



VYSOKÁ ŠKOLA
CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
V PRAZE



MATEMATIKA II VE STRUKTUROVANÉM STUDIU

Doc. RNDr. Daniel Turzík, CSc.
a kolektiv





VYSOKÁ ŠKOLA
CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
V PRAZE

MATEMATIKA II VE STRUKTUROVANÉM STUDIU

Doc. RNDr. Daniel Turzík, CSc.
a kolektiv

PRAHA
2005

Anotace:

Skripta jsou určena pro předmět MATEMATIKA II v rozsahu 3 hodin přednášek a 3 hodin cvičení týdně. Obsahují látku požadovanou navazujícími předměty (fyzika, fyzikální chemie, chemické inženýrství), která nemohla být zařazena do skript MATEMATIKA I ve strukturovaném studiu. Obsahem skript jsou základní fakta o lineárních prostorech a lineárních zobrazeních a jejich aplikace na lineární diferenciální rovnice. Probírá se diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných a křivkové integrály skalárních a vektorových polí.

Členové autorského kolektivu:

Doc. RNDr. Daniel Turzík, CSc.

Prof. RNDr. Alois Klíč, CSc.

RNDr. Miroslava Dubcová, Ph.D.

Prof. RNDr. Milan Kubíček, CSc.

© Daniel Turzík, 2005

ISBN 80-7080-555-2

Předmluva

Tato skripta jsou určena pro předmět MATEMATIKA II, který patří do skupiny povinně volitelných předmětů na všech fakultách VŠCHT v Praze v bakalářském stupni studia. Obsahem probírané látky navazují na skripta MATEMATIKA I ve strukturovaném studiu, která vyšla v roce 2004. Na tato skripta se odvoláváme v textu zkratkou [MI]. Skriptum je opatřeno třemi dodatky, které obsahují důležitá matematická fakta, ale jejichž umístění jinde v textu by rušilo plynulost výkladu.

O způsobu studia a řešení uvedených cvičení platí to, co bylo řečeno v předmluvě skript [MI]. Poznamenejme jen, že řešení jednotlivých cvičení jsou uvedena vzhledem k rozsahu skript pouze ve stručné formě.

Je naší milou povinností poděkovat doc. RNDr. F. Bubeníkovi, CSc. za cenné připomínky, které na mnoha místech zlepšily text skript.

Praha, leden 2005

autoři

Turzik D.: *Matematika II ve strukturovaném studiu*. 1. vyd. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2005. ISBN 80-7080-555-2
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, <http://vydavatelstvi.vscht.cz/>, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Obsah

1	Lineární prostor	9
1.1	Obecný lineární prostor	9
1.2	Lineární nezávislost	13
1.3	Báze a dimenze lineárního prostoru	15
1.4	Podprostor lineárního prostoru	17
1.5	Lineární prostor funkcí $C(I)$ a $C^n(I)$	19
2	Lineární zobrazení	25
2.1	Definice a vlastnosti lineárního zobrazení	25
2.2	Lineární zobrazení \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m	28
2.3	Inverzní matice	32
2.3.1	Maticové rovnice	36
3	Lineární diferenciální rovnice 2. řádu	38
3.1	Úvod	38
3.2	Homogenní LDR 2. řádu	39
3.3	Řešení homogenních LDR 2. řádu s konstantními koeficienty	42
3.3.1	Komplexní funkce reálné proměnné	45
3.4	Řešení nehomogenních LDR 2. řádu	49
3.4.1	Metoda variace konstant	50
3.4.2	Řešení NLDR 2. řádu metodou odhadu	57
3.4.3	Modifikace metody odhadu	62
3.5	Okrajové úlohy	62
3.5.1	Souvislost počáteční a okrajové úlohy	64
3.6	Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů	69
3.6.1	Metoda snížení řádu	70
4	Soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu	73
4.1	Základní pojmy a označení	73
4.2	Autonomní soustavy	74
4.3	Autonomní lineární soustavy	76
4.4	Eulerova metoda	85
4.5	Model “Dravec - kořist”	86

5	Funkce více proměnných, jejich spojitost a limita	90
5.1	Některé vlastnosti bodových množin v \mathbb{R}^n	90
5.2	Funkce více reálných proměnných	94
5.3	Zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k	95
5.3.1	Různé interpretace zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k	97
5.4	Spojítost a limita funkcí více proměnných	97
5.4.1	Věta o maximu a minimu	99
5.5	Limita funkce více proměnných	100
5.5.1	Nevlastní limity	100
5.5.2	Souvislost mezi spojitostí a limitou funkce	101
5.5.3	Spojítost a limita zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k	103
6	Derivace funkcí více proměnných	105
6.1	Parciální derivace	105
6.2	Derivace ve směru	108
6.3	Derivování složených funkcí	111
6.3.1	Derivace zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k	117
6.4	Totální diferenciál, tečná rovina	119
6.4.1	Totální diferenciál	119
6.4.2	Tečná rovina ke grafu funkce dvou proměnných	123
6.5	Taylorův polynom	125
6.6	Newtonova metoda řešení soustav nelineárních rovnic	128
7	Extrémy funkcí dvou proměnných	134
7.1	Lokální extrémy	134
7.2	Metoda nejmenších čtverců	138
8	Implicitně zadané funkce	142
8.1	Implicitní funkce jedné proměnné	142
8.1.1	Normálový vektor ke křivce	152
8.2	Implicitní funkce více proměnných	153
8.2.1	Normálový vektor k ploše	158
9	Aplikace integrálů funkcí jedné proměnné	161
9.1	Riemannova definice určitého integrálu	161
9.2	Geometrické aplikace	167
9.3	Fyzikální aplikace	173
9.4	Věta o střední hodnotě integrálního počtu	177
10	Dvojný a trojný integrál	181
10.1	Riemannova definice dvojného integrálu přes obdélníkový obor	181
10.2	Výpočet dvojného integrálu přes obdélníkové obory	183
10.3	Dvojný integrál a jeho vlastnosti	187
10.4	Výpočet dvojného integrálu	190
10.5	Substituční metoda pro dvojný integrál	198
10.6	Nevlastní integrály, Laplaceův integrál	202

10.7	Trojný integrál	205
10.8	Substituční metoda pro trojný integrál	207
11	Křivkový integrál skalárního pole	212
11.1	Definice prostorové křivky	212
11.2	Tečný vektor	215
11.2.1	Orientace křivky	216
11.3	Přípustné změny parametrizace	217
11.4	Závislost tečného vektoru na parametrizaci	219
11.5	Funkce definované na křivkách	221
11.6	Křivkový integrál skalárního pole	222
11.7	Výpočet křivkového integrálu skalárního pole	225
11.7.1	Nezávislost křivkového integrálu na parametrizaci	228
12	Křivkový integrál vektorového pole. Práce.	232
12.1	Pravoúhlý průmět vektoru	232
12.2	Práce síly	233
12.3	Vektorové pole	234
12.3.1	Rovinná vektorová pole	235
12.3.2	Zadávání vektorových polí	235
12.3.3	Vektorová pole na křivkách	238
12.3.4	Vektorové pole jednotkových tečných vektorů na křivce	238
12.4	Diferenciál zobrazení $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$	239
12.5	Definice křivkového integrálu vektorového pole	241
12.6	Výpočet a vlastnosti křivkového integrálu vektorového pole	242
12.6.1	Jiné odvození vztahu (11.12)	243
12.6.2	Vlastnosti křivkového integrálu vektorového pole	244
12.7	Diferenciální formy příslušné k poli \vec{F}	246
12.7.1	Potenciální vektorová pole	247
12.7.2	Nezávislost křivkového integrálu na cestě	249
12.8	Integrace totálního diferenciálu	252
12.8.1	Rovinný případ	252
12.8.2	Prostorový případ	254
12.9	Výpočet potenciálu	257
A	Supremum a infimum číselných množin	263
B	Řady	266
B.1	Číselné řady	266
B.2	Mocninná a Taylorova řada	272
C	Cylindrické a sférické souřadnice v E^3	277
C.1	Cylindrické (válcové) souřadnice	277
C.2	Sférické souřadnice	279
	ŘEŠENÍ CVIČENÍ	282

Turzik D.: *Matematika II ve strukturovaném studiu*. 1. vyd. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Praha 2005. ISBN 80-7080-555-2
Knihu lze objednat ve vydavatelství VŠCHT Praha, <http://vydavatelstvi.vscht.cz/>, e-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, tel.: 220 443 211

Kapitola 1

Lineární prostor

1.1 Obecný lineární prostor

Ve skriptech [MI] jsme se setkali s různými matematickými objekty, např. reálnými čísly, funkcemi, vektory, apod. Tyto objekty vytvářejí různé množiny, např. \mathbb{R} - množina reálných čísel, $C(I)$ - množina spojitých funkcí definovaných na intervalu I , \mathbb{R}^2 - množina uspořádaných dvojic reálných čísel. Na těchto množinách jsou obvykle přirozeným způsobem zavedeny algebraické operace nebo jiné matematické struktury. V matematické terminologii se množina opatřená nějakou další strukturou obvykle nazývá prostorem, v případě algebraických operací pak podle jejich počtu a vlastností grupou, tělesem, okruhem apod. Tyto další struktury či operace teprve umožňují zavést nejrůznější pojmy a využít je v aplikacích. Např. na množině reálných čísel jsou zavedeny operace sčítání a násobení. Pomocí těchto operací lze zavést např. pojmy lineární a kvadratická rovnice a odvodit vzorce pro jejich řešení. Pro reálná čísla je také přirozeným způsobem definována vzdálenost dvou reálných čísel α, β jako $|\alpha - \beta|$. Tento pojem pak umožňuje např. definovat spojitost funkce, jak jsme viděli v kapitole 3 skript [MI].

Přitom operace sčítání je definována jak pro reálná čísla, tak pro funkce i vektory z \mathbb{R}^2 . Navíc má tato operace ve všech těchto příkladech některé stejné vlastnosti, např. je ve všech těchto příkladech komutativní. Jsou-li totiž α, β dvě reálná čísla je $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, jsou-li f, g dvě reálné funkce definované na intervalu I , je $f + g = g + f$, a jsou-li \vec{u}, \vec{v} dva vektory z \mathbb{R}^2 je $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

V matematice je běžné vybrat některé společné vlastnosti různých konkrétních objektů či operací s nimi a zavést nové abstraktní objekty jako všechny ty objekty, které tyto společné vlastnosti splňují. V této souvislosti se pak uvažovaným vlastnostem obvykle říká **axiomy**. Tímto způsobem zavedeme pojem lineárního prostoru. Přitom základními příklady pro nás budou množina vektorů z \mathbb{R}^2 (nebo \mathbb{R}^n) a množina $C(I)$ spojitých funkcí na intervalu I , spolu s operacemi **sčítání** a **násobení reálnými čísly**. Některé pojmy a věty, se kterými se v následujících odstavcích seznámíme jsme již zavedli ve skriptech [MI] v kapitole 11 pro speciální případ prostoru \mathbb{R}^n . Porovnejte si tyto definice, věty a jejich důkazy a uvidíte, že jsou vesměs úplně analogické.

Než podáme definici lineárního prostoru zavedeme nejprve v následující definici pojmy operace sčítání a operace násobení reálnými čísly na dané obecné množině. Uvědomte si, že takto obecně zavedené operace mají se skutečným sčítáním a násobením reálných čísel

společně pouze to, že se označují stejnými symboly.

Definice 1.1: Řekneme, že na množině X je zadána **operace sčítání**, kterou budeme označovat symbolem $+$, je-li každé uspořádané dvojici (x, y) , kde $x, y \in X$, přiřazen nějaký prvek z množiny X nazývaný jejich součet a označovaný $x + y$.
Řekneme, že na množině X je zadána **operace násobení reálnými čísly**, kterou budeme označovat symbolem \cdot , je-li každé uspořádané dvojici (α, x) , kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$, přiřazen nějaký prvek z množiny X nazývaný jejich součin a označovaný $\alpha \cdot x$. Místo $\alpha \cdot x$ píšeme obvykle jen αx .

Definice 1.2: Necht' V je neprázdná množina, na které jsou definovány operace $+$ (sčítání) a operace \cdot (násobení reálnými čísly). Řekneme, že množina V spolu s těmito operacemi tvoří **lineární prostor**, jestliže operace $+$ a \cdot splňují následujících 8 podmínek (axiomů):

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ pro každé $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. (komutativní zákon)
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ pro každé $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$. (asociativní zákon)
3. Existuje prvek $\mathbf{o} \in V$ splňující $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$ pro každé $\mathbf{a} \in V$. Prvek \mathbf{o} se nazývá **nulový prvek**.
4. Ke každému prvku $\mathbf{a} \in V$ existuje prvek $-\mathbf{a}$ takový, že $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$. Prvek $-\mathbf{a}$ se nazývá **opačným prvkem** k prvku \mathbf{a} .
5. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ pro každé $\mathbf{a} \in V$.
6. $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{a}$ pro každé $\mathbf{a} \in V$ a každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (distributivní zákon)
7. $\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \cdot \mathbf{a} + \alpha \cdot \mathbf{b}$ pro každé $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$. (distributivní zákon)
8. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a})$ pro každé $\mathbf{a} \in V$ a každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

• **Poznámka 1.3:** Místo lineární prostor, se též někdy říká vektorový prostor a jeho prvky se pak nazývají vektory. Reálná čísla se pak v této souvislosti nazývají skaláry. V obecném případě budeme prvky lineárního prostoru značit malými tučnými písmeny a reálná čísla malými řeckými písmeny. Tak jsme již postupovali v předchozí definici.

• **Poznámka 1.4:** Je třeba si uvědomit, že symboly $+$ a \cdot jsou v předchozí definici používány pro dvě různé operace. Tak např. v podmínce 6. $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{a}$ je $\alpha + \beta$ sčítání reálných čísel, zatímco $\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{a}$ je sčítání prvků množiny V .

Podobně v podmínce 8. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a})$ je $\alpha \cdot \beta$ násobení reálných čísel, zatímco $\beta \cdot \mathbf{a}$ a $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{a})$ násobení prvků V reálnými čísly.

Zásadní důležitost pro nás budou mít následující dva příklady lineárních prostorů, a to prostor \mathbb{R}^n a prostor $C(I)$. Zatímco s prostorem \mathbb{R}^n jsme se již seznámili v kapitole 11

skript [MI], prostor $C(I)$ využijeme zejména v dalších kapitolách těchto skript při popisu řešení diferenciálních rovnic.

Prostor \mathbb{R}^n

Připomeňme si, že symbolem \mathbb{R}^n označujeme množinu všech uspořádaných n -tic reálných čísel, tj.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\} .$$

Prvky množiny \mathbb{R}^n nazýváme **vektory** a zapisujeme je obvykle se šipkou.

Pro $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ je **součtem vektorů** \vec{a} a \vec{b} vektor

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$$

Pro $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je α -**násobkem** vektoru \vec{a} vektor

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_1, \dots, \alpha \cdot a_n) \in \mathbb{R}^n$$

Místo zápisu $\alpha \cdot \vec{a}$ píšeme obvykle zkráceně $\alpha \vec{a}$.

Věta 1.5:

Množina \mathbb{R}^n spolu s operacemi $+$ a \cdot tvoří lineární prostor.

Důkaz:

Platnost podmínek 1., 2., 6., 7., 8. z definice 1.2 byla ukázána ve větě 11.1 v [MI]. Podmínka 5. je splněna triviálně. Ukážeme, že jsou splněny podmínky 3. a 4.

3. Volíme-li $\vec{0} = (0, \dots, 0)$, pak

$$\vec{a} + \vec{0} = (a_1, \dots, a_n) + (0, \dots, 0) = (a_1 + 0, \dots, a_n + 0) = (a_1, \dots, a_n) = \vec{a} .$$

4. Pro $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ zvolme $-\vec{a} = (-a_1, \dots, -a_n)$. Pak

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (a_1 - a_1, \dots, a_n - a_n) = (0, \dots, 0) = \vec{0} .$$

■

Prostor $C(I)$

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Symbolem $C(I)$ označujeme množinu všech funkcí definovaných a spojitých na intervalu I . Na množině $C(I)$ zavedeme operace sčítání a násobení reálnými čísly následujícím způsobem:

Definice 1.6: Jsou-li $f, g \in C(I)$, je $f + g$ taková funkce definovaná na intervalu I , jejíž hodnota v bodě $x \in I$ je $f(x) + g(x)$, tedy

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) .$$

Je-li $f \in C(I)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je αf taková funkce definovaná na I , jejíž hodnota v bodě $x \in I$ je $\alpha f(x)$, tedy

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) .$$

Protože součet spojitých funkcí a násobek spojitých funkcí reálným číslem jsou opět funkce spojité, viz věta 3.2 ze skript [MI], jsou definované operace operacemi na množině $C(I)$.

