

2. čtvrtletní písemná práce z matematiky – vzor

1) Najděte předpis inverzní funkce k zadané funkci f.

a) $f: y = \frac{2x-1}{2-5x}$

$$x = \frac{2y-1}{2-5y} \quad | \cdot (2-5y)$$

$$x \cdot (2-5y) = 2y-1$$

$$2x - 10yx = 2y - 1 \quad | +10yx + 1$$

$$2x + 1 = 2y + 10yx$$

$$2x + 1 = y(2 + 10x)$$

b) $f: y = 3^{2x-1} + 5$

$$x = 3^{2y-1} + 5 \quad | -5$$

$$x-5 = 3^{2y-1} \quad | \log_3$$

$$\log_3(x-5) = 2y-1 \quad | +1$$

c) $f: y = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \log_5(2x-7) + 1} - 2$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \log_5(2y-7) + 1} - 2 \quad | +2$$

$$x+2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \log_5(2y-7) + 1} \quad |^3$$

$$(x+2)^3 = \frac{1}{2} \log_5(2y-7) + 1 \quad | -1$$

$$2((x+2)^3 - 1) = \log_5(2y-7) \quad | \cdot 2$$

d) $f: y = \sqrt{5-2x} + 4$

$$x = \sqrt{5-2y} + 4 \quad | -4$$

$$x-4 = \sqrt{5-2y} \quad |^2$$

$$(x-4)^2 = 5-2y$$

$$x^2 - 8x + 16 = 5 - 2y \quad | -5$$

$$x^2 - 8x + 11 = -2y \quad | :(-2)$$

OBECNÝ POSTUP PŘI HLEDÁNÍ PŘEDPISU INVERZNÍ FUNKCE:

1) ZAMĚNÍM x A y

2) VYJÁDRÍM y

$$\Rightarrow f^{-1}: y = \frac{2x+1}{2+10x}$$

$$\log_3(x-5) + 1 = 2y \quad | :2$$

$$f^{-1}: y = \frac{\log_3(x-5) + 1}{2}$$

$$2y-7 = 5^{2((x+2)^3-1)}$$

$$f^{-1}: y = \frac{1}{2} \left(\sqrt[2]{5^{2((x+2)^3-1)}} + 7 \right)$$

$$f^{-1}: y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{11}{2}$$

$$f: y = 2 \log_3(5x - 7)$$

$$x = 2 \log_3(5y - 7) \quad | : 2$$

$$\frac{x}{2} = \log_3(5y - 7)$$

DEFINICE LOGARITMUL

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

$$3^{\frac{x}{2}} = 5y - 7 \quad | + 7$$

$$3^{\frac{x}{2}} + 7 = 5y \quad | : 5$$

$$f^{-1}: y = \frac{3^{\frac{x}{2}} + 7}{5}$$

$$f: y = 2^{\sqrt{x+1} - 3}$$

$$x = 2^{\sqrt{y+1} - 3} \quad | \log_2$$

$$\log_2 x = \sqrt{y+1} - 3 \quad | + 3$$

$$\log_2 x + 3 = \sqrt{y+1} \quad | ^2$$

$$(\log_2 x + 3)^2 = y + 1$$

$$\log_2^2 x + 6 \log_2 x + 9 = y + 1 \quad | - 1$$

$$f^{-1}: y = \log_2^2 x + 6 \log_2 x + 8$$

ZAKRESLETE DEFINIČNÍ OBOR FUNKCE:

