end{pmatrix}$, $u,v \in \mathbb{R}$ ... paraboloid

(graf funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$)



$\frac{\partial p}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}$, $\frac{\partial p}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$

$\frac{\partial p}{\partial u} \cdot \frac{\partial p}{\partial u} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2u \cdot 2u = \underline{\underline{1+4u^2}}$

$\frac{\partial p}{\partial u} \cdot \frac{\partial p}{\partial v} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2u \cdot 2v = \underline{\underline{4uv}}$

$\frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial p}{\partial v} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2v \cdot 2v = \underline{\underline{1+4v^2}}$

1. základní forma plochy p je: $\begin{pmatrix} 1+4u^2 & 4uv \\ 4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix}$

Determinant této matice je:

$\begin{vmatrix} 1+4u^2 & 4uv \\ 4uv & 1+4v^2 \end{vmatrix} = (1+4u^2)(1+4v^2) - 4uv \cdot 4uv =$

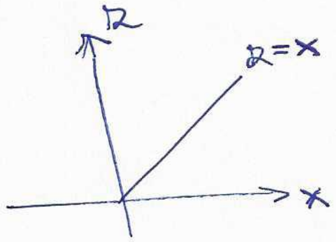
$= 1 + 4u^2 + 4v^2 + 16u^2v^2 - 16u^2v^2 = 1 + 4u^2 + 4v^2 \neq 0$

pro všechna $u,v \in \mathbb{R}$ je $\det\begin{pmatrix} 1+4u^2 & 4uv \\ 4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix} \neq 0$

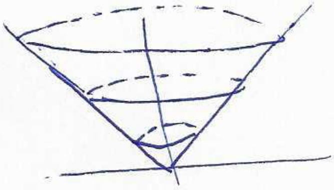
$\Rightarrow$ 1. základní forma plochy p je regulární matice

$\Rightarrow$ plocha p je regulární v každém bodě.

PŘÍKLAD 3: $f(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ u \end{pmatrix}$, $u \in [0,\infty)$, $v \in [0,2\pi]$



- ~~válcové~~
- kuželová plocha (vzniklá rotací přímky z=x kolem osy z)



$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} = \cos^2 v + \sin^2 v + 1\cdot 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = -u\sin v\cos v + u\cos v\sin v + 0\cdot 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = (-u\sin v)\cdot(-u\sin v) + u\cos v \cdot u\cos v + 0\cdot 0$$
$$= u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v = \underline{\underline{u^2}}$$

1. základní forma plochy: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$

Tato matice je <u>regulární</u>, pokud <u>$u \neq 0$</u>

$\Rightarrow$ kuželová plocha f je regulární v každém svém bodě kromě jejího vrcholu $[0,0,0]$