Věta 1.7:

Množina $C(I)$ spolu s operacemi $+$ a \cdot tvoří lineární prostor.

Důkaz:

Tvrzení plyne okamžitě z definice 1.6 těchto operací, podobně jako ve větě 1.5. Nulovým prvkem je (konstantní) nulová funkce, tj. funkce, která každému $x \in I$ přiřazuje hodnotu 0. Opačným prvkem k funkci f je funkce $-f$, kde $(-f)(x) = -f(x)$ pro $x \in I$. Podrobněji se k důkazu této věty a prostoru $C(I)$ vrátíme v odstavci 1.5 ■

• **Poznámka 1.8:** Zřejmě, je-li $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ libovolný vektor, pak $0 \cdot \vec{a} = \vec{0} = (0, \dots, 0)$. Stejně je-li $f \in C(I)$ libovolná spojitá funkce na I , pak $0 \cdot f = \Theta$, kde Θ je nulová funkce na I .

Podobně, pro libovolný vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ je $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$ a $-f = (-1) \cdot f$ pro libovolnou funkci $f \in C(I)$. Následující věta tvrdí, že tyto vztahy platí v jakémkoliv lineárním prostoru V , bez ohledu na to jakým konkrétním způsobem jsou operace sčítání a násobení reálnými čísly definovány. Tedy tyto vlastnosti lze odvodit pouze z axiomů 1. - 8. definice lineárního prostoru.

Věta 1.9:

Nechť V spolu s operacemi $+$ a \cdot je lineární prostor a nechť $\mathbf{a} \in V$ je libovolný prvek tohoto prostoru. Potom

1. $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$.
2. $(-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

Důkaz:

Z axiomů lineárního prostoru dostáváme

$$0 \mathbf{a} + \mathbf{a} = 0 \mathbf{a} + 1 \mathbf{a} = (0 + 1) \mathbf{a} = 1 \mathbf{a} = \mathbf{a} .$$

Tedy $0 \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ a přičtením prvku $-\mathbf{a}$ k oběma stranám této rovnosti dostáváme vztah 1. $0 \mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Podobně

$$(-1) \mathbf{a} + \mathbf{a} = (-1) \mathbf{a} + 1 \mathbf{a} = (-1 + 1) \mathbf{a} = 0 \mathbf{a} = \mathbf{o} .$$

Tedy $(-1) \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{o}$ a přičtením prvku $-\mathbf{a}$ k oběma stranám této rovnosti dostáváme vztah 2. $(-1) \mathbf{a} = -\mathbf{a}$. ■

V dalším textu zavedeme další nové pojmy jako pojmy lineární nezávislosti, báze, dimenze, podprostor lineárního prostoru a dokážeme některé věty týkající se těchto pojmů. Protože vyjdeme z obecné definice lineárního prostoru, budou tyto pojmy zavedeny také v každém konkrétním případě lineárního prostoru, speciálně v prostorech \mathbb{R}^n a $C(I)$. Navíc obecně dokázané výsledky budou samozřejmě platit i v těchto konkrétních příkladech. To

je jedna z podstatných výhod axiomatického přístupu. Samozřejmě obecná definice pojmu lineární nezávislosti bude pro případ prostoru \mathbb{R}^n stejná jako definice, kterou jsme podali ve skriptech [MI].

1.2 Lineární nezávislost

Definice 1.10: Necht' V je lineární prostor, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou nějaké prvky tohoto prostoru a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jsou reálná čísla. Prvek

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{a}_i$$

pak nazýváme **lineární kombinací** prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ a čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ **koeficienty** této lineární kombinace. Jsou-li všechna $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, nazýváme tuto lineární kombinaci **triviální**. (Triviální kombinace je vždy rovna nulovému prvku, neboť podle věty 1.9 je $0 \mathbf{a}_1 + \dots + 0 \mathbf{a}_k = \mathbf{o}$.) Je-li alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$, nazýváme lineární kombinaci **netriviální**.

Následující definice má v lineární algebře zásadní důležitost.

Definice 1.11: Necht' V je lineární prostor. **Systém prvků** $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ nazveme **lineárně nezávislým** (LN), jestliže pouze triviální lineární kombinace těchto prvků je rovna nulovému prvku \mathbf{o} , tj. každá netriviální lineární kombinace prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ je různá od \mathbf{o} . **Systém prvků** $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ nazveme **lineárně závislým** (LZ), jestliže není lineárně nezávislý, tj. existuje alespoň jedna netriviální lineární kombinace prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, která je rovna \mathbf{o} .

Tedy systém prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ je LN právě tehdy, když platí následující implikace

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{o} \implies \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_k = 0 .$$

- **Poznámka 1.12:** Porovnejte předchozí definice s definicemi 11.2 a 11.3 ze skript [MI]

Úmluva: Často budeme říkat, že prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ jsou LN, místo přesnějšího, že systém prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ je LN.

- **Poznámka 1.13:** V odstavci 11.4 skript [MI] jsme se naučili zjišťovat lineární závislost a nezávislost vektorů v prostoru \mathbb{R}^n . V libovolném lineárním prostoru V však platí následující dvě jednoduchá tvrzení:

1. Jsou-li v systému prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ dva prvky stejné (tj. $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$ pro nějaké $i \neq j$), jsou prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ LZ.
2. Je-li v systému prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ nulový prvek (tj. $\mathbf{a}_i = \mathbf{o}$ pro nějaké i), jsou prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ LZ.

Cvičení 1.14: Dokažte tvrzení předchozí poznámky.

Lineární závislost a nezávislost lze vyjádřit i následovně:

Věta 1.15:

Nechť V je lineární prostor. Prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ jsou LN právě tehdy, když žádný z nich nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Ekvivalentně: Prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ jsou LZ právě tehdy, když některý z nich je lineární kombinací ostatních.

Důkaz:

Je-li např. prvek \mathbf{a}_1 lineární kombinací ostatních, tj. $\mathbf{a}_1 = \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k$, pak prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ jsou LZ, protože $-1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \mathbf{o}$, a tedy existuje netriviální lineární kombinace prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$, která je rovna nulovému prvku.

Naopak, jsou-li prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ LZ, pak existuje jejich netriviální kombinace, která je rovna nulovému prvku, tj. existují $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tak, že $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \mathbf{o}$ a přitom alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$. Předpokládejme např., že $\alpha_1 \neq 0$. Potom

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \mathbf{a}_k,$$

a tedy prvek \mathbf{a}_1 je lineární kombinací prvků $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. ■

Při určování lineární závislosti a nezávislosti prvků lineárního prostoru \mathbb{R}^n (a tím také hodnoty matice) jsme podstatně využívali větu 11.3 ze skript [MI]. Tuto větu lze analogicky zformulovat i v obecném lineárním prostoru.

Věta 1.16:

Nechť V je lineární prostor. Potom platí:

1. Vynásobením některého prvku ze systému $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ nenulovým číslem se lineární závislost nebo nezávislost tohoto systému nezmění.
2. Přičtením nějakého prvku ze systému $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ k nějakému jinému prvku tohoto systému se lineární závislost nebo nezávislost tohoto systému nezmění.

• **Poznámka 1.17:** Z věty 1.16 plyne okamžitě následující tvrzení:

Přičteme-li k nějakému prvku ze systému $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ nějakou lineární kombinaci ostatních prvků, pak se lineární závislost nebo nezávislost tohoto systému nezmění.

1.3 Báze a dimenze lineárního prostoru

Definice 1.18: Je-li V lineární prostor, říkáme, že prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ tvoří **bázi** prostoru V , jestliže platí následující dvě podmínky:

1. Prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé,
2. Pro každý prvek $\mathbf{b} \in V$ existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tak, že $\mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k$.

• **Poznámka 1.19:** Druhá podmínka předchozí definice říká, že každý prvek $\mathbf{b} \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze. Říkáme, že prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ **generují** (nebo též vytvářejí) prostor V .

První podmínka definice 1.18 je podmínkou na minimálnost počtu prvků tvořících bázi. Platí totiž, že z každého konečného systému prvků, který generuje prostor V , lze vybrat lineárně nezávislý systém prvků, který rovněž generuje prostor V .

• **Příklad 1.20:** Uvažujme lineární prostor \mathbb{R}^3 . Vektory $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ a $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ jsou LN (z podmínky $\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ plyne zřejmě $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$) a generují prostor \mathbb{R}^3 , protože pro libovolný vektor $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ je

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 .$$

Vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ tedy tvoří bázi \mathbb{R}^3 .

Rovněž např. vektory $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1)$ a $\vec{a}_3 = (0, 0, 1)$ tvoří bázi \mathbb{R}^3 , neboť jsou LN (ověřte!) a pro $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ je

$$(b_1, b_2, b_3) = b_1(1, 1, 1) + (b_2 - b_1)(0, 1, 1) + (b_3 - b_2)(0, 0, 1) ,$$

jak se lze snadno přesvědčit.

• **Poznámka 1.21:** Vidíme, že lineární prostor má obecně více bází. Na druhou stranu prostor $C(I)$ nemá žádnou konečnou bázi, protože neexistuje konečně mnoho spojitých funkcí na I , jejichž lineárními kombinacemi by bylo možno vytvořit všechny spojitě funkce na I , tj. neexistuje konečně mnoho spojitých funkcí na I , které by generovaly $C(I)$.

Uvažujeme-li prostor \mathbb{R}^n , pak nejjednodušší bází je báze tvořená vektory $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$. Tuto bázi nazýváme **přirozenou bází** \mathbb{R}^n . (Symbolem \vec{e}_i označujeme vektor, který má všechny souřadnice rovny 0 s výjimkou i -té, která se rovná 1.)

Věta 1.22:

Tvoří-li prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ bázi lineárního prostoru V , pak každý prvek \mathbf{b} lze vyjádřit právě jedním způsobem jako lineární kombinaci prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$.

Důkaz:

Každý prvek $\mathbf{b} \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$, neboť prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří bázi V , a tedy V generují. Předpokládejme, že existují různá vyjádření prvku \mathbf{b}

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{a}_i \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{a}_i .$$

Ukážeme, že $\alpha_i = \beta_i$ pro $i = 1, \dots, k$. Zřejmě

$$\mathbf{0} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{a}_i - \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \beta_i) \mathbf{a}_i .$$

Odtud $\alpha_i = \beta_i$ pro $i = 1, \dots, k$, protože prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé, a tedy jediná jejich lineární kombinace dávající nulový prvek je triviální kombinace. ■

Následující věta, kterou nebudeme dokazovat, má celou řadu důležitých důsledků.

Věta 1.23:

Nechť prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ generují lineární prostor V , tj. každý prvek $\mathbf{a} \in V$ je lineární kombinací prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Nechť prvky $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in V$ jsou lineárně nezávislé. Potom pro čísla n a k platí vztah

$$k \leq n .$$

Důsledek 1: Nechť některá báze lineárního prostoru V je tvořena právě k prvky. Potom každá báze V je tvořena k prvky.

Důsledek 1 nám umožňuje zavést následující definici:

Definice 1.24: Říkáme, že **dimenze** lineárního prostoru V je k , a značíme $\dim V = k$, jestliže některá (a tudíž každá) báze V obsahuje právě k prvků.

• **Příklad 1.25:** Platí $\dim \mathbb{R}^n = n$, protože vektory $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^n .

Důsledek 2: Nechť $\dim V = k$ a nechť prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ jsou lineárně nezávislé. Potom prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří bázi V .

1.4 Podprostor lineárního prostoru

Definice 1.26: Necht' V je lineární prostor. Podmnožinu $V_1 \subset V$ nazveme **podprostorem** lineárního prostoru V jestliže platí:

1. $\mathbf{o} \in V_1$.
2. Je-li $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_1$, je pak i $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V_1$.
3. Je-li $\mathbf{a} \in V_1, \alpha \in \mathbb{R}$, je pak i $\alpha \mathbf{a} \in V_1$.

Jsou-li splněny podmínky 2. a 3. předchozí definice, říkáme, že množina V_1 je **uzavřena** vzhledem k operacím $+$ a \cdot . Je-li množina V_1 neprázdná, plyne podmínka 1. z podmínky 3.

Věta 1.27:

Každý podprostor V_1 lineárního prostoru V je opět lineární prostor, s týmiž operacemi $+$ a \cdot prostoru V uvažovanými pouze na množině V_1 .

Důkaz:

Podmínky 2. a 3. definice 1.26 zaručují, že výsledky operací $+$ a \cdot s prvky množiny V_1 jsou opět prvky množiny V_1 . Zbývá tedy ověřit, že tyto operace splňují axiomy lineárního prostoru. Zřejmě nulový prvek \mathbf{o} patří do V_1 , podle podmínky 1. a opačný prvek $-\mathbf{a}$ k prvku $\mathbf{a} \in V_1$ patří do V_1 , protože podle věty 1.9 je $-\mathbf{a} = -1 \mathbf{a}$. Ostatní axiomy pro operace $+$ a \cdot triviálně platí na V_1 , protože platí na "větší" množině V . ■

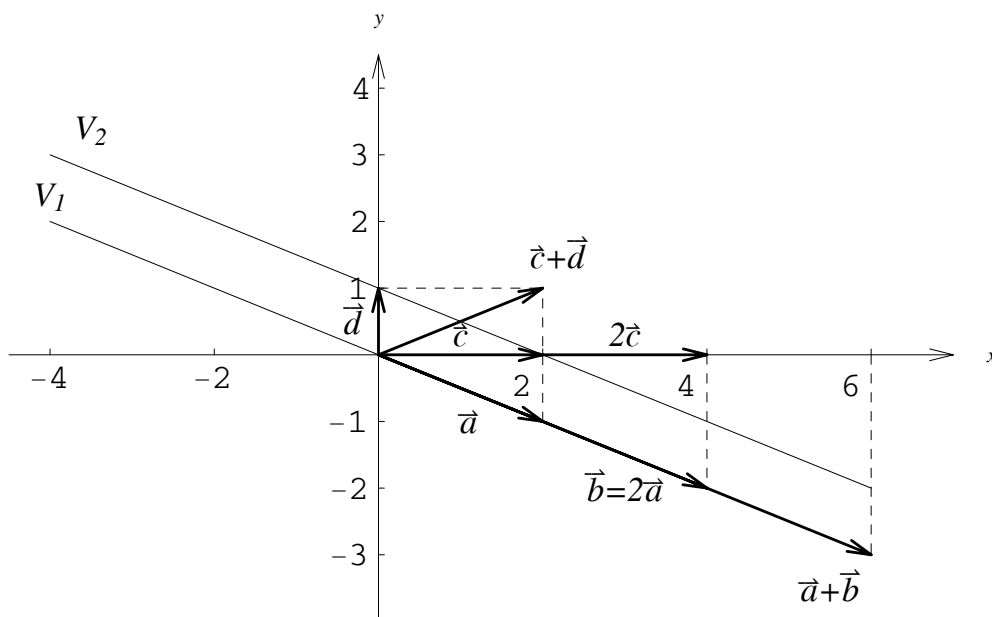
Existují dva tzv. **triviální podprostory** prostoru V . První podprostor sestává pouze z nulového prvku, tj. $V_1 = \{\mathbf{o}\}$, a druhý podprostor je celý původní prostor V , tj. $V_1 = V$.

• **Příklad 1.28:** Uvažujme množiny $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y = 0\}$ a $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y = 2\}$. Jsou V_1 a V_2 podprostory prostoru \mathbb{R}^2 ?

Řešení: Ověříme podmínky definice 1.26. Uvažujme nejprve množinu V_1 . Vektor $\vec{0} = (0, 0) \in V_1$, protože $0 + 2 \cdot 0 = 0$. Jsou-li $\vec{a} = (a_1, a_2) \in V_1$ a $\vec{b} = (b_1, b_2) \in V_1$, tj. $a_1 + 2a_2 = 0$ a $b_1 + 2b_2 = 0$, je pak i vektor $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ z V_1 , protože $(a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) = (a_1 + 2a_2) + (b_1 + 2b_2) = 0 + 0 = 0$. Konečně, je-li $\vec{a} = (a_1, a_2) \in V_1$, tj. $a_1 + 2a_2 = 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je pak i $\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2) \in V_1$, protože $\alpha a_1 + 2\alpha a_2 = \alpha(a_1 + 2a_2) = \alpha \cdot 0 = 0$. Tedy V_1 je podprostor \mathbb{R}^2 .

Naproti tomu pro množinu V_2 neplatí, že $\vec{0} = (0, 0) \in V_2$, tedy V_2 není podprostor \mathbb{R}^2 . (Ukažte, že ani další podmínky definice 1.26 množina V_2 nesplňuje.) Graficky jsou množiny V_1 a V_2 znázorněny na obr. 1.1.