1) $f(x,y) = \sqrt{4-x-y} + \log(y-x) + \sqrt{3x-3}$

- $4-x-y \geq 0 \quad | +y$

$$y \leq 4-x$$

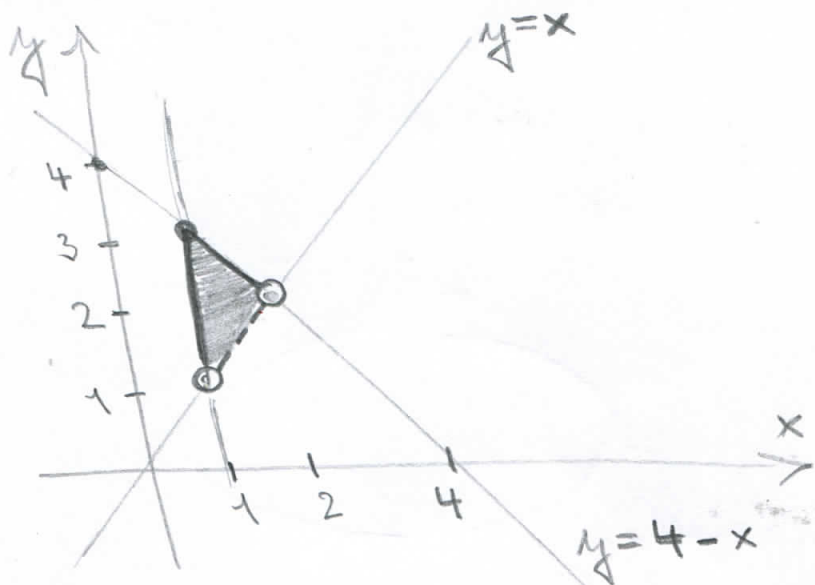
- $y-x > 0$

$$y > x$$

- $3x-3 \geq 0 \quad | :3$

$$x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$



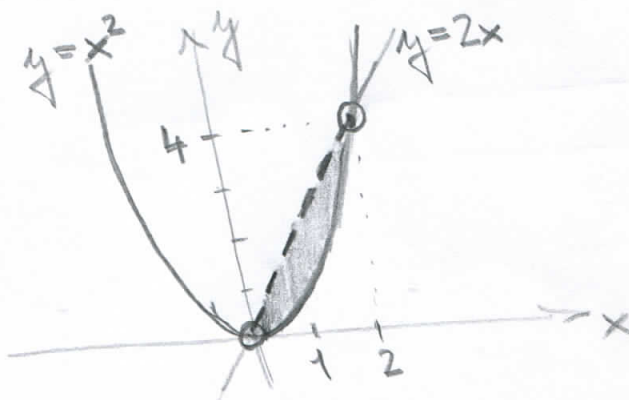
2) $f(x,y) = \sqrt{y-x^2} - \log_{\sqrt{2}}(2x-y)$

- $y-x^2 \geq 0$

$$y \geq x^2$$

- $2x-y > 0 \quad | +y$

$$y < 2x$$



3) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} + \sqrt{y-|x|}$

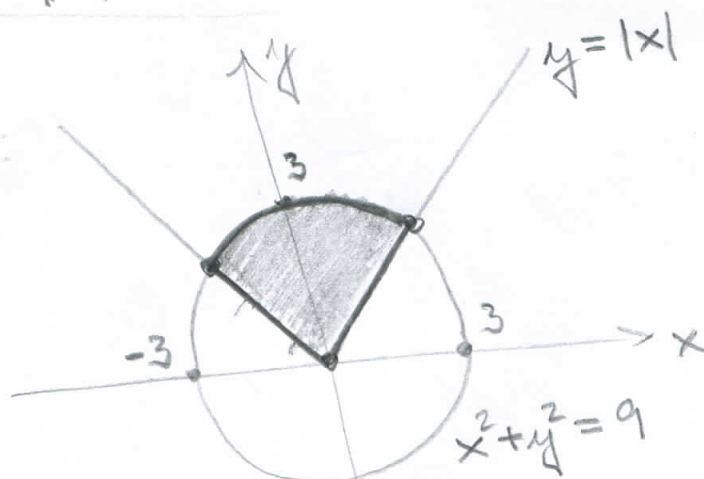
- $9-x^2-y^2 \geq 0$

$$x^2+y^2 \leq 9$$

KRUH O POLOMĚRU 3
SE STŘEDEM V [0,0]

- $y-|x| \geq 0$

$$y \geq |x|$$



$$4) f(x,y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2} + \log_{\sqrt{6}}(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\bullet 36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0$$

$$4x^2 + 9y^2 \leq 36 \quad | :36$$

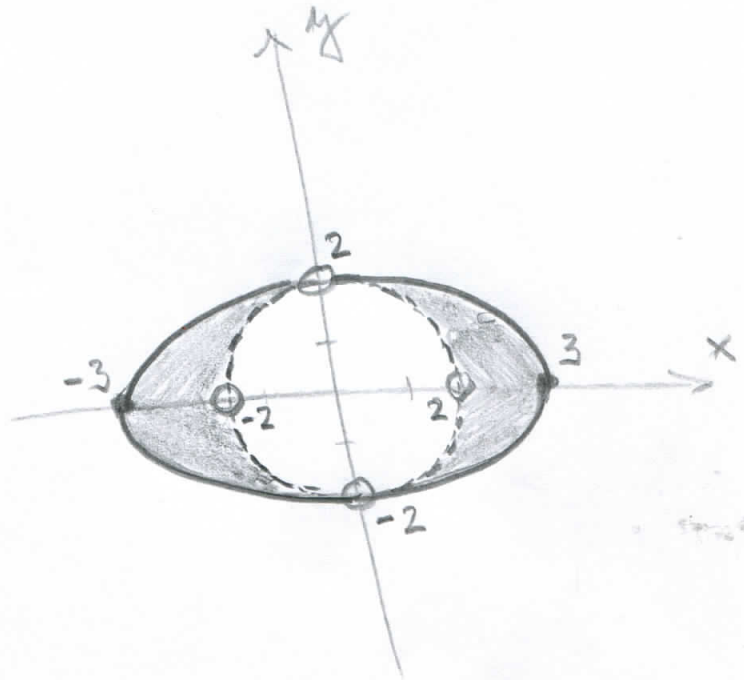
$$\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1}$$

ELIPSA SE STŘEDEM $[0,0]$
A DÉLKAMI POLOSI 3 A 2

$$\bullet x^2 + y^2 - 4 > 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 > 4}$$

VNĚJŠÍ OBLAST KRUHU
O POLOMĚRU 2



$$5) f(x,y) = \sqrt{y - 2^x} + \log_{\sqrt{2}}(4x - x^2 - 3)$$

$$\bullet y - 2^x \geq 0$$

$$\boxed{y \geq 2^x}$$

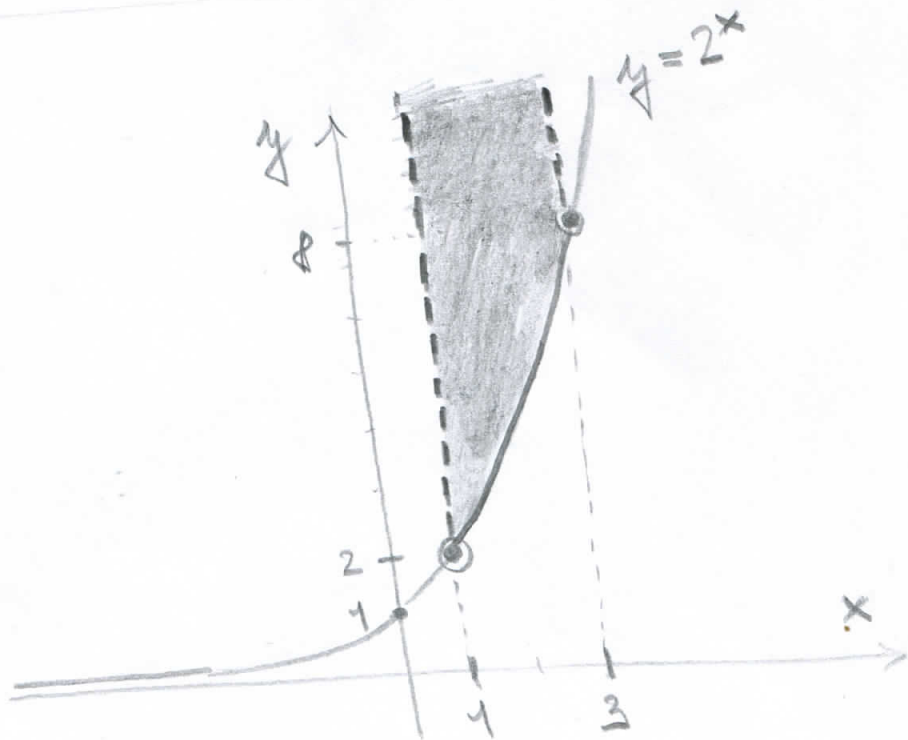
$$\bullet 4x - x^2 - 3 > 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$(x-3)(x-1) < 0$$