Na obr. 1.1 si také ukážeme co znamenají podmínky definice 1.26 graficky. Vektor $\vec{0} = (0, 0)$ odpovídá počátku. Vidíme, že přímka znázorňující V_2 počátkem neprochází, tedy $\vec{0} \in V_1$, ale $\vec{0} \notin V_2$. Zvolíme-li např. $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (4, -2) \in V_1$, pak i $\vec{a} + \vec{b} = (6, -3) \in V_1$, ale pro $\vec{c} = (2, 0)$, $\vec{d} = (0, 1) \in V_2$ máme $\vec{c} + \vec{d} = (2, 3) \notin V_2$. Podobně např. $2\vec{a} = (4, -2) \in V_1$, ale $2\vec{c} = (4, 0) \notin V_2$, viz obr. 1.1.



Obrázek 1.1:

Cvičení 1.29: Tvoří množiny $V_1 = \{(a_1, a_2, 0); a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ a $V_2 = \{(a_1, a_2, 1); a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ podprostory prostoru \mathbb{R}^3 ?

Následující věta je důsledkem věty 1.23.

Věta 1.30:

Nechť V je lineární prostor, $\dim V = n$ a necht' $V_1 \subset V$ je lineární podprostor prostoru V , $V_1 \neq V$. Potom $\dim V_1 < n$.

Důkaz:

Nechť $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ je systém lineárně nezávislých prvků podprostoru V_1 , kde k je největší takové číslo. Podle věty 1.23 je $k \leq n$, ale protože $V_1 \neq V$, je $k < n$. Prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ již generují celý podprostor V_1 , neboť přidáním jakéhokoliv dalšího prvku z V_1 k prvkům $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vznikne lineárně závislý systém prvků z V_1 . Tedy prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ tvoří bázi V_1 a $\dim V_1 = k$. ■

• **Příklad 1.31:** Uvažujme lineární prostor $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y = 0\}$ z příkladu 1.28. Protože $V_1 \subset \mathbb{R}^2$, $V_1 \neq \mathbb{R}^2$ a $V_1 \neq \{\vec{0}\}$, je $\dim V_1 = 1$. Vektor $\vec{a} = (2, -1) \in V_1$ je nenulový, tedy sám o sobě lineárně nezávislý a tvoří tak bázi V_1 . Vektor \vec{a} tedy generuje celý prostor V_1 , tj. $V_1 = \{\alpha\vec{a}; \alpha \in \mathbb{R}\}$. Jinak řečeno, všechna řešení rovnice $x + 2y = 0$ jsou tvaru $(x, y) = \alpha(2, -1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tj. $x = 2\alpha$, $y = -\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, což jsou parametrické rovnice přímky $x + 2y = 0$.

Předchozí příklad je speciálním případem následující věty, jejíž první část je pouze přeformulováním věty 12.2 ze skript [MI] o struktuře řešení soustavy homogenních lineárních rovnic v termínech podprostoru a dimenze.

Věta 1.32:

Nechť je dána homogenní soustava lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$, kde \mathbf{A} je matice typu (m, n) . Pak všechna řešení této soustavy tvoří podprostor lineárního prostoru \mathbb{R}^n dimenze $n - h(\mathbf{A})$.

Naopak každý podprostor prostoru \mathbb{R}^n je množinou všech řešení nějaké homogenní soustavy lineárních rovnic o n -neznámých.

Cvičení 1.33: Najděte nějakou bázi a určete dimenzi lineárního prostoru V_1 ze cvičení 1.29.

• **Příklad 1.34:** Nechť \mathcal{P}_2 je množina všech polynomů $y = p(x)$, definovaných na \mathbb{R} , nejvýše druhého stupně. Ukažte, že \mathcal{P}_2 tvoří podprostor lineárního prostoru $C(\mathbb{R})$, najděte bázi prostoru \mathcal{P}_2 a určete jeho dimenzi.

Řešení: Polynomy nejvýše druhého stupně jsou spojité funkce a jsou to právě funkce tvaru $p(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tedy nulová funkce je polynom nejvýše druhého stupně, součet dvou polynomů nejvýše druhého stupně je polynom nejvýše druhého stupně a konečně násobek polynomu nejvýše druhého stupně je polynom nejvýše druhého stupně. Tedy množina \mathcal{P}_2 tvoří podprostor prostoru spojitých funkcí definovaných na \mathbb{R} . Ukážeme, že polynomy $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ a $p_3(x) = x^2$ tvoří bázi prostoru \mathcal{P}_2 .

1. Nejprve dokážeme, že tyto polynomy jsou lineárně nezávislé. Vezmeme jejich libovolnou netriviální lineární kombinaci, tj.

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2,$$

což je polynom nejvýše druhého stupně. Kdyby se tato lineární kombinace rovnala nulové funkci, znamenalo by to, že nenulový polynom má nekonečně mnoho kořenů, což není možné.

2. Každý polynom $ax^2 + bx + c$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci polynomů p_1, p_2, p_3 . Je totiž zřejmé

$$ax^2 + bx + c = ap_3(x) + bp_2(x) + cp_1(x).$$

(Poznamenejme, že v následujícím odstavci se naučíme zjišťovat lineární nezávislost v prostorech funkcí snadnějším způsobem s použitím Wronského determinantu.)

1.5 Lineární prostor funkcí $C(I)$ a $C^n(I)$

V teorii lineárních diferenciálních rovnic budeme v dalších kapitolách těchto skript pracovat s množinami funkcí, které jsou lineárními prostory. Zde se budeme podrobněji zabývat prostorem $C(I)$ spojitých funkcí a prostory $C^n(I)$. Pojmy probírané v tomto odstavci se často vyskytují i v jiných oblastech aplikované matematiky jako např. v teorii Fourierových řad (matematické základy kvantové mechaniky), v teorii interpolace apod.

Definice 1.35: Symbolem $C(I)$ označujeme množinu všech funkcí spojitých na intervalu I . Symbolem $C^n(I)$ označujeme množinu všech funkcí, které mají na intervalu I spojitě derivace až do řádu n včetně.

• **Poznámka 1.36:** Zřejmě $C^n(I) \subset C(I)$.

Věta 1.37:

(i) Množina $C(I)$ tvoří vzhledem k operacím sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem lineární prostor.

(ii) Množina $C^n(I)$ je lineárním podprostorem prostoru $C(I)$.

Důkaz:

(i) Aby množina $C(I)$ opatřená výše uvedenými operacemi byla lineárním prostorem, musí tyto operace splňovat následujících 8 vlastností, viz definice 1.2 v odstavci 1.1.

1. Pro každé $f, g \in C(I)$ platí $f + g = g + f$, tj. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ pro všechna $x \in I$, neboť poslední rovnost je rovnost mezi reálnými čísly.

2. Pro každé $f, g, h \in C(I)$ platí

$$(f + g) + h = f + (g + h), \text{ tj. } (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

pro všechna $x \in I$.

3. V množině $C(I)$ existuje nulová funkce Θ , tj. funkce $\Theta(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, pro níž platí: Pro každou $f \in C(I)$ je

$$f + \Theta = f, \text{ tj. } f(x) + \Theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

pro všechna $x \in I$.

4. Ke každé funkci $f \in C(I)$ existuje funkce $-f$ tak, že platí $f + (-f) = \Theta$. Zřejmě $(-f)(x) = -f(x)$.

5. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f, g \in C(I)$ platí

$$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g, \text{ tj. } \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$$

pro všechna $x \in I$.

6. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in C(I)$ platí $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$, tj. $(\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$ pro všechna $x \in I$.

7. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in C(I)$ platí

$$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f, \text{ tj. } (\alpha(\beta f(x))) = (\alpha\beta)f(x)$$

pro všechna $x \in I$.

8. $1f = f$.

(ii) K důkazu toho, že $C^n(I)$ je lineárním podprostorem prostoru $C(I)$ si stačí uvědomit, že libovolná lineární kombinace $\alpha f(x) + \beta g(x)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $f, g \in C^n(I)$ je opět funkcí, která má spojitě derivace až do řádu n včetně. Tudíž $C^n(I)$ je lineárním podprostorem prostoru $C(I)$.

Jelikož $C(I)$ je lineární prostor, má smysl hovořit o lineární závislosti, resp. nezávislosti funkcí z $C(I)$. Připomeňme si tyto pojmy podrobněji. Výraz $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_k f_k(x)$ nazýváme lineární kombinací prvků prostoru $C(I)$ s koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. ■

Definice 1.38: a) Říkáme, že funkce

$$f_1, f_2, \dots, f_k \in C(I) \quad (1.1)$$

jsou **lineárně závislé**, jestliže některá jejich **netriviální** lineární kombinace je rovna **nulové funkci**, tj. existují čísla c_1, c_2, \dots, c_k (z nichž alespoň jedno je různé od nuly) taková, že

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_k f_k(x) = 0 \quad (1.2)$$

pro všechna $x \in I$.

b) Říkáme, že funkce (1.1) jsou **lineárně nezávislé**, jestliže pouze **triviální** lineární kombinace těchto funkcí je rovna nulové funkci, tj. vztah (1.2) platí pro všechna $x \in I$ jen když $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

• **Poznámka 1.39:** Funkce $f_1, f_2, \dots, f_k \in C(I)$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, platí-li pro ně následující implikace:

$$\text{Je-li } \sum_{i=1}^k c_i f_i(x) = 0 \text{ pro každé } x \in I, \text{ je pak } c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0 .$$

• **Příklad 1.40:** Necht' $I = (-\infty, +\infty)$. Uvažujme funkce

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x^3 \quad (1.3)$$

z prostoru $C(I)$.

Ukážeme, že tyto funkce jsou lineárně nezávislé v $C(I)$.

Řešení: Budiž

$$a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (1.4)$$

libovolná lineární kombinace funkcí (1.3). Uvědomme si, že lineární kombinace (1.4) je polynom nejvýše třetího stupně. Postupujme podle poznámky 1.39. Necht'

$$a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0, \quad (1.5)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že ze vztahu (1.5) plyne $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Vztah (1.5) lze chápat jako algebraickou rovnici nejvýše třetího stupně. Jakmile alespoň jedno z čísel a_0, a_1, a_2, a_3 je různé od nuly, pak má tato rovnice nejvýše tři kořeny, tj. pro nejvýše tři hodnoty proměnné x může být lineární kombinace (1.4) rovna nule. Tedy vztah (1.5) lze splnit pro všechna $x \in \mathbb{R}$ pouze pro $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Tedy funkce $1, x, x^2, x^3$ jsou lineárně nezávislé.

• **Poznámka 1.41:** Zcela obdobně lze ukázat, že funkce $1, x, x^2, \dots, x^n$, kde n je libovolné přirozené číslo, jsou lineárně nezávislé. Tudíž v lineárním prostoru $C(I)$ existují množiny lineárně nezávislých funkcí, které mají libovolně mnoho prvků. Z tohoto faktu

vyplývá, že báze lineárního prostoru $C(I)$, (pokud existuje), musí mít nekonečně mnoho prvků a tudíž říkáme, že dimenze prostoru $C(I)$ je nekonečná, $\dim C(I) = \infty$. Prostor $C(I)$ všech spojitých funkcí na intervalu I je prvním příkladem nekonečně-dimenzionálního lineárního prostoru, s nímž se setkáváme.

• **Příklad 1.42:** Ukažme, že funkce

$$\cos 2x, \sin 2x, \cos^2 x, \sin^2 x$$

jsou lineárně závislé v prostoru $C(\mathbb{R})$.

Řešení: K tomuto cíli stačí sestavit netriviální lineární kombinaci těchto funkcí, která by se rovnala nulové funkci. Zřejmě platí

$$1 \cdot \cos 2x + 0 \cdot \sin 2x - 1 \cdot \cos^2 x + 1 \cdot \sin^2 x = 0$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$, což jsme měli dokázat.

Cvičení 1.43: Jsou funkce $\cos^2 x, \sin^2 x, 1$ v $C(\mathbb{R})$ lineárně závislé?

Užitečnou pomůckou pro vyšetřování lineární nezávislosti funkcí f_1, f_2, \dots, f_k z $C^{k-1}(I)$ je tzv. **Wronského determinant (Wronskián)** funkcí f_1, \dots, f_k , kterým rozumíme determinant

$$W(x) = W_{f_1, f_2, \dots, f_k}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \dots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

• **Příklad 1.44:** Wronského determinant funkcí $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = x^3$ je roven

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12.$$

Věta 1.45:

Nechť mají funkce f_1, f_2, \dots, f_k derivace řádu $k - 1$ a necht' jsou lineárně závislé v $C(I)$. Pak

$$W_{f_1, f_2, \dots, f_k}(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Cvičení 1.46: Dokažte větu 1.45.

• **Poznámka 1.47:** Pro praktické zjišťování lineární nezávislosti funkcí je vhodnější tato ekvivalentní formulace věty 1.45:

Věta 1.48:

Je-li $W_{f_1, \dots, f_k}(x) \neq 0$ alespoň pro jedno $x \in I$, pak jsou funkce f_1, f_2, \dots, f_k lineárně nezávislé v prostoru $C(I)$.

Z věty 1.48 a příkladu 1.44 plyne, že funkce $1, x, x^2, x^3$ jsou lineárně nezávislé, jak jsme dokázali v příkladě 1.40. Z příkladů 1.40 a 1.44 je vidět, že použití Wronského determinantu ke zjišťování lineární nezávislosti funkcí je pohodlnější, než použití definice 1.38.

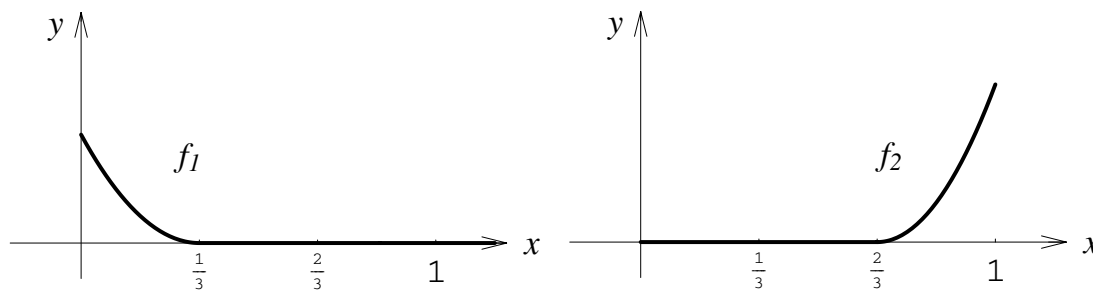
- **Příklad 1.49:** Funkce $\sin x, \cos x$ jsou lineárně nezávislé, neboť pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0.$$

- **Poznámka 1.50:** POZOR! Implikaci věty 1.45 (nebo věty 1.48) nelze obrátit. Z toho, že $W_{f_1, \dots, f_k}(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ neplyne ještě, že funkce f_1, f_2, \dots, f_k jsou lineárně závislé, jak ukazuje následující příklad, viz obr. 1.2. Na tomto obrázku jsou zakresleny grafy dvou spojitých funkcí f_1 a f_2 tak, že funkce f_1 je kladná na intervalu $\langle 0, 1/3 \rangle$ a rovna nule na intervalu $\langle 1/3, 1 \rangle$. Funkce f_2 je nulová na $\langle 0, 2/3 \rangle$ a kladná na $\langle 2/3, 1 \rangle$. Wronskián těchto funkcí

$$W_{f_1, f_2}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$$

je identicky roven nule pro $\forall x \in \langle 0, 1 \rangle$. Přesto zřejmě funkce f_1, f_2 nejsou lineárně závislé na $\langle 0, 1 \rangle$.



Obrázek 1.2:

Návody ke cvičením z kap. 1

- 1.14** Pro obě tvrzení hledejte netriviální lineární kombinaci daných prvků, která dá nulový prvek.
- 1.29** Je třeba rozhodnout, zda pro množiny V_1 a V_2 platí vztahy 1.-3. definice 1.26.
- 1.33** Dokažte, že vektory $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ tvoří bázi prostoru V_1 .
- 1.43** Pokuste se najít netriviální lineární kombinaci rovnající se nulové funkci.
- 1.46** Z předpokladu LZ funkcí plyne existence čísel c_1, \dots, c_k (z nichž alespoň jedno je nenulové) tak, že platí $c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x) = 0, \forall x \in I$. Tuto rovnici postupně zderivujte $(k - 1)$ krát a dostanete homogenní soustavu lineárních rovnic pro pevné x a neznámé c_1, \dots, c_k , tj. homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic s nenulovým řešením. Jaký musí být determinant matice této soustavy?