$x-1$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
$-\infty$	+	-	+

$$\boxed{x \in (1,3)}$$



$$6) f(x,y) = \sqrt{x^3 - x^2 - 6x} + \sqrt{-y^2 + 7y - 12}$$

$$\bullet x^3 - x^2 - 6x \geq 0$$

$$\bullet (x^2 - x - 6) \geq 0$$

$$\bullet x \cdot (x-3)(x+2) \geq 0$$

x	-	-	0	+	+
x-3	-	-	0	-	+
x+2	-	+	+	+	+
	$-\infty$	\ominus	-2	\oplus	0
			\ominus	3	\oplus
					∞

$$\boxed{x \in \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle}$$

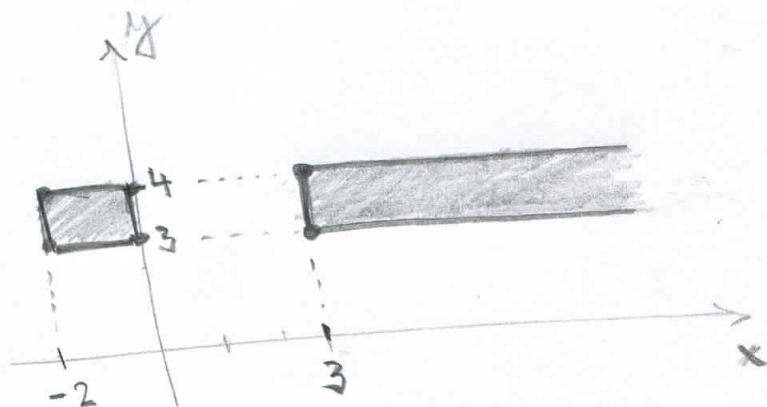
$$\bullet -y^2 + 7y - 12 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\bullet y^2 - 7y + 12 \leq 0$$

$$\bullet (y-4)(y-3) \leq 0$$

y	-	-	0	+
y-4	-	-	0	+
y-3	-	+	+	+
	$-\infty$	\oplus	3	\ominus
			4	\oplus
				∞

$$\boxed{y \in \langle 3, 4 \rangle}$$



$$7) f(x,y) = \sqrt{xy-1} + \log(x\sqrt{y}) + \sqrt{4-y} + \sqrt{3-x}$$

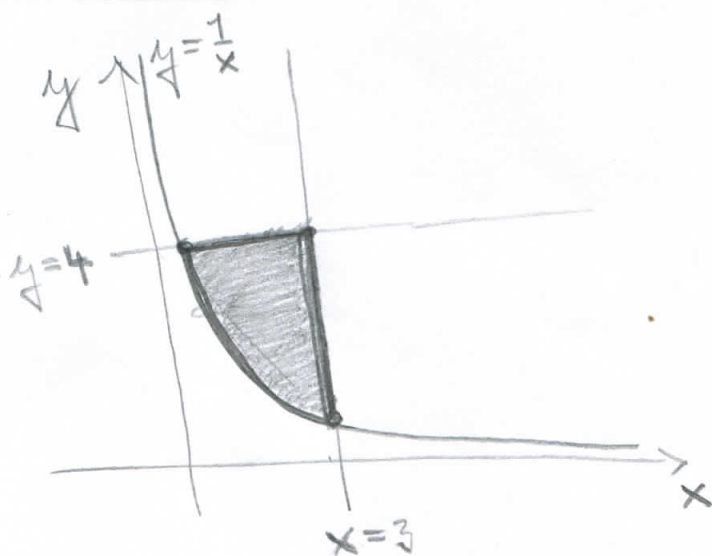
$$\bullet xy - 1 \geq 0$$

$$\boxed{y \geq \frac{1}{x}}$$

$$\bullet x\sqrt{y} > 0 \Leftrightarrow (x > 0) \wedge (y > 0)$$

$$\bullet 4 - y \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{y \leq 4}$$

$$\bullet 3 - x \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \leq 3}$$



$$f) f(x,y) = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{x^2+y^2-4y+3} + \log_2(4-y)$$