Kapitola 2

Lineární zobrazení

2.1 Definice a vlastnosti lineárního zobrazení

V tomto odstavci zavedeme pojem lineárního zobrazení jednoho lineárního prostoru do druhého. Lineární prostor je charakterizován dvěma operacemi, operací sčítání prvků lineárního prostoru a operací násobení prvků lineárního prostoru reálnými čísly. Lineární zobrazení budeme definovat jako takové zobrazení, které se k těmto operacím chová v jistém smyslu "pěkně".

Definice 2.1: Nechť U a V jsou lineární prostory. Zobrazení $L : U \rightarrow V$ nazveme **lineárním**, jestliže

- 1) $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ pro každé $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$,
- 2) $L(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot L(\mathbf{u})$ pro každé $\mathbf{u} \in U, \alpha \in \mathbb{R}$.

• **Poznámka 2.2:** 1. Z předchozí definice okamžitě plyne, že pro libovolné lineární zobrazení $L : U \rightarrow V$ lineárního prostoru U do lineárního prostoru V platí

$$L\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i L(\mathbf{u}_i),$$

pro každé $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$ a pro každé $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, tedy obrazem lineární kombinace je lineární kombinace obrazů.

2. Pro nulový prvek $\mathbf{o}_1 \in U$ platí, že $L(\mathbf{o}_1)$ je nulový prvek \mathbf{o}_2 prostoru V . Opravdu,

$$L(\mathbf{o}_1) = L(0 \cdot \mathbf{o}_1) = 0 \cdot L(\mathbf{o}_1) = \mathbf{o}_2.$$

Následující příklad popisuje všechna lineární zobrazení prostoru reálných čísel do prostoru reálných čísel. V následujícím odstavci pak popíšeme všechna lineární zobrazení prostoru \mathbb{R}^n do prostoru \mathbb{R}^m .

• **Příklad 2.3:** Nechť $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je libovolné lineární zobrazení. Ukážeme, že pak existuje taková konstanta $a \in \mathbb{R}$, že $L(u) = a \cdot u$, pro každé $u \in \mathbb{R}$. Opravdu, označíme-li $L(1) = a$, pak

$$L(u) = L(u \cdot 1) = u \cdot L(1) = u \cdot a = a \cdot u ,$$

kde jsme využili vlastnosti 2) z definice 2.1.

• **Poznámka 2.4:** Z předchozího příkladu plyne, že lineární funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pokud jsou chápány jako lineární zobrazení lineárních prostorů, jsou právě funkce tvaru $f(x) = ax$, kde $a \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta. Někdy, zvláště v teorii reálných funkcí reálné proměnné, se lineární funkcí nazývají funkce tvaru $f(x) = ax + b$, (název plyne z toho, že grafem funkce $f(x) = ax + b$ je přímka, anglicky "line"). Tyto funkce ovšem nesplňují podmínky 1) a 2) definice 2.1, pokud $b \neq 0$.

• **Příklad 2.5:** Ukažte, že zobrazení $L : C(\langle a, b \rangle) \rightarrow \mathbb{R}$, které je definováno předpisem $L(f) = \int_a^b f(x) dx$ pro každé $f \in C(\langle a, b \rangle)$, je lineární.

Řešení: Pro $f \in C(\langle a, b \rangle)$ integrál $L(f) = \int_a^b f(x) dx$ existuje, protože f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Zřejmě pro každé $f, g \in C(\langle a, b \rangle)$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$L(f + g) = \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx = L(f) + L(g),$$

$$L(\alpha \cdot f) = \int_a^b \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx = \alpha \cdot L(f) .$$

• **Příklad 2.6:** Ukažme, že zobrazení $L : C^1(I) \rightarrow C(I)$, které je definováno předpisem $L(f) = f'$ pro každé $f \in C^1(I)$, je lineární.

Řešení: Zřejmě pro každé $f, g \in C^1(I)$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$L(f + g) = (f + g)' = f' + g' = L(f) + L(g)$$

$$L(\alpha \cdot f) = (\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f' = \alpha \cdot L(f) .$$

Následující důležitou větu využijeme podstatně při důkazu věty 2.12 v příštím odstavci.

Věta 2.7:

Nechť U a V jsou lineární prostory a prvky $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ tvoří bázi prostoru U . Zvolme prvky $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ libovolně. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $L : U \rightarrow V$ takové, že

$$L(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i \tag{2.1}$$

pro každé $i = 1, \dots, n$.

Důkaz:

Zvolme $\mathbf{u} \in U$ libovolně. Podle věty 1.22 lze \mathbf{u} vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i .$$

Má-li tedy lineární zobrazení $L : U \longrightarrow V$ splňovat podmínku (2.1), musí nutně platit

$$L(\mathbf{u}) = L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i .$$

Definujme tedy zobrazení L předpisem

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i .$$

Snadno se ověří, že takto definované zobrazení $L : U \longrightarrow V$ je lineární. ■

• **Poznámka 2.8:** Jinými slovy předchozí věta říká, že lineární zobrazení je hodnotami na bázi jednoznačně určeno a naopak libovolnou volbu těchto hodnot lze rozšířit na lineární zobrazení celého prostoru.

Jak uvidíme dále s konkrétními příklady následující věty jsme se již setkali při řešení soustav lineárních homogenních rovnic a setkáme se dále při řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Věta 2.9:

Nechť $L : U \longrightarrow V$ je lineární zobrazení. Potom $\mathcal{N}(L) = \{\mathbf{u} \in U; L(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}$ je lineární podprostor prostoru U .

Důkaz:

Ověříme podmínky definice 1.26.

1. Podle poznámky 2.2 patří nulový prvek prostoru U do množiny $\mathcal{N}(L)$.
2. Patří-li prvky \mathbf{u} a \mathbf{v} do $\mathcal{N}(L)$, tj. $L(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ a $L(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, pak

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o} ,$$

a tedy i prvek $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ patří do $\mathcal{N}(L)$.

3. Patří-li prvek \mathbf{u} do $\mathcal{N}(L)$, tj. $L(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak

$$L(\alpha \cdot \mathbf{u}) = \alpha \cdot L(\mathbf{u}) = \alpha \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o} ,$$

a tedy i prvek $\alpha \cdot \mathbf{u}$ patří do $\mathcal{N}(L)$. ■

Definice 2.10: Podprostor $\mathcal{N}(L)$ nazýváme **jádrem** lineárního zobrazení L , někdy též nulovým prostorem zobrazení L .

2.2 Lineární zobrazení \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m

V předchozím odstavci jsme zavedli pojem lineárního zobrazení mezi dvojicí libovolných lineárních prostorů. V tomto odstavci popíšeme, jak vypadají všechna lineární zobrazení prostoru \mathbb{R}^n do prostoru \mathbb{R}^m a ukážeme některé jejich vlastnosti v souvislosti s řešením soustav lineárních rovnic.

• **Příklad 2.11:** Necht \mathbf{A} je matice typu (m, n) . Definujme zobrazení L prostoru \mathbb{R}^n do prostoru \mathbb{R}^m předpisem

$$L(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \text{ pro každé } \vec{x} \in \mathbb{R}^n .$$

(Na \vec{x} pohlížíme jako na sloupcový vektor, tedy jako matici typu $(n, 1)$, $\mathbf{A} \cdot \vec{x}$ je pak matice typu $(m, 1)$, tedy vektor z prostoru \mathbb{R}^m .) Ukažme, že zobrazení L je lineární.

Řešení: Ověříme podmínky definice 2.1. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

1. $L(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{A} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} + \mathbf{A} \cdot \vec{y} = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$,
2. $L(\alpha \vec{x}) = \mathbf{A} \cdot (\alpha \vec{x}) = \alpha(\mathbf{A} \cdot \vec{x}) = \alpha L(\vec{x})$.

Tedy zobrazení L je lineární.

Je-li lineární zobrazení L určeno pomocí matice jako v předchozím příkladě, říkáme, že zobrazení L je **reprezentováno** maticí \mathbf{A} nebo že matice \mathbf{A} **reprezentuje** zobrazení L .

Následující věta říká, že jiná lineární zobrazení prostoru \mathbb{R}^n do prostoru \mathbb{R}^m než zobrazení reprezentovaná maticí typu (m, n) nejsou. Všimněte si, že příklad 2.3 je speciálním případem této věty pro zobrazení z \mathbb{R} do \mathbb{R} .

Věta 2.12:

Zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární právě tehdy, když existuje matice \mathbf{A} tak, že

$$L(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \text{ pro každé } \vec{x} \in \mathbb{R}^n .$$

Důkaz:

V předchozím příkladě jsme ukázali, že každá matice typu (m, n) reprezentuje lineární zobrazení. Zbývá tedy ukázat, že každé lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je reprezentováno nějakou maticí typu (m, n) . Necht tedy $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení. Uvažujme přirozenou bázi $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ prostoru \mathbb{R}^n . Označme symbolem \vec{a}_i sloupcový vektor $L(\vec{e}_i) \in \mathbb{R}^m$ pro $i = 1, \dots, n$. Necht \mathbf{A} je matice typu (m, n) , jejíž i -tý sloupec tvoří právě vektor \vec{a}_i , $i = 1, \dots, n$. Potom $L(\vec{e}_i) = \vec{a}_i = \mathbf{A} \cdot \vec{e}_i$ a zobrazení L se shoduje se zobrazením reprezentovaným maticí \mathbf{A} na bázi $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ prostoru \mathbb{R}^n . Tedy podle věty 2.7 jsou tato dvě lineární zobrazení stejná a L je reprezentováno maticí \mathbf{A} . ■

• **Příklad 2.13:** Necht $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dáno předpisem

$$\text{a) } L([x_1, x_2]^T) = [2x_1 - 3x_2, -x_1, x_1 + x_2]^T,$$

$$\text{b) } L([x_1, x_2]^T) = [x_1 - x_2, x_2 + 1, x_1 \cdot x_2]^T$$

Zjistěme, zda L je lineární zobrazení a v kladném případě najdeme matici \mathbf{A} , která reprezentuje zobrazení L .

Řešení: a) Je-li L lineární zobrazení, pak podle věty 2.12 musí existovat matice \mathbf{A} typu $(3, 2)$ tak, že

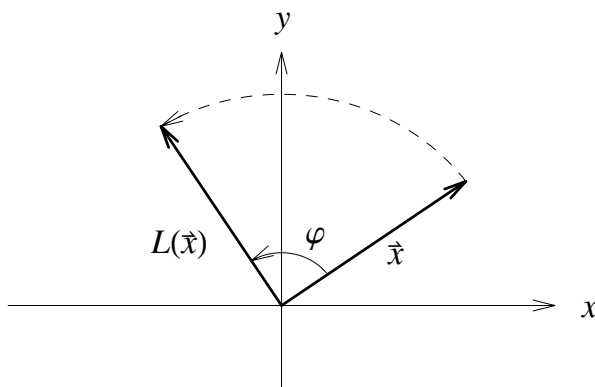
$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Zřejmě první řádek matice musí být vektor $(2, -3)$, druhý vektor $(-1, 0)$ a třetí vektor $(1, 1)$. Tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

b) V tomto případě zobrazení L není lineární, protože např. $L([0, 0]^T) \neq [0, 0, 0]^T$ (ověřte!), což musí nutně podle poznámky 2.2 pro lineární zobrazení platit.

• **Příklad 2.14:** Uvažujme lineární prostor \mathbb{R}^2 . Zvolme pevně úhel $\varphi \in \mathbb{R}$ a definujme zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tak, že pro každé $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ je $L(\vec{x})$ vektor, který vznikne otočením vektoru \vec{x} o úhel φ v kladném směru, tj. proti směru hodinových ručiček, viz obr. 2.1.



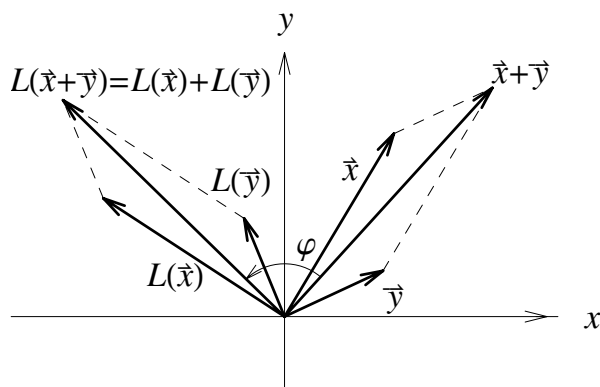
Obrázek 2.1:

Ukážeme, že L je lineární zobrazení a najdeme matici, která toto zobrazení reprezentuje. (Taková matice podle věty 2.12 nutně existuje.)

Nejprve ověříme podmínky definice 2.1. Rovnost

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y}) \tag{2.2}$$

vyjadřuje, že otočením součtu vektorů \vec{x} a \vec{y} o úhel φ dostaneme stejný vektor, jako když nejprve vektory \vec{x} a \vec{y} otočíme o úhel φ a tyto otočené vektory pak sečteme, viz. obr. 2.2.

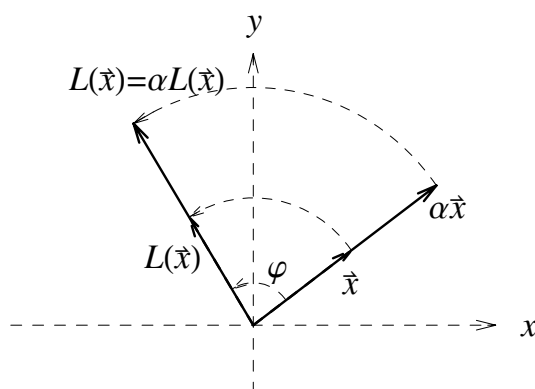


Obrázek 2.2:

Zřejmě rovnoběžník určený vektory \vec{x} a \vec{y} přejde otočením o úhel φ na rovnoběžník určený vektory $L(\vec{x})$ a $L(\vec{y})$, a tedy úhlopříčka $\vec{x} + \vec{y}$ prvního rovnoběžníka přejde otočením o úhel φ na úhlopříčku $L(\vec{x}) + L(\vec{y})$ druhého rovnoběžníka, tj. platí vztah (2.2). Podobně vztah

$$L(\alpha\vec{x}) = \alpha L(\vec{x})$$

vyjadřuje, že otočením α -násobku vektoru \vec{x} o úhel φ dostaneme stejný vektor, jako když číslem α vynásobíme vektor vzniklý otočením vektoru \vec{x} o úhel φ , viz obr. 2.3. Tedy zobrazení L je lineární.



Obrázek 2.3:

Pro nalezení matice \mathbf{A} , která reprezentuje zobrazení L využijeme větu 2.7. Stačí zjistit obrazy vektorů $\vec{e}_1 = [1, 0]^T$ a $\vec{e}_2 = [0, 1]^T$. Zřejmě

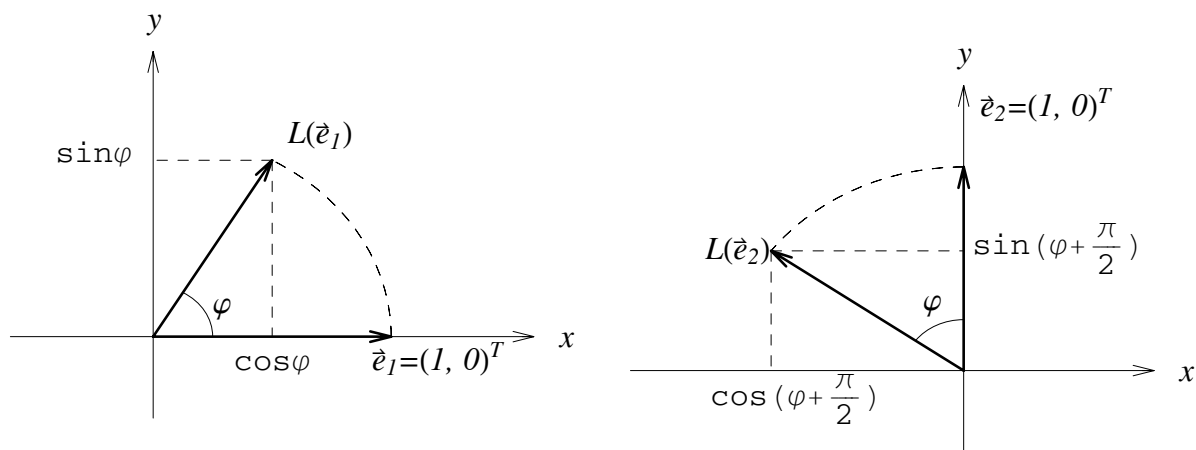
$$L(\vec{e}_1) = [\cos \varphi, \sin \varphi]^T,$$

$$L(\vec{e}_2) = [\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}), \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})]^T = [-\sin \varphi, \cos \varphi]^T,$$

viz obr. 2.4.