- $y-x^2 \geq 0$

$$y \geq x^2$$

VNITŘNÍ OBLAST PARABOLY

- $4-y > 0$

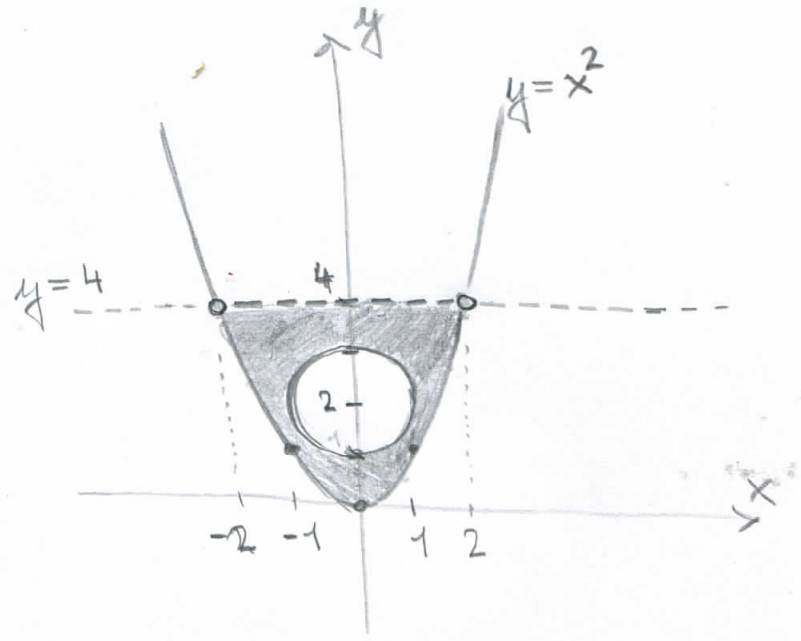
$$y < 4$$

- $x^2+y^2-4y+3 \geq 0 \quad | +1$

$$x^2+y^2-4y+4 \geq 1$$

$$x^2+(y-2)^2 \geq 1$$

VNĚJŠÍ OBLAST KRUŽNICE
JE STŘEDEM [0;2] A POLOMĚREM 1



$$g) f(x,y) = \sqrt{\frac{2-x^2-x}{x^2+2x-3}} + \sqrt{y-x} + \sqrt{2x-y}$$

- $\frac{2-x^2-x}{x^2+2x-3} \geq 0 \quad | \cdot (-1)$

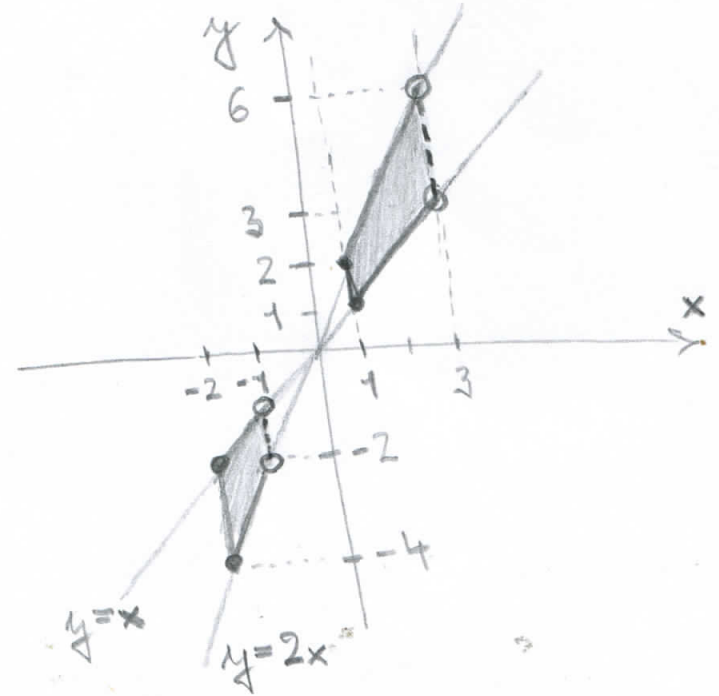
$$\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} \leq 0$$

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-3)} \leq 0$$

$x-1$	-	-	-	+	+
$x+2$	-	+	+	+	+
$x+1$	-	-	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	+
$-\infty$	+	-	+	-	+
		-2	-1	1	3
					∞

$$x \in (-2, -1) \cup (1, 3)$$

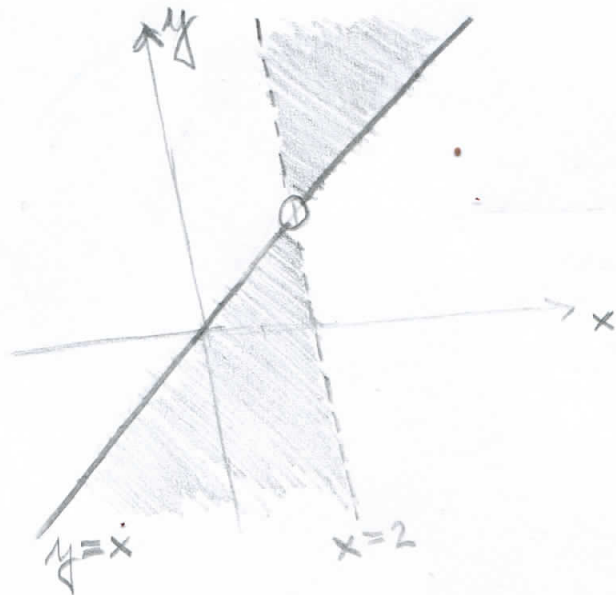
- $y-x \geq 0 \iff y \geq x$
- $2x-y \geq 0 \iff y \leq 2x$



$$10) f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y}{2-x}}$$

$$\frac{x-y}{2-x} \geq 0 \iff ((x-y \geq 0) \wedge (2-x > 0)) \vee ((x-y \leq 0) \wedge (2-x < 0))$$

$$((y \leq x) \wedge (x < 2)) \vee ((y \geq x) \wedge (x > 2))$$



$$11) f(x,y) = \sqrt{\sin x + y - 2} + \sqrt{2 \sin x + 2 - y} + \log(\pi x - x^2)$$

$$\bullet \pi x - x^2 > 0$$

$$x(\pi - x) > 0 \iff x \in (0, \pi)$$

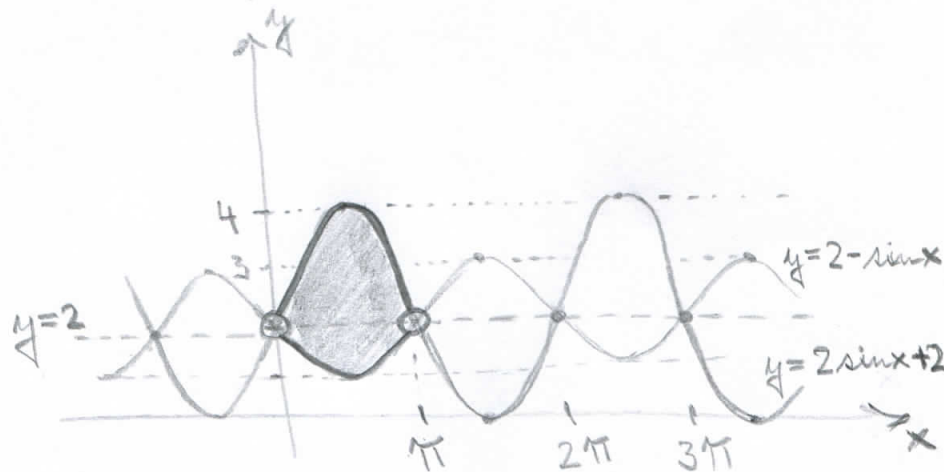
x	-	+	+	-
$\pi - x$	+	+	+	-
	-	0	+	-
	$-\infty$	0	π	∞

$$\bullet \sin x + y - 2 \geq 0$$

$$y \geq 2 - \sin x$$

$$\bullet 2 \sin x + 2 - y \geq 0$$

$$y \leq 2 \sin x + 2$$



2) Najděte předpis inverzní funkce k zadané funkci f (jako na obrázku) a zakreslete její graf.