Protože $L(\vec{e}_i) = \mathbf{A}\vec{e}_i$, pro $i = 1, 2$, tvoří vektory $L(\vec{e}_1)$ a $L(\vec{e}_2)$ nutně první a druhý sloupec matice \mathbf{A} . Tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$



Obrázek 2.4:

Cvičení 2.15: Zjistěte obraz \vec{y} vektoru $\vec{x} = [2, -3]^T$ při otočení o úhel $\varphi = 60^\circ$ v kladném směru.

Následující důležitá věta ukazuje souvislost mezi skládáním lineárních zobrazení a násobením matic.

Věta 2.16:

Nechť $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení reprezentované maticí \mathbf{A} typu (k, n) a necht' $K : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení reprezentované maticí \mathbf{B} typu (m, k) . Pak $K \circ L$ je lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m reprezentované maticí $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Na závěr tohoto odstavce ukážeme, jak je možno některé vlastnosti lineárního zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ formulovat pomocí vlastností matice, která jej reprezentuje. Využijeme přitom výsledků kapitoly 12 skript [MI].

• **Poznámka 2.17:** Necht' $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení, které je reprezentováno maticí A typu (m, n) . Pak zřejmě podle věty 2.9 je

$$\mathcal{N}(L) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n ; A\vec{x} = \vec{0} \}$$

podprostorem lineárního prostoru \mathbb{R}^n . To bylo také částí tvrzení věty 1.32.

Připomeňme, že zobrazení $f : M \rightarrow N$ množiny M do množiny N nazýváme **prosté**, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Zobrazení $f : M \rightarrow N$ nazýváme zobrazením **na**, jestliže pro každé $y \in N$ existuje $x \in M$ tak, že $f(x) = y$, tj. je-li oborem hodnot zobrazení f množina N .

Věta 2.18:

Nechť $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární zobrazení a matice \mathbf{A} typu (m, n) je matice, která jej reprezentuje. Potom:

- a) Zobrazení L je prosté právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$.
- b) Zobrazení L je na \mathbb{R}^m právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = m$.

Důkaz:

a) Zobrazení L je prosté, jestliže pro každé dva vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ je $\mathbf{A}\vec{x}_1 \neq \mathbf{A}\vec{x}_2$. To nastane právě tehdy, když pro každé $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ má soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ nejvýše jedno řešení. Podle věty 13.3 ze skript [MI] má soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ nejvýše jedno řešení pro každé $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ právě tehdy, když příslušná homogenní soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ má jediné řešení. To nastane podle věty 13.2 ze skript [MI] právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$.

b) Zobrazení L je na, jestliže pro každé $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ existuje alespoň jedno $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tak, že $L(\vec{x}) = \vec{b}$, tedy, jestliže pro každé $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ má soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ alespoň jedno řešení. To nastane podle věty 13.1 ze skript [MI] právě tehdy, když pro každé $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ je $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\vec{b})$, tj. každý vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ je lineární kombinací sloupců matice \mathbf{A} . Tedy zobrazení L je na právě tehdy, když sloupce matice \mathbf{A} generují celý prostor \mathbb{R}^m , tj. když $h(\mathbf{A}) = m$. ■

2.3 Inverzní matice

Dříve než zavedeme pojem inverzní matice, připomeňme si nejprve definici inverzního zobrazení. Je-li $f : M \rightarrow N$ zobrazení, které je prosté a na, pak inverzním zobrazením, které značíme f^{-1} , rozumíme zobrazení $f^{-1} : N \rightarrow M$ definované předpisem

$$f^{-1}(y) = x \quad \iff \quad f(x) = y$$

pro každé $y \in N$. (Srovnej s definicí inverzní funkce ze skript [MI].) Zřejmě $f^{-1} \circ f = id_M$ a $f \circ f^{-1} = id_N$, kde id_M a id_N jsou identická zobrazení množin M a N , tj. $id_M(x) = x$ a $id_N(y) = y$ pro každé $x \in M$ a $y \in N$.

Uvažujme nyní lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ reprezentované maticí \mathbf{A} typu (m, n) . Zkoumejme, kdy existuje inverzní zobrazení L^{-1} , tj. kdy je zobrazení L prosté a na. To je podle věty 2.18 právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = m = n$, tedy právě tehdy, když je matice \mathbf{A} čtvercová a regulární. Obecně lze snadno ukázat, že je-li $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení, které je prosté a na, je též inverzní zobrazení $L^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineární. Čtvercovou maticí řádu n , která reprezentuje toto lineární zobrazení pak nazýváme **inverzní maticí** k matici \mathbf{A} a značíme ji \mathbf{A}^{-1} .

Jelikož identické zobrazení $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zřejmě reprezentováno jednotkovou maticí \mathbf{E} , dostáváme s využitím věty 2.16 následující ekvivalentní definici inverzní matice.

Definice 2.19: Je-li \mathbf{A} čtvercová matice řádu n , pak **inverzní maticí** k matici \mathbf{A} rozumíme takovou (čtvercovou) maticí \mathbf{A}^{-1} (řádu n) pro kterou platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Analogie s reálnými čísly, kde $a \cdot a^{-1} = 1$ pro $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, je zřejmá. Dá se ukázat, že ze vztahu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$, plyne též $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

V předchozím jsme ukázali, že regulárnost matice \mathbf{A} je nutnou a postačující podmínkou pro existenci inverzní matice. Následující věta zároveň dává vzorec pro její výpočet pomocí determinantů. Tento vzorec je vhodný pro výpočet inverzní matice k maticím řádu $n \leq 3$. Pro matice vyšších řádů je výhodnější použít Gaussovu-Jordanovu metodu,

se kterou se seznámíme dále.

Věta 2.20:

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n . Potom inverzní matice k matici \mathbf{A} existuje právě tehdy, je-li $\det \mathbf{A} \neq 0$, tedy právě tehdy, je-li \mathbf{A} regulární matice. V tomto případě je inverzní matice dána vztahem

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T, \quad (2.3)$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij} , tj. $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, viz definice 11.10 a následující poznámka ze skript [MI].

Důkaz:

1. Existuje-li inverzní matice \mathbf{A}^{-1} k matici \mathbf{A} , pak jak jsme v předchozím ukázali je matice \mathbf{A} nutně regulární. (Jiný důkaz poskytne věta 11.16 ze skript [MI]. Podle této věty je

$$1 = \det \mathbf{E} = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1},$$

tedy nutně $\det \mathbf{A} \neq 0$.)

2. Je-li $\det \mathbf{A} \neq 0$, ověříme, že matice \mathbf{A}^{-1} daná vztahem (2.3) splňuje rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$. Je třeba ověřit, že skalární součin i -tého řádku matice \mathbf{A} a j -tého sloupce matice \mathbf{A}^{-1} je roven 1 pro $i = j$, a je roven 0 pro $i \neq j$. Pro jednoduchost to ověříme pouze pro $i = 1, 2$ a $j = 1$. Pro ostatní i, j je důkaz naprosto analogický.

a) Skalární součin prvního řádku matice \mathbf{A} a prvního sloupce matice \mathbf{A}^{-1} je dán vztahem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det \mathbf{A}}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \cdot (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}) &= \frac{1}{\det \mathbf{A}}(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}) = \\ &= \frac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = 1, \end{aligned}$$

protože $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \det \mathbf{A}$.

b) Skalární součin druhého řádku matice \mathbf{A} a prvního sloupce matice \mathbf{A}^{-1} je dán vztahem

$$\frac{1}{\det \mathbf{A}}(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \cdot (A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}A_{1n}) = 0,$$

protože $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \dots + a_{2n}A_{1n}$ je rozvoj determinantu (podle 1. řádku) matice, která vznikne z matice \mathbf{A} tak, že první řádek matice \mathbf{A} nahradíme jejím druhým řádkem. (Je třeba si uvědomit, že algebraické doplňky prvků v 1. řádku, vůbec nezávisejí na hodnotách prvků v 1. řádku.) Ale determinant matice, která má dva stejné řádky, je nutně roven 0, jak plyne např. z věty 11.15 ze skript [MI]. ■

• **Příklad 2.21:** Vypočtete inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Řešení: Protože $\det \mathbf{A} = -6$, je matice \mathbf{A} regulární, a tedy \mathbf{A}^{-1} existuje.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tedy podle věty 2.20 je

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -6 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

Stejně tak platí $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Cvičení 2.22: Ukažte, že pro matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, pokud $ad - bc \neq 0$.

Výpočet inverzní matice Gaussovou-Jordanovou metodou

Uvažujme regulární matici \mathbf{A} řádu n . Řešení soustavy lineárních rovnic tvaru $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ Gaussovou-Jordanovou metodou lze schematicky naznačit následovně

$$(\mathbf{A}|\vec{b}) \sim (\mathbf{E}|\vec{x}),$$

tj. upravíme-li rozšířenou matici soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ ekvivalentními úpravami tak, že matice soustavy \mathbf{A} přejde v jednotkovou matici, získáme na místě vektoru pravých stran řešení dané soustavy. Pro i -tý sloupec inverzní matice \mathbf{A}^{-1} platí, že je řešením soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{e}_i$, protože $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$. Řešíme-li tedy tuto soustavu Gaussovou-Jordanovou metodou, dostaneme jako řešení i -tý sloupec inverzní matice \mathbf{A}^{-1} .

Při výpočtu inverzní matice Gaussovou-Jordanovou metodou postupujeme tak, že za matici \mathbf{A} napíšeme matici \mathbf{E} (takto vzniklou matici označme $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$) a pracujeme s řádky matice $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ (ta má $2n$ sloupců). Řešíme vlastně soustavu $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{e}_i$ pro všechny vektory \vec{e}_i , $i = 1, \dots, n$ najednou. Upravíme-li tedy Gaussovou-Jordanovou metodou (bez použití záměny sloupců) matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ tak, že na místě matice \mathbf{A} je matice \mathbf{E} , dostaneme pak na místě matice \mathbf{E} hledanou matici \mathbf{A}^{-1} . Schematicky to můžeme zapsat jako:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \sim (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$$

• **Poznámka 2.23:** Uvědomte si, že předem nemusíme vědět, že matice \mathbf{A} je regulární, tedy, že matice \mathbf{A}^{-1} existuje. Matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ upravujeme Gaussovou-Jordanovou metodou a v průběhu výpočtu poznáme, zda matice \mathbf{A} je regulární. Pokud totiž matici \mathbf{A} nelze převést ekvivalentními úpravami na matici \mathbf{E} , je matice \mathbf{A} singulární a inverzní matice \mathbf{A}^{-1} neexistuje.

• **Příklad 2.24:** Vypočtete inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}|\mathbf{E}) &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -4 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -7 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -11 & -3 & 1 & 6 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 9 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -11 & -3 & 1 & 6 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9/5 & 2/5 & 1/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11/5 & 3/5 & -1/5 & -6/5 \end{array} \right] = \\ &= (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}) \end{aligned}$$

Tedy $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 20 & 5 & -5 & -10 \\ 9 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 11 & 3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$, jak se můžeme přesvědčit zkouškou.

• **Poznámka 2.25:** Princip Gaussovy-Jordanovy metody pro výpočet inverzní matice k matici \mathbf{A} tedy spočívá ve vyřešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{e}_i$ pro n různých pravých stran \vec{e}_i , $i = 1, \dots, n$. Naopak výpočet inverzní matice musí být přinejmenším tak "složitý", jako

výpočet řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ pro libovolný vektor \vec{b} . Známe-li totiž již matici \mathbf{A}^{-1} , pak jediné řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ dostaneme tak, že rovnost $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ vynásobíme zleva maticí \mathbf{A}^{-1} , tedy

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} \text{ a odtud } \mathbf{E} \cdot \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}, \text{ tj. } \vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}.$$

Tedy platí věta:

Věta 2.26:

Jediné řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ s regulární maticí \mathbf{A} je dáno vztahem

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}.$$

• **Příklad 2.27:** Řešme soustavu $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, kde \mathbf{A} je matice z příkladu 2.24 a $\vec{b} = (2, -5, 2, 0)^T$. (Tuto soustavu jsme též řešili v příkladu 12.5 ze skript [MI].) Řešení můžeme pomocí matice \mathbf{A}^{-1} , kterou známe z příkladu 2.24, získat s využitím věty 2.26 následovně:

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 20 & 5 & -5 & -10 \\ 9 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 11 & 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cvičení 2.28: Najděte všechna řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{c}$, kde $\vec{c} = (1, 0, -2, 3)^T$ a \mathbf{A} je matice z příkladu 2.24.

2.3.1 Maticové rovnice

V tomto odstavci si ukážeme, jak lze řešit některé jednoduché maticové rovnice s využitím inverzní matice. Obecně je maticová rovnice taková rovnice, kde vystupuje neznámá matice \mathbf{X} . Je-li neznámá matice \mathbf{X} typu (m, n) , představuje obvykle tato rovnice při rozepsání do jednotlivých souřadnic soustavu mn rovnic pro mn neznámých prvků matice \mathbf{X} . My se vesměs omezíme na lineární maticové rovnice. Podobně jako při řešení číselných rovnic se snažíme neznámou matici \mathbf{X} vyjádřit z dané rovnice. Používáme při tom následující úpravy, které nemění řešení rovnice:

- přičtení nějaké matice k oběma stranám rovnice,
- vynásobení obou stran rovnice nějakým nenulovým číslem,
- vynásobení obou stran rovnice zprava nějakou regulární maticí,
- vynásobení obou stran rovnice zleva nějakou regulární maticí.

Poznamenejme, že je třeba rozlišovat násobení rovnice regulární maticí zprava a zleva, protože násobení matic není komutativní.

• **Příklad 2.29:** Určete matici \mathbf{X} , která splňuje rovnici

$$\mathbf{E} + \mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{X} + \mathbf{A}^2, \text{ kde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Řešení: Zřejmě všechny matice v zadaném příkladu jsou čtvercové řádu 2. Symbol \mathbf{A}^2 znamená $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$. (Podobně klademe $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^2$ a obecně $\mathbf{A}^n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{n-1}$.) Z dané rovnice vypočteme nejdříve matici \mathbf{X} obecně.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} + \mathbf{XA} &= \mathbf{X} + \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{XA} - \mathbf{X} &= \mathbf{A}^2 - \mathbf{E} \\ \mathbf{XA} - \mathbf{XE} &= \mathbf{A}^2 - \mathbf{E} \\ \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) &= \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}\end{aligned}$$

Všimněme si, že před vytknutím matice \mathbf{X} jsme nejprve přepsali \mathbf{X} jako \mathbf{XE} . Poslední rovnost nyní vynásobíme maticí $(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}$ **zprava**. Pozor, pro matice **není definováno dělení**. Předpokládáme ovšem, že matice $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ je regulární. Dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} &= (\mathbf{A}^2 - \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \\ \mathbf{XE} &= (\mathbf{A}^2 - \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \\ \mathbf{X} &= (\mathbf{A}^2 - \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}.\end{aligned}$$

Nyní dosadíme konkrétní matice:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tedy

$$\mathbf{X} = 2\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Návody ke cvičením z kap. 2

2.15 Využijte výsledku příkladu 2.14.

2.22 Uvedený vztah odvoďte podle věty 2.20. Vypočtete potřebné algebraické doplňky. O správnosti výsledku se přesvědčte zkouškou.

2.28 Využijte větu 2.26. Potřebnou matici \mathbf{A}^{-1} znáte z příkladu 2.24. Postupujte analogicky jako příkladu 2.27.

Kapitola 3

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

3.1 Úvod

Ve skriptech [MI] jsme se seznámili s pojmem diferenciální rovnice 1. řádu., tj. diferenciální rovnice, která obsahuje první derivaci neznámé funkce. V této kapitole se seznámíme s diferenciálními rovnicemi, které obsahují druhé derivace neznámé hledané funkce, tedy s diferenciálními rovnicemi 2. řádu a to speciálně s lineárními diferenciálními rovnicemi (krátce LDR) 2. řádu. Jsou to rovnice tvaru

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) , \quad (3.1)$$

kde o funkcích $a_0(x), a_1(x), a_2(x), b(x)$ předpokládáme, že jsou spojité na nějakém intervalu I , $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a $y = y(x)$ je hledaná funkce. Funkce $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ nazýváme **koeficienty** LDR (3.1). Jestliže tyto funkce nezávisí na proměnné x (tj. jsou konstantní), pak rovnici (3.1) nazýváme LDR s **konstantními koeficienty**. Řešením rovnice (3.1) rozumíme takovou konkrétní funkci $y = y(x)$ definovanou na intervalu I , že po dosezení do rovnice (3.1) za y, y', y'' dostaneme rovnost platnou pro všechna $x \in I$.