Určete definiční obor a obor hodnot inverzní funkce.

$$f(x) = x^2 + 4x + 5 \quad | \quad x \in \langle -2, \infty \rangle$$

$$x = y^2 + 4y + 5$$

$$x = \underbrace{y^2 + 4y + 4 + 1}_{(y+2)^2}$$

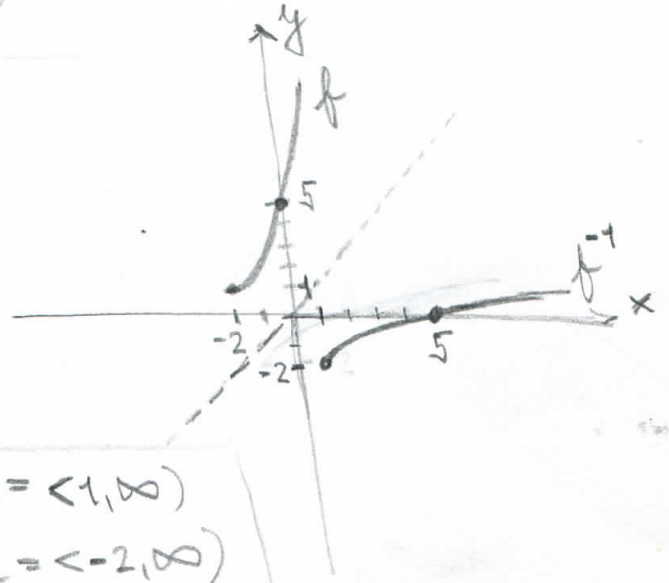
$$x - 1 = (y + 2)^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{x-1} = y + 2 \quad | -2$$

$$f^{-1}: y = \sqrt{x-1} - 2$$

$$D_{f^{-1}} = H_f = \langle 1, \infty \rangle$$

$$H_{f^{-1}} = D_f = \langle -2, \infty \rangle$$

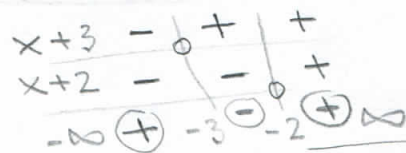


3) Určete definiční obor funkce.

a) $f(x) = \log(x^2 + 5x + 6)$

$$x^2 + 5x + 6 > 0$$

$$(x+3)(x+2) > 0$$



$$D_f = (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$$

b) $f(x) = \log(x^2 + 5x + 7)$

$$x^2 + 5x + 7 > 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 7 = -3 < 0$$

\Rightarrow DISKRIMINANT JE ŽÁPORNÝ, Tedy POLYNOM $x^2 + 5x + 7$ JE NEROZLOŽITELNÝ

A $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 5x + 7 > 0$, PRŮTO $D_f = \mathbb{R}$

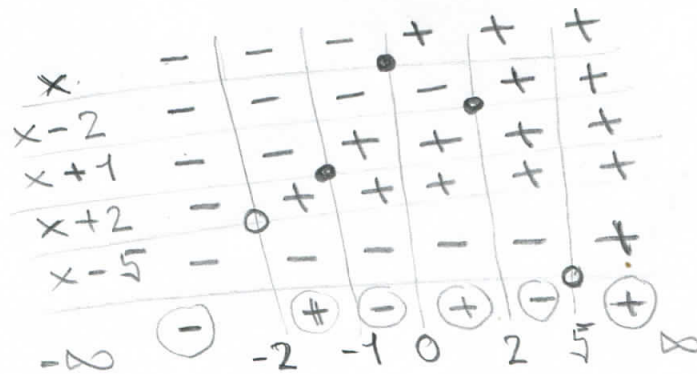
c)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - x^2 - 2x}{10 + 3x - x^2}}$$

$$\frac{x^3 - x^2 - 2x}{10 + 3x - x^2} \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{x \cdot (x^2 - x - 2)}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$$

$$\frac{x(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-5)} \leq 0$$



$$D_f = (-\infty, -2) \cup \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 2, 5 \rangle$$

3) Řešte rovnici v oboru přirozených čísel.

$$\binom{x}{x-2} + \binom{x}{x-1} = \frac{x^2+3}{2}$$

$$\frac{x!}{(x-2)! \cdot (x-(x-2))!} + \frac{x!}{(x-1)! \cdot (x-(x-1))!} = \frac{x^2+3}{2}$$

$$\frac{x \cdot (x-1)(x-2)!}{(x-2)! \cdot 2!} + \frac{x(x-1)!}{(x-1)!} = \frac{x^2+3}{2}$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - x) + x = \frac{x^2+3}{2} \quad | \cdot 2$$