Úmluva: Pro zkrácení zápisu je užitečné zavést symbol

$$L(y) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y . \quad (3.2)$$

Pak má rovnice (3.1) tvar

$$L(y) = b(x).$$

Definice 3.1: Rovnici

$$L(y) = b(x) , \quad (3.3)$$

kde $b(x)$ je nenulová funkce, nazýváme **nehomogenní** LDR, krátce NDLR. Rovnici

$$L(y) = 0 \quad (3.4)$$

nazýváme **homogenní** LDR, krátce HLDR. Rovnici (3.4) ve vztahu k rovnici (3.3) nazýváme **přířazenou HLDR** k NDLR (3.3).

• **Poznámka 3.2:** Počáteční podmínky pro rovnici (3.1).

Pro diferenciální rovnici 1. řádu stačila k určení partikulárního řešení jedna počáteční

podmínka $y(x_0) = y_0$. K určení partikulárního řešení diferenciální rovnice 2. řádu jedna podmínka nestačí. Jak uvidíme v dalším, tyto podmínky musí být právě dvě a mají tvar:

$$\boxed{y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.} \quad (3.5)$$

Uvědomte si, že počáteční podmínky (3.5) určují vektor $\vec{a} = [y_0, y_1] \in \mathbb{R}^2$ anebo obráceně, každý vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ spolu s x_0 určuje počáteční podmínky (3.5) pro diferenciální rovnici (3.1).

Věta 3.3: O existenci a jednoznačnosti řešení.

Nechť jsou funkce $a_0(x), a_1(x), a_2(x), b(x)$ spojité na intervalu I , $a_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a necht' $x_0 \in I$. Potom pro libovolné $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení diferenciální rovnice (3.1) $y = y(x)$, které vyhovuje počátečním podmínkám (3.5) a které je definováno na intervalu I .

Při řešení lineárních diferenciálních rovnic (3.1) využijeme poznatky o **lineárních prostorech** a o vlastnostech **lineárních zobrazení**, se kterými jsme se seznámili v kapitole 1 a 2 těchto skript. Důležitý pro nás bude zejména prostor $C(I)$ a jeho podprostory $C^k(I)$, včetně lineární závislosti a nezávislosti funkcí z $C(I)$, viz definice 1.38.

3.2 Homogenní LDR 2. řádu

V tomto odstavci využijeme vlastností prostoru $C(I)$ k popsání množiny všech řešení HLDR

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (3.6)$$

krátce zapsáno

$$L(y) = 0,$$

kde symbol $L(y)$ je definován vztahem (3.2). Podle věty 3.3 z odstavce 3.1 jsou řešeními rovnice (3.6) funkce $y = y(x)$ definované na intervalu I , které mají spojité derivace 2. řádu. Tedy řešení rovnice (3.6) jsou prvky prostoru $C^2(I)$.

Vraťme se podrobněji ke vztahu (3.2), tj.

$$L(y) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y.$$

Tímto vztahem je každé funkci $y(x) \in C^2(I)$ přiřazena funkce

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) \in C(I).$$

Vztah 3.2 tedy definuje zobrazení

$$L : C^2(I) \rightarrow C(I), \quad (3.7)$$

které je **lineární**, jak se snadno přesvědčíme:

Nechť α_1, α_2 jsou libovolné reálné konstanty a $y_1, y_2 \in C^2(I)$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} L(\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)) &= a_0(x)[\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)]'' + a_1(x)[\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)]' + \\ &+ a_2(x)[\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)] = \alpha_1 L(y_1(x)) + \alpha_2 L(y_2(x)). \end{aligned}$$

- **Poznámka 3.4:** Fakt, že zobrazení L na levé straně rovnice (3.1) je lineární, vysvětluje, proč nazýváme diferenciální rovnici (3.1) **lineární diferenciální rovnicí**.

Definice 3.5: Symbolem V_H značíme množinu všech řešení HLDR (3.6).

- **Poznámka 3.6:** Jinými slovy řečeno, V_H je množina funkcí z $C^2(I)$, které zobrazení L zobrazuje na nulovou funkci, tedy V_H je jádrem lineárního zobrazení L . O jádru lineárního zobrazení víme z kapitoly 2, definice 2.10, že je lineárním podprostorem. Poznamenejme, že v kapitole 2 jsme jádro lineárního zobrazení L značili $\mathcal{N}(L)$. V teorii diferenciálních rovnic se častěji používá místo $\mathcal{N}(L)$ označení V_H . Máme tedy větu:

Věta 3.7:

Množina V_H je lineárním podprostorem prostoru $C^2(I)$. Dále platí, že

$$\dim V_H = 2 ,$$

tj. V_H je konečně-dimenzionálním podprostorem prostoru $C^2(I)$ a jeho dimenze je rovna 2, tedy řádu příslušné HLDR.

Důkaz:

První část věty plyne z poznámky 3.6. Z této části věty 3.7 vyplývá důležitý závěr: Libovolná lineární kombinace nějakých řešení HLDR je opět řešením HLDR.

Důkaz druhé části věty: Ukážeme, že v podprostoru V_H existují dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (3.6) a každé další řešení rovnice (3.6) lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto řešení. Tím bude dokázáno, že $\dim V_H = 2$. Tedy ukážeme, že podprostor V_H má bázi o dvou prvcích.

Zvolme nějaký bod $x_0 \in I$. Podle věty 3.3 o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice (3.6) existují řešení

$$y_1(x), \quad y_2(x), \tag{3.8}$$

která splňují následující počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, & y_1'(x_0) &= 0 \\ y_2(x_0) &= 0, & y_2'(x_0) &= 1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Wronského determinant těchto řešení v bodě x_0 je roven jedné, neboť z počátečních podmínek (3.9) plyne

$$W_{y_1, y_2}(x_0) = \det \mathbf{E} = 1 .$$

Tudíž podle věty 1.48 jsou funkce y_1, y_2 lineárně nezávislé. Zbývá ukázat, že libovolné řešení $y = y(x)$ rovnice (3.6) lze vyjádřit jako lineární kombinaci řešení $y_1(x), y_2(x)$.

Uvažujme libovolné řešení

$$y = y(x)$$

rovnice (3.6). Označme

$$y(x_0) = p_1, \quad y'(x_0) = p_2 .$$

Uvažujme nyní funkci

$$\bar{y}(x) = p_1 y_1(x) + p_2 y_2(x) ,$$

kteřá je lineární kombinací řešení y_1 a y_2 . Funkce $\bar{y}(x)$ je podle první části věty 3.7 také řešením rovnice (3.6) a s využitím vztahů (3.9) dostáváme, že

$$\bar{y}(x_0) = p_1 y_1(x_0) + p_2 y_2(x_0) = p_1$$

$$\bar{y}'(x_0) = p_1 y_1'(x_0) + p_2 y_2'(x_0) = p_2.$$

Tudíž řešení $\bar{y}(x)$ rovnice (3.6) splňuje tytéž počáteční podmínky jako námi vybrané libovolné řešení $y(x)$. Avšak počátečními podmínkami je řešení rovnice (3.6) určeno jednoznačně (viz větu 3.3), proto musí platit

$$y(x) = \bar{y}(x) = p_1 y_1(x) + p_2 y_2(x)$$

pro všechna $x \in I$. Tím jsme dokázali, že libovolné řešení $y = y(x)$ rovnice (3.6) lze zapsat jako lineární kombinaci řešení y_1 a y_2 rovnice (3.6). Důkaz druhé části věty 3.7 je proveden. ■

• **Poznámka 3.8:** Věta 3.7 říká, že množina V_H všech řešení rovnice (3.6) je 2-dimenzionální podprostor prostoru $C^2(I)$. V průběhu důkazu věty 3.7 jsme sestrojili jednu bázi tohoto podprostoru. V teorii LDR je tradiční následující terminologie.

Definice 3.9: Bázi prostoru V_H nazýváme **fundamentálním systémem (soustavou) řešení HLDR** (3.6).

• **Poznámka 3.10:** Protože každý netriviální lineární prostor má nekonečně mnoho bází, pak i každá HLDR má nekonečně mnoho fundamentálních systémů řešení.

Budiž

$$y_1(x), \quad y_2(x) \tag{3.10}$$

fundamentální systém řešení HLDR (3.6). Pak každé řešení rovnice (3.6) lze zapsat ve tvaru

$$y_H(x) = y(x; \mathbf{C}) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{3.11}$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné reálné konstanty a $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$.

Definice 3.11: Výraz (3.11) nazýváme **obecným řešením** HLDR (3.6). Představuje množinu všech řešení rovnice (3.6), jestliže vektor $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$ probíhá prostor \mathbb{R}^2 . Stručně lze psát

$$V_H = \{y(x; \mathbf{C}) ; \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2\}.$$

• **Poznámka 3.12:** Ke znalosti obecného řešení HLDR (3.6) stačí určit dvě lineárně nezávislá řešení této rovnice. Při zcela obecných koeficientech $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ v rovnici (3.6) neznáme metodu, která by nám umožnila stanovit tato dvě lineárně nezávislá řešení. To se nám podaří pouze ve speciálních případech.

• **Poznámka 3.13:** Pro HLDR 1. řádu $y' + a(x)y = 0$, která má prostor V_H jednodimenzionální (viz skripta [MI]), obdržíme výsledek

$$V_H = \{C e^{-A(x)} ; C \in \mathbb{R}\},$$

kde $A(x)$ označuje primitivní funkci k funkci $a(x)$. Báze prostoru V_H , tj. fundamentální systém řešení pro rovnici $y' + a(x)y = 0$ je tedy jednoprvková a “skládá se” z jedné funkce, např. $y(x) = e^{-A(x)}$.

V následujícím odstavci ukážeme, jak se hledá fundamentální systém řešení pro HLDR s konstantními koeficienty.

3.3 Řešení homogenních LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

Jsou-li v rovnici (3.6) funkce $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ konstantní, tj. pro všechna $x \in I$, platí

$$a_0(x) = k_0 \neq 0, \quad a_1(x) = k_1, \quad a_2(x) = k_2,$$

dostáváme rovnici

$$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0, \quad (3.12)$$

kteřou nazýváme **HLDR s konstantními koeficienty**.

Základní myšlenka, jak řešit rovnici (3.12), je tato: Řešení rovnice (3.12) předpokládáme ve tvaru

$$y = e^{\lambda x}, \quad (3.13)$$

kde se snažíme určit konstantu λ tak, aby funkce (3.13) splňovala rovnici (3.12).

Z (3.13) plyne: $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Po dosazení do (3.12) dostáváme vztah

$$k_0 \lambda^2 e^{\lambda x} + k_1 \lambda e^{\lambda x} + k_2 e^{\lambda x} = 0,$$

a odtud po zkrácení nenulovým výrazem $e^{\lambda x}$ dostaneme rovnici

$$\boxed{k_0 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_2 = 0.} \quad (3.14)$$

Aby funkce (3.13) byla řešením LDR (3.12), musí být číslo λ **kořenem** rovnice (3.14).

Definice 3.14: Algebraickou rovnici (3.14) nazýváme **charakteristickou rovnicí** LDR (3.12).

Charakteristická rovnice (3.14) je kvadratickou rovnicí, a proto mohou nastat tři případy.

- I. Rovnice (3.14) má dva různé reálné kořeny.
- II. Rovnice (3.14) má dvojnásobný reálný kořen.
- III. Rovnice (3.14) má dva imaginární kořeny.

Případ I

Nechť λ_1, λ_2 jsou dva reálné různé kořeny charakteristické rovnice (3.14). Dostáváme tedy dvě řešení HLDR (3.12):

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}. \quad (3.15)$$

Aby tato řešení tvořila fundamentální systém řešení rovnice (3.12), je třeba se přesvědčit,

že jsou tato řešení lineárně nezávislá.

Použijme větu 1.48. Platí

$$W_{y_1, y_2}(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0,$$

neboť $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a exponenciální funkce je vždy kladná.

Závěr: V případě I funkce (3.15) tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice (3.12) a tudíž obecné řešení rovnice (3.12) má tvar:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (3.16)$$

• **Příklad 3.15:** Hledejme partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad (3.17)$$

které vyhovuje počátečním podmínkám

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \quad (3.18)$$

Řešení: 1. Nalezneme obecné řešení rovnice (3.17). Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

a její kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Pak

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \quad (3.19)$$

je obecné řešení rovnice (3.17). Nyní určíme konstanty C_1 a C_2 tak, aby řešení splňovalo počáteční podmínky (3.18). Z (3.19) plyne

$$y'(x) = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$$

a z (3.18) dostáváme dvě rovnice pro C_1 a C_2 :

$$C_1 e^0 + C_2 e^{-2 \cdot 0} = 1, \quad C_1 e^0 - 2C_2 e^{-2 \cdot 0} = 2,$$

tj.

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1, \\ C_1 - 2C_2 &= 2. \end{aligned}$$

Jejich řešení je $C_1 = 4/3$, $C_2 = -1/3$. Hledané partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = \frac{4}{3} e^x - \frac{1}{3} e^{-2x}.$$

• **Poznámka 3.16:** Naprosto analogicky pomocí charakteristické rovnice lze řešit i HLDR 1. řádu s konstantními koeficienty, tj. rovnici tvaru

$$k_0 y' + k_1 y = 0, \quad \text{kde } k_0, k_1 \in \mathbb{R}, k_0 \neq 0.$$

Charakteristická rovnice této diferenciální rovnice je rovnice

$$k_0 \lambda + k_1 = 0,$$

kteřá má jediný kořen $\lambda = -\frac{k_1}{k_0}$. Obecné řešení této rovnice je pak dáno vztahem

$$y_H(x) = C e^{\lambda x},$$

jak se lze snadno přesvědčit zkouškou.

Cvičení 3.17: Nalezněte fundamentální systémy řešení pro rovnice

$$\text{a) } y'' - 2y' = 0; \quad \text{b) } y'' + 4y' + 3y = 0; \quad \text{c) } 3y' - 4y = 0.$$

Případ II

Nechť $\lambda_{1,2} = \lambda_0$ je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice (3.14). Pak ze vzorce pro kořeny kvadratické rovnice dostáváme, že

$$\lambda_0 = -\frac{k_1}{2k_0}, \quad \text{neboli } 2k_0\lambda_0 + k_1 = 0, \quad (3.20)$$

(neboť diskriminant $D = k_1^2 - 4k_0k_2 = 0$).

V případě dvojnásobného kořene obdržíme ze vztahu (3.13) pouze jedno řešení $y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$ rovnice (3.12). My však víme, že fundamentální systém řešení této rovnice musí obsahovat dvě lineárně nezávislá řešení.

Ukažme, že funkce tvaru $y_2(x) = x e^{\lambda_0 x}$ je rovněž řešením rovnice (3.12). Dosazení $y_2(x)$ do rovnice (3.12) dává:

$$\begin{aligned} k_0(xe^{\lambda_0 x})'' + k_1(xe^{\lambda_0 x})' + k_2xe^{\lambda_0 x} &= k_0(2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x}) + k_1(e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x}) + k_2xe^{\lambda_0 x} = \\ &= e^{\lambda_0 x}[x(k_0\lambda_0^2 + k_1\lambda_0 + k_2) + 2k_0\lambda_0 + k_1] = 0, \end{aligned}$$

kde jsme použili rovnice (3.14) a (3.20). Opravdu tedy funkce

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda_0 x} \quad (3.21)$$

jsou řešeními diferenciální rovnice (3.12). Tyto funkce jsou lineárně nezávislé, viz cvičení 3.18, a tudíž tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.12) v případě, že její charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen λ_0 .

Závěr: V případě II má obecné řešení HLDR (3.12) tvar

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}.$$

Cvičení 3.18: Dokažte, že funkce (3.21) jsou lineárně nezávislé.

• **Příklad 3.19:** Hledejme obecné řešení rovnice

$$3y'' - 12y' + 12y = 0.$$

Řešení: Příslušná charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda_0 = 2$. Hledané obecné řešení má tedy tvar

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Případ III

Nechť $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$ jsou dva imaginární kořeny charakteristické rovnice (3.14). Postupujeme-li mechanicky, pak obdržíme dvě řešení diferenciální rovnice (3.12) ve tvaru

$$y_1(x) = e^{(a+ib)x}, y_2(x) = e^{(a-ib)x}. \quad (3.22)$$

S exponenciálními funkcemi, kde v exponentu vystupují imaginární čísla, jsme se ještě nesetkali. Funkce v (3.22) jsou komplexní funkce reálné proměnné. To jsou pro nás “nové” funkce, o nichž je třeba podrobněji pojednat.

3.3.1 Komplexní funkce reálné proměnné

Až doposud jsme pracovali s reálnými funkcemi reálné proměnné, viz kap.2 v [MI].

Definice 3.20: Jestliže každému reálnému x z jisté množiny $M \subset \mathbb{R}$ je předpisem f přiřazeno právě jedno komplexní číslo $f(x)$, nazýváme tento předpis **komplexní funkcí reálné proměnné**.

• **Poznámka 3.21:** Zadat komplexní funkci znamená zadat pro každé $x \in M = D(f)$ její reálnou a imaginární část, takže lze psát

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

kde $u(x)$ a $v(x)$ jsou reálná a imaginární část komplexního čísla $f(x)$.

Komplexní funkce f je tedy určena, jsou-li určeny reálné funkce u, v . To znamená, že studium **komplexní funkce** f lze převést na studium **dvou reálných funkcí** u, v .

Někdy je ovšem výhodnější pracovat se součtem $u(x) + iv(x)$ než s každou funkcí $u(x)$ a $v(x)$ odděleně.

Pro komplexní funkce reálné proměnné se pojmy spojitosti, limity a derivace definují zcela analogicky jako u reálných funkcí, viz příslušné definice v [MI]. V dalším nám zcela postačí následující věta.

Věta 3.22:

1. Komplexní funkce $f(x) = u(x) + iv(x)$ je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, jsou-li v bodě x_0 spojité funkce $u(x)$ a $v(x)$.
2. Komplexní funkce f má v bodě x derivaci právě tehdy, mají-li v něm derivaci funkce u, v , přičemž platí

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x). \quad (3.23)$$

Vraťme se k funkcím (3.22). Funkce e^x byla dosud definována pro reálná x a platí pro ni:

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}, \quad e^0 = 1, \quad e^x \cdot e^{-x} = 1,$$

takže $e^x \neq 0$ pro všechna reálná x .

Rozšíříme nyní definici funkce e^z na všechna komplexní $z = x + iy$.

1. Napřed ji definujme pro ryze imaginární $z = iy$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Ověřme, že pro $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ platí $e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} = e^{iy_1+iy_2} = e^{i(y_1+y_2)}$. Opravdu

$$\begin{aligned} e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} &= (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + \\ &+ i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2) = \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) = e^{i(y_1+y_2)}. \end{aligned}$$

2. Je-li nyní $z = x + iy$, **definujme**

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)}. \quad (3.24)$$

Cvičení 3.23: Dokažte, že pro libovolné $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

• **Poznámka 3.24:** Vraťme se ke komplexním funkcím (reálné proměnné) typu (3.22), tj. uvažujme funkci

$$f(x) = e^{(a+ib)x}. \quad (3.25)$$

Stanovme její reálnou a imaginární část. Je

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = \\ &= e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx = u(x) + iv(x). \end{aligned}$$

Tedy

$$u(x) = \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x}) = e^{ax} \cos bx, \quad (3.26)$$

$$v(x) = \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im}(e^{(a+ib)x}) = e^{ax} \sin bx. \quad (3.27)$$

Pomocí vztahů (3.26) a (3.27) a věty 3.22 stanovíme derivaci funkce (3.25).

$$f'(x) = (e^{(a+ib)x})' = u'(x) + iv'(x) = ae^{ax} \cos bx - e^{ax} b \cdot \sin bx +$$

$$+i(ae^{ax} \sin bx + e^{ax}b \cos bx) = (a + ib)e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) = (a + ib)e^{(a+ib)x}.$$

Dostáváme

$$\boxed{(e^{(a+ib)x})' = (a + ib)e^{(a+ib)x}},$$

což lze krátce zapsat, označíme-li $\lambda = a + ib$, ve tvaru

$$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.28)$$

což je známý vztah z teorie reálných funkcí, který nyní platí i pro komplexní λ .

• **Poznámka 3.25:** Ze vztahu (3.28) snadno plyne, že komplexní funkce (3.22) jsou řešením diferenciální rovnice $k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$ právě tehdy, když čísla $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice.

Tímto konstatováním bychom mohli případ imaginárních kořenů charakteristické rovnice - případ III - uzavřít a funkce (3.22) prohlásit za fundamentální systém řešení rovnice (3.12).

Jsou tady ale jisté okolnosti, které nám nedovolují, abychom tímto způsobem případ III uzavřeli. O co jde?

Diferenciální rovnice (3.12) je reálná diferenciální rovnice (tzn. má reálné koeficienty) a předpokládejme, že popisuje nějaký reálný fyzikální či chemický děj. Pak hodnoty řešení $y(x)$ představují jistou kvantitativní veličinu, která daný děj charakterizuje (jako například množství radioaktivní látky, nebo množství soli, resp. polohu bodu na přímce). Proto pro praktickou aplikaci řešení diferenciální rovnice je třeba, aby tato řešení nabývala reálných a nikoliv imaginárních hodnot.

Tedy místo komplexního fundamentálního systému (3.22) požadujeme, resp. hledáme, reálný fundamentální systém řešení rovnice (3.12) i v případě imaginárních kořenů charakteristické rovnice. Tento reálný fundamentální systém lze najít na základě následující věty.

Věta 3.26:

Je-li komplexní funkce $y(x) = u(x) + iv(x)$ řešením diferenciální rovnice

$$L(y) = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (3.29)$$

kde $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ jsou reálné funkce, pak reálné funkce $u(x)$ a $v(x)$ jsou rovněž řešením diferenciální rovnice (3.29).

Speciálně: Je-li $y(x) = e^{(a+ib)x}$ řešením diferenciální rovnice

$$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0,$$

pak i funkce

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \operatorname{Re}(e^{(a+ib)x}) = e^{ax} \cos bx, \\ y_2(x) &= \operatorname{Im}(e^{(a+ib)x}) = e^{ax} \sin bx \end{aligned} \quad (3.30)$$

jsou řešením této rovnice. Tyto funkce tvoří reálný fundamentální systém řešení této diferenciální rovnice. Obecné řešení má v tomto případě tvar

$$y(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx.$$

Důkaz:

Je založen na větě 3.22, tj. na tom, že komplexní funkci reálné proměnné derivujeme tak, že zderivujeme její reálnou a imaginární část. Pak

$$\begin{aligned} L(u(x) + iv(x)) &= a_0(x)(u(x) + iv(x))'' + a_1(x)(u(x) + iv(x))' + a_2(x)(u(x) + iv(x)) = \\ &= a_0(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) + i[a_0(x)v''(x) + a_1(x)v'(x) + a_2(x)v(x)] = \\ &= L(u(x)) + iL(v(x)). \end{aligned}$$

Tudíž, je-li $L(y) = 0$, pak $L(u) + iL(v) = 0$, tedy $L(u) = 0$ a $L(v) = 0$.

Důkaz speciální části věty 3.26 plyne ihned ze vztahů (3.26) a (3.27) a z faktu, že Wronského determinant funkcí (3.30) je různý od nuly. ■

Cvičení 3.27: Vypočítejte pro fundamentální systém (3.30) Wronskián $W(x)$ a ukažte, že $W(x) \neq 0$, pokud $b \neq 0$.

• **Příklad 3.28:** Určeme obecné řešení rovnice

$$2y'' - 8y' + 26y = 0.$$

Řešení: Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \quad \text{má kořeny} \quad \lambda_1 = 2 + 3i, \quad \lambda_2 = 2 - 3i.$$

Pak podle speciální části věty 3.26 má obecné řešení naší rovnice tvar

$$y(x) = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x. \quad (3.31)$$

Hledejme dále partikulární řešení vyhovující počátečním podmínkám

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Protože $y'(x) = C_1(2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x) + C_2(2e^{2x} \sin 3x + 3e^{2x} \cos 3x)$, dostáváme pro konstanty C_1 a C_2 v (3.31) rovnice:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ y'(0) &= C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 3 = -1, \end{aligned}$$

Odtud $C_1 = 0$ a $C_2 = -\frac{1}{3}$. Tedy hledané partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = -\frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x.$$

Shrňme nakonec tohoto odstavce výsledky případů I.-III. do věty.

Věta 3.29:

Pro obecné řešení HLDR 2.řádu s konstantními koeficienty

$$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = 0$$

platí: Má-li charakteristická rovnice

$$k_0 \lambda^2 + k_1 \lambda + k_2 = 0$$

(i) dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2 , pak

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

(ii) jeden reálný dvojnásobný kořen λ , pak

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x};$$

(iii) dva imaginární komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = a + ib, \lambda_2 = a - ib$, pak

$$y_H(x) = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx .$$

3.4 Řešení nehomogenních LDR 2.řádu

Cílem tohoto odstavce je nalézt tvar obecného řešení nehomogenní LDR

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x). \quad (3.32)$$

Z předchozího odstavce víme, že obecné řešení přiřazené homogenní rovnice

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (3.33)$$

má tvar

$$y_H(x; \mathbf{C}) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (3.34)$$

kde funkce y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.33) a \mathbf{C} probíhá \mathbb{R}^2 .

Platí následující věta o struktuře množiny řešení nehomogenní rovnice.

Věta 3.30:**Obecné řešení** nehomogenní rovnice (3.32) (označme je y_N) má tvar

$$y_N(x; \mathbf{C}) = y_H(x; \mathbf{C}) + y_p(x), \quad \mathbf{C} \in \mathcal{R}^2, \quad (3.35)$$

kde $y_H(x; \mathbf{C})$ je dáno vztahem (3.34) a $y_p(x)$ je nějaké **partikulární řešení** rovnice (3.32).**Důkaz:**Označme V_N množinu všech řešení NLDLDR (3.32). Připomeňme, že množina V_H všech řešení HLDR (3.33) je lineární prostor, viz věta 3.7.Budiž $y \in V_H$ a $y_p \in V_N$, tj. $L(y) = 0$ a $L(y_p) = b(x)$. Pak $y + y_p \in V_N$, neboť $L(y + y_p) = L(y) + L(y_p) = 0 + b(x) = b(x)$.Nechť $y_1, y_2 \in V_N$, tj.

$$L(y_1) = b(x), \quad L(y_2) = b(x).$$

Pak

$$L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = b(x) - b(x) = 0.$$

Tudíž $y_1 - y_2 \in V_H$.

Zvolme pevně $y_p \in V_N$. Pak pro každé $y \in V_N$ je

$$y - y_p \in V_H,$$

tzn.

$$y(x) - y_p(x) = y_H(x; \mathbf{C}) \quad \text{pro jisté } \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2.$$

Tedy každé řešení $y \in V_N$ lze zapsat ve tvaru

$$y(x) = y_H(x; \mathbf{C}) + y_p(x),$$

tudíž výraz

$$y_H(x; \mathbf{C}) + y_p(x), \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2,$$

představuje obecné řešení NLDR (3.32). ■

• **Poznámka 3.31:** Je užitečné si uvědomit, že

$$V_N = \{y_H(x; \mathbf{C}) + y_p(x); \mathbf{C} \in \mathbb{R}^2\} = \{y(x) + y_p(x), y \in V_H\},$$

což lze symbolicky psát ve tvaru

$$V_N = V_H + y_p(x).$$

Při hledání obecného řešení rovnice (3.32) postupujeme tak, že nejprve nalezneme obecné řešení přiřazené homogenní rovnice a pak se snažíme získat jedno řešení rovnice nehomogenní.

V dalším se seznámíme se dvěma způsoby, jak nalézt partikulární řešení y_p NLDR (3.32). Budou to **metoda variace konstant** a **metoda odhadu**.

3.4.1 Metoda variace konstant

Začneme konkrétním příkladem a pak postup zobecníme pro libovolnou LDR druhého řádu.

• **Příklad 3.32:** Nalezněme obecné řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}. \tag{3.36}$$

Řešení:**1. krok**

Nalezneme obecné řešení přiřazené homogenní rovnice

$$y'' - 2y' + y = 0. \quad (3.37)$$

Toto řešení má tvar (spočítejte sami):

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad (3.38)$$

tj. funkce $y_1 = e^x$ a $y_2 = x e^x$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.37).

2. krok: Variace konstant

Podle věty 3.30 zbývá nalézt nějaké partikulární řešení y_p rovnice (3.36). Zkusme hledat řešení y_p ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x, \quad (3.39)$$

kde $c_1 = c_1(x)$ a $c_2 = c_2(x)$ jsou neznámé funkce, které se budeme snažit určit tak, aby funkce (3.39) byla řešením diferenciální rovnice (3.36). Výraz (3.39) vznikl z obecného řešení (3.38) rovnice homogenní (3.37) záměnou konstant C_1, C_2 za funkce $c_1(x), c_2(x)$ (srovnej odstavec 14.4.2 skript [MI]).

Neznámé funkce $c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x)$ určíme tak, že funkci (3.39) dosadíme do rovnice (3.36). Tím získáme jednu rovnici pro dvě neznámé funkce $c_1(x), c_2(x)$. Druhou rovnici pro $c_1(x)$ a $c_2(x)$ získáme následovně:

Z (3.39) plyne

$$y_p'(x) = c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + c_2'(x)xe^x + c_2(x)(e^x + xe^x). \quad (3.40)$$

Položme v (3.40)

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0. \quad (3.41)$$

Pak má (3.40) tvar

$$y_p'(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)(e^x + xe^x). \quad (3.42)$$

Tudíž z (3.42) dalším derivováním dostáváme

$$y_p''(x) = c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) + c_2(x)(2e^x + xe^x). \quad (3.43)$$

Dosadíme výrazy (3.39), (3.42) a (3.43) do rovnice (3.36) (místo $c_1'(x), c_2'(x)$ píšeme krátce c_1', c_2'):

$$\begin{aligned} c_1' e^x + c_1 e^x + c_2'(e^x + x e^x) + c_2(2e^x + x e^x) - \\ - 2(c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x) + c_1 e^x + c_2 x e^x = \frac{e^x}{x}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Po snadné úpravě rovnice (3.44) dostaneme rovnici

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}. \quad (3.45)$$

Upozornění: Počítáme-li správně, pak se v rovnici (3.44) vyruší všechny členy obsahující nederivované funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ a rovnice (3.45) obsahuje pouze derivace neznámých funkcí, tj. $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$. Je to důsledek volby (3.39).

Rovnice (3.41) a (3.45) tvoří soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé funkce $c_1'(x)$, $c_2'(x)$:

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x &= 0, \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) &= \frac{e^x}{x}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Soustavu (3.46) řešíme obvykle pomocí Cramerova pravidla, viz odstavec 15.2 v [MI]. Matice soustavy (3.46) je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{bmatrix}$$

a její determinant je Wronského determinant funkcí $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, které tvoří fundamentální systém řešení přiřazené HLDR (3.37). Tato řešení, jak víme, jsou lineárně nezávislá, a proto

$$D = \det \mathbf{A} = W_{y_1, y_2} = e^{2x} \neq 0 \quad \text{pro } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Položme dále

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -e^{2x}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x}.$$

Pak použitím Cramerova pravidla dostáváme

$$c_1'(x) = \frac{D_1}{D} = -1, \quad c_2'(x) = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{x},$$

tudíž

$$c_1(x) = -x, \quad c_2(x) = \ln |x|. \quad (3.47)$$

Ve vztahu (3.47) stačí uvažovat vždy jenom jednu primitivní funkci, protože hledáme jedno $y_p(x)$ (vynecháváme tedy integrační konstantu).

Dosazením z (3.47) do (3.39) získáme partikulární řešení nehomogenní rovnice (3.36) ve tvaru

$$y_p(x) = -xe^x + xe^x \ln |x|$$

a obecné řešení rovnice (3.36) má podle věty 3.30 tvar

$$y_N(x) = C_1e^x + C_2xe^x + x(\ln |x|)e^x - xe^x.$$

Pozor! Je třeba si uvědomit, že ačkoliv obecné řešení homogenní rovnice (3.37) je definováno na intervalu $(-\infty, +\infty)$, je obecné řešení nehomogenní rovnice definováno buď na intervalu $(-\infty, 0)$ nebo na intervalu $(0, \infty)$. To je způsobeno funkcí na pravé straně DR, $b(x) = e^x/x$, pro kterou $x = 0$ nepatří do definičního oboru.

Nyní celý postup metody variace konstant zobecníme na obecnou NLDR 2.řádu. Pak si řekneme, jak postupujeme při praktickém výpočtu.