$$x^2 - x + 2x = x^2 + 3 \quad | -x^2$$

$$\underline{\underline{x=3}}$$

4) Napište vzorec $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

PASCALŮV TROJÚHELNÍK

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
 \end{array}$$

→ TOTO JSOU KOEFICIENTY
V ROZVOJI $(a+b)^7$

BINOMICKÁ VĚTA ŘÍKÁ:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$$

$$\frac{(x-1)!}{(x-3)! \cdot (x-1-(x-3))!} + \frac{(x-2)!}{(x-4)! \cdot (x-2-(x-4))!} = 9$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)!}{(x-3)! \cdot 2!} + \frac{(x-2)(x-3)(x-4)!}{(x-4)! \cdot 2!} = 9 \quad | \cdot 2$$

$$(x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) = 18$$

$$(x-2) \cdot (x-1+x-3) = 18$$

$$(x-2) \cdot (2x-4) = 18 \quad | :2$$

$$(x-2) \cdot (x-2) = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 = 9 \quad | -9$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x-5)(x+1) = 0$$

$$\underline{\underline{x=5}} \quad \vee \quad x=-1 \notin D$$

neboť $x \in \mathbb{N}$ a $x \geq 4$,

tedy obor řešitelnosti je $\{4; 5; 6; 7; \dots\}$

$$\text{protože } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \nabla$$

pro $\underline{\underline{n, k}} \in \mathbb{N}_0$, $\underline{\underline{n}} \geq \underline{\underline{k}}$

Kombinatorika

- 1) Kolika způsoby lze v poličce uspořádat 4 knihy? PERMUTACE BEZ OPAKOVÁNÍ 4. TŘÍDY

$$P(4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{24}}$$

- 2) Kolika způsoby lze sestavit 6-ti členný fotbalový tým z 8 hráčů?

KOMBINACE BEZ OPAKOVÁNÍ 6. TŘÍDY Z 8 PRVKŮ

- NEZÁLEŽÍ NA UPOŘÁDÁNÍ
- PRVKY SE NEMOHOU OPAKOVAT

$$K(6, 8) = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot (8-6)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2!} = \underline{\underline{28}}$$

- 3) Kolik existuje 3-místných telefonních čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pokud se číslice mohou opakovat?

VARIACE S OPAKOVÁNÍM 3. TŘÍDY Z 10 PRVKŮ

$$V'(3, 10) = 10^3 = \underline{\underline{1000}}$$

- 4) Kolik existuje 3-místných telefonních čísel z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pokud se číslice nemohou opakovat?

VARIACE BEZ OPAKOVÁNÍ 3. TŘÍDY Z 10 PRVKŮ

$$V(3, 10) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = \underline{\underline{720}}$$

- 5) V krabičce je 10 pastelek – 3 žluté, 5 červených a 2 modré. Kolika způsoby lze pastelky v krabičce uspořádat? (když vyměníme dvě pastelky stejné barvy, je to pořád jedno a to samé uspořádání)

PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

$$P'(3, 5, 2) = \frac{(3+5+2)!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5!} = \underline{\underline{2520}}$$

- 6) V cukrárně jsou 3 druhy dortů v dostatečném množství – čokoládový, jahodový a banánový. Kolika způsoby můžeme nakoupit 5 dortů? (můžeme tedy koupit více kusů od jednoho druhu)

KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM 5. TŘÍDY Z 3 PRVKŮ

$$K'(5, 3) = \binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = \underline{\underline{21}}$$

Pravděpodobnost

- 1) Hodíme dvakrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet čísel, která padnou bude alespoň 10?

PŘÍZNIVÉ VÝSLEDKY:

5-5
5-6
6-5
6-6
4-6
6-4

} 6

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

VŠECHNY VÝSLEDKY: 1-1, 1-2, ... - 36 MOŽNOSTÍ

- 2) Hodíme dvakrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet čísel, která padnou bude právě 10?

PŘÍZNIVÉ VÝSLEDKY:

5-5
6-4
4-6

} 3

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

- 3) Máme 5 součástek, z toho 2 jsou poškozené. Náhodně vybereme 3 součástky. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň 1 bude poškozená?

$$P(\text{alespoň jedna je poškozená}) = P(1 \text{ je poškozená NEBO } 2 \text{ poškozená})$$

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{\frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{2!}{2! \cdot 0!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!}}{5! / (3! \cdot (5-3)!)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 3}{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2}} = \frac{9}{10}$$