Uvažujme NLDR 2.řádu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x). \quad (3.48)$$

Je třeba si uvědomit, že metodu variace konstant lze použít tehdy, známe-li obecné řešení přiřazené homogenní LDR, tj. známe-li nějaký fundamentální systém řešení rovnice

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (3.49)$$

Předpokládejme tedy, že funkce $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3.49). Pak její obecné řešení má tvar

$$y_H = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení $y_p(x)$ nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), \quad (3.50)$$

kde $c_1(x)$ a $c_2(x)$ jsou hledané neznámé funkce, které určíme tak, že funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do rovnice (3.48). Postupně dostáváme

$$y_p'(x) = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2',$$

kde pokládáme

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0. \quad (3.51)$$

Pak

$$y_p'(x) = c_1y_1' + c_2y_2'$$

a

$$y_p''(x) = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''.$$

Po dosazení do rovnice (3.48) dostaneme

$$a_0(x)(c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'') + a_1(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + a_2(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = b(x)$$

a po úpravě

$$c_1[a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1] + c_2[a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2] + a_0(x)(c_1'y_1' + c_2'y_2') = b(x).$$

Výrazy v hranatých závorkách jsou identicky rovny nule, neboť y_1 a y_2 jsou řešeními homogenní LDR (3.49), takže druhá rovnice pro hledané funkce $c_1(x)$, $c_2(x)$ má tvar

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}. \quad (3.52)$$

Vraťme se ještě poznámkou k rovnici (3.51). Tato rovnice má dvojí význam. Jednak dodává k rovnici (3.52) druhou rovnici potřebnou pro určení dvou neznámých funkcí $c_1(x)$, $c_2(x)$. Její druhý význam spočívá v tom, že její splnění podstatně zjednodušuje výpočet y_p'' a vede k tomu, že se v (3.52) vyskytnou jen první derivace neznámých funkcí c_1 a c_2 .

- **Poznámka 3.33:** Při řešeních konkrétních rovnic postupujeme takto:
 - 1) Zjistíme fundamentální systém řešení $y_1(x), y_2(x)$ příslušné homogenní rovnice.
 - 2) Pomocí těchto funkcí napíšeme soustavu rovnic pro $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$:

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0, \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= \frac{b(x)}{a_0(x)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Tvar soustavy (3.53) je třeba si pamatovat. Poznamenejme, že matici soustavy tvoří matice z Wronského determinantu.

3) Řešením dvou lineárních algebraických rovnic (3.53) (např. pomocí Cramerova pravidla) vypočítáme funkce $c_1'(x), c_2'(x)$ a po zintegrování obdržíme $c_1(x)$ a $c_2(x)$, které dosadíme do (3.50).

4) Pomocí vztahu (3.35) sestavíme obecné řešení NLDR, tj. $y_N(x)$.

Cvičení 3.34: Přesvědčte se, že funkce

$$y_1 = x, \quad y_2 = x \ln x$$

tvoří fundamentální systém homogenní LDR

$$x^2 y'' - xy' + y = 0.$$

- **Příklad 3.35:** Nalezněme obecné řešení rovnice

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3. \quad (3.54)$$

na intervalu $(0, \infty)$.

Řešení: Podle cvičení 3.34 je obecné řešení přiřazené homogenní rovnice rovno

$$y_H(x) = C_1 x + C_2 x \ln x, \quad x > 0.$$

(Toto řešení jsme vlastně “uhodli”.) Partikulární řešení rovnice (3.54) hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = c_1(x)x + c_2(x)x \ln x. \quad (3.55)$$

Soustava (3.53) má v našem případě tvar

$$\begin{aligned} c_1'(x)x + c_2'(x)x \ln x &= 0, \\ c_1'(x)1 + c_2'(x)(\ln x + 1) &= \frac{8x^3}{x^2} = 8x. \end{aligned}$$

Její řešení dostáváme

$$W = \begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} = x,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \ln x \\ 8x & \ln x + 1 \end{vmatrix} = -8x^2 \ln x, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 8x \end{vmatrix} = 8x^2.$$

Tudíž

$$c_1'(x) = -8x \ln x, \quad c_2'(x) = 8x$$

a po integrování (proved'te sami!)

$$c_1(x) = -2x^2(2 \ln x - 1), \quad c_2(x) = 4x^2.$$

Odtud dosazením do (3.55) dostaneme

$$y_p(x) = -2x^3(2 \ln x - 1) + 4x^3 \ln x = 2x^3.$$

Hledané obecné řešení rovnice je

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x + 2x^3.$$

• **Příklad 3.36:** Nalezněme partikulární řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = x, \tag{3.56}$$

splňující počáteční podmínky

$$y(0) = \frac{5}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{4}.$$

Řešení: Nejdříve musíme nalézt obecné řešení rovnice (3.56). Toto řešení obsahuje dvě konstanty, C_1, C_2 , jejichž hodnoty pak určíme z daných počátečních podmínek.

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ přiřazené homogenní LDR má dvojnásobný kořen $\lambda = 2$, proto

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Pak

$$y_p(x) = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) x e^{2x}, \tag{3.57}$$

kde $c_1'(x), c_2'(x)$ jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} c_1'(x) e^{2x} + c_2'(x) x e^{2x} &= 0, \\ 2c_1'(x) e^{2x} + c_2'(x) (e^{2x} + 2x e^{2x}) &= x. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2x e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}, \\ c_1'(x) &= \frac{1}{e^{4x}} \begin{vmatrix} 0 & x e^{2x} \\ x & e^{2x} + 2x e^{2x} \end{vmatrix} = -x^2 e^{-2x}, \end{aligned}$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{e^{4x}} \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & x \end{vmatrix} = xe^{-2x}.$$

Tedy

$$c_1(x) = -\int x^2 e^{-2x} dx = e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right), \quad c_2(x) = \int xe^{-2x} dx = -e^{-2x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right).$$

Po dosazení do (3.57) obdržíme po úpravě

$$y_p(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.$$

Obecné řešení rovnice (3.56) je dáno výrazem

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.58)$$

Zbývá vypočítat partikulární řešení vyhovující daným počátečním podmínkám. K tomu potřebujeme znát

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + C_2 (e^{2x} + 2x e^{2x}) + \frac{1}{4}. \quad (3.59)$$

Po dosazení počátečních podmínek do (3.58) a (3.59) dostáváme rovnice pro C_1, C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 + \frac{1}{4} &= \frac{5}{4} \\ 2C_1 + C_2 + \frac{1}{4} &= \frac{1}{4} \end{aligned} \Rightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = -2.$$

Hledané partikulární řešení tedy je

$$y_p(x) = e^{2x} - 2x e^{2x} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4}.$$

Na závěr tohoto oddílu si ještě ukažme, jak lze v některých případech vhodnou substitucí řešit diferenciální rovnici, která nemá konstantní koeficienty.

• **Příklad 3.37:** Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice

$$x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 0$$

pomocí substituce $x = \frac{1}{t}$.

Řešení: Uvědomme si, že danou rovnici neumíme řešit přímo, nemá totiž konstantní koeficienty. Řešením této diferenciální rovnice je nějaká funkce $y(x)$, kterou chceme určit. Dosadíme-li $x = \frac{1}{t}$ za proměnnou x do funkce y dostaneme nějakou jinou funkci z proměnné t , kde

$$z(t) = y\left(\frac{1}{t}\right).$$

Funkce $z(t)$ je tedy složená funkce z vnější funkce $y(x)$, kterou neznáme, a vnitřní funkce $x = \frac{1}{t}$. Abychom mohli provést navrženou substituci v dané diferenciální rovnici, musíme nejprve vyjádřit derivace funkce y pomocí derivací funkce z . Podle pravidla o derivování složené funkce je

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y' \left(-\frac{1}{t^2} \right), \\ z''(t) &= \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{dy}{dx} \frac{d^2x}{dt^2} = y'' \frac{1}{t^4} + y' \frac{2}{t^3}. \end{aligned}$$

Odtud okamžitě dostáváme

$$y' = -t^2 z' \quad \text{a} \quad y'' = t^4 z'' - 2ty' = t^4 z'' + 2t^3 z'. \quad (3.60)$$

Nyní provést substituci $x = \frac{1}{t}$ znamená dosadit do dané diferenciální rovnice za $y = y(x)$ funkci $z = z(t)$ a za y' a y'' podle vypočtených vztahů (3.60). Dostaneme tedy rovnici

$$\frac{1}{t^4} (t^4 z'' + 2t^3 z') + \frac{2}{t^3} (-t^2 z') + z = 0$$

a po úpravě

$$z'' + z = 0, \quad (3.61)$$

což je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, kterou umíme snadno řešit pomocí její charakteristické rovnice. Obecné řešení rovnice (3.61) je

$$z = z(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Do tohoto vztahu dosadíme zpět původní proměnnou $x = \frac{1}{t}$, tj. $t = \frac{1}{x}$. Protože $z\left(\frac{1}{x}\right) = y(x)$, dostáváme

$$y = y(x) = z\left(\frac{1}{x}\right) = C_1 \cos \frac{1}{x} + C_2 \sin \frac{1}{x},$$

což je hledané obecné řešení, jak se ostatně můžeme snadno přesvědčit zkouškou.

3.4.2 Řešení NLDR 2. řádu metodou odhadu

Metodu variace konstant lze použít pro každou NLDR, tj. jak pro rovnice s konstantními koeficienty, tak i pro rovnice s nekonstantními koeficienty a s libovolnou pravou stranou. (Pokud umíme najít obecné řešení přiřazené homogenní rovnice a podaří-li se nám zintegrovat funkce $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$.) To je její výhoda. Nevýhodou metody variace konstant je její zdoluhavost a pracnost. Již pro tak jednoduchou pravou stranu, jako má rovnice (3.56) v příkladu 3.36, je stanovení $y_p(x)$ velmi pracné.

Pro rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou lze k získání partikulárního řešení $y_p(x)$ použít tzv. **metodu odhadu**, která nám často s mnohem menší námahou umožní toto partikulární řešení získat.

Metodu odhadu popíšeme pro diferenciální rovnici 2. řádu, avšak lze ji použít pro NLDR s konstantními koeficienty libovolného řádu, tedy např. i prvního. Jednou z výhod této metody je mimo jiné i to, že při jejím použití není třeba integrovat.

POPIS METODY

Uvažujme rovnici 2.řádu

$$k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x), \quad k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad (3.62)$$

kde funkce na pravé straně rovnice je následujícího typu

$$\boxed{f(x) = e^{ax} (P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx)}, \quad (3.63)$$

a, b jsou daná reálná čísla a P, Q jsou dané polynomy.

Pak existuje partikulární řešení rovnice (3.62), které má tvar

$$\boxed{y_p(x) = x^k e^{ax} (R(x) \cos bx + S(x) \sin bx)}, \quad (3.64)$$

kde R, S jsou polynomy s dosud neurčenými koeficienty, jejichž stupeň je roven většímu ze stupňů polynomů P, Q .

Tedy hledané partikulární řešení (3.64) má, až na činitel x^k , formálně stejný tvar jako pravá strana dané diferenciální rovnice.

Čísla a, b jsou dána pravou stranou v (3.63). K úplnému určení $y_p(x)$ je třeba stanovit číslo k a polynomy R a S .

Určení čísla k v (3.64)

Položme

$$\alpha = a + ib, \quad (3.65)$$

a uvažujme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + k_1 \lambda + k_2 = 0, \quad (3.66)$$

příslušnou k přiřazené HLDR

$$y'' + k_1 y' + k_2 y = 0.$$

Pak

(i) Není-li číslo α kořenem charakteristické rovnice (3.66), klademe v (3.64)

$$k = 0.$$

(ii) Je-li číslo α kořenem charakteristické rovnice (3.66), klademe

$$k = \text{násobnost kořene } \alpha.$$

Určení polynomů R a S v (3.64)

Polynomy R, S určujeme tak, že výraz (3.64) dosadíme do dané diferenciální rovnice a ze vzniklé rovnosti určíme koeficienty těchto polynomů tzv. metodou neurčitých koeficientů. Postup budeme demonstrovat na příkladech.

- **Příklad 3.38:** Metodou odhadu nalezneme partikulární řešení rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = x. \quad (3.67)$$

(Jedná se o rovnici z příkladu 3.36.)

Řešení: Zde máme

$$f(x) = x, \quad (3.68)$$

a ptáme se, zda tato pravá strana je typu (3.63). Jinak řečeno, zda vhodnou volbou veličin $a, b, P(x)$ a $Q(x)$ ve výrazu (3.63) přejde tento výraz na tvar $f(x) = x$.

Aby se funkce $e^{ax}(P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx)$ rovnala funkci $f(x) = x$, musíme volit

$$a = 0, \quad b = 0, \quad P(x) = x, \quad Q(x) = 0. \quad (3.69)$$

Pozor! Protože $b = 0$, pak $\sin bx = 0$ a za polynom Q lze teoreticky volit jakýkoliv polynom. Je ale praktické volit polynom Q co nejjednodušší a tím je polynom nulový: $Q(x) \equiv 0$.

Dále je třeba rozlišovat **nulový polynom** od polynomu **nultého stupně**. Polynomem nultého stupně rozumíme libovolnou reálnou nenulovou konstantu: $P(x) \equiv a, a \neq 0$. Je-li $a = 0$, je polynom $P(x) \equiv 0$ polynomem nulovým.

Vraťme se zpět k naší úloze. Z čísel a, b (viz (3.69)), určíme číslo α , dané vztahem (3.65).

$$\alpha = 0 + i0 = 0.$$

Příslušná charakteristická rovnice má tvar $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = 2$. Číslo $\alpha = 0$ tedy není kořenem charakteristické rovnice a tudíž ve výrazu (3.64) klademe $k = 0$. Stupeň polynomu R ve výrazu (3.64) je roven 1, neboť z (3.69) plyne, že $\text{st } P = 1$ a $\text{st } Q = 0$. Obecný polynom prvního stupně má tvar $Ax + B$, tedy v (3.69) klademe:

$$R(x) = Ax + B.$$

O polynom S ve výrazu (3.64) se nemusíme starat, neboť se ve výrazu (3.64) neprojeví vzhledem k tomu, že $\sin bx = 0$.

Závěr: Partikulární řešení rovnice (3.67) hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^0 e^{0x} ((Ax + B) \cos(0x) + S(x) \sin(0x)) = Ax + B. \quad (3.70)$$

Zbývá určit koeficienty A, B v (3.70). Dosadíme $y_p(x) = Ax + B$ do rovnice (3.67):

$$(Ax + B)'' - 4(Ax + B)' + 4(Ax + B) = x, \quad \text{tj.} \quad -4A + 4Ax + 4B = x$$

a po úpravě

$$4Ax + 4B - 4A = x. \quad (3.71)$$

Vztah (3.71) je rovnost mezi polynomy. Aby byla tato rovnost splněna (srovnej s metodou v odstavci 9.4 v [MI]), musí se koeficienty u stejných mocnin proměnné x na levé a pravé straně rovnosti (3.71) sobě rovnat:

$$\left. \begin{array}{l} x^1: 4A = 1 \\ x^0: 4B - 4A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}.$$

Tedy partikulární řešení rovnice (3.67) má tvar

$$y_p(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4},$$

což nám vyšlo i v příkladu 3.36, ovšem s mnohem větší námahou.

• **Příklad 3.39:** V tomto příkladě uijeme metodu odhadu k výpočtu obecného řešení rovnice 1. řádu

$$y' - 2y = 3xe^{2x}.$$

Řešení: a) Nejprve určíme obecné řešení přiřazené homogenní rovnice

$$y' - 2y = 0.$$

Její charakteristická rovnice má tvar $\lambda - 2 = 0$ a kořen $\lambda = 2$. Pak obecné řešení homogenní rovnice je $y_H(x) = Ce^{2x}$.

b) Hledejme partikulární řešení nehomogenní rovnice metodou odhadu. Její pravá strana je

$$f(x) = 3xe^{2x}.$$

Srovnáním s výrazem (3.63) dostáváme:

$$a = 2, \quad b = 0, \quad P(x) = 3x, \quad Q(x) = 0.$$

Číslo

$$\alpha = a + ib = 2$$

je jednonásobným kořenem charakteristické rovnice. Proto v (3.64) klademe $k = 1$. Protože $\text{st}P = 1$ a $\text{st}Q = 0$, klademe $R(x) = Ax + B$. O polynom S se opět nemusíme starat.

Hledané partikulární řešení má tedy tvar

$$y_p(x) = xe^{2x}(Ax + B) = e^{2x}(Ax^2 + Bx).$$

Koeficienty A, B určíme dosazením $y_p(x)$ do dané rovnice. Dostaneme

$$2e^{2x}(Ax^2 + Bx) + e^{2x}(2Ax + B) - 2e^{2x}(Ax^2 + Bx) = 3xe^{2x}.$$

Po zkrácení nenulovým činitelem e^{2x} a úpravě dostáváme rovnost

$$2Ax + B = 3x.$$

Z ní plyne $A = \frac{3}{2}, B = 0$. Tudíž hledané partikulární řešení je $y_p(x) = \frac{3}{2}x^2e^{2x}$, a obecné řešení dané rovnice

$$y = Ce^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}.$$

- **Příklad 3.40:** Hledejme metodou odhadu partikulární řešení y_p rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = x \sin x. \quad (3.72)$$

Řešení: Nyní budeme postupovat rychleji. Máme

$$a = 0, \quad b = 1, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = x, \quad \alpha = 0 + 1i = i.$$

Číslo $\alpha = i$ není kořenem charakteristické rovnice $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Polynomy R a S (oba stupně 1, tj. stupně jako je větší ze stupňů polynomů P a Q) mají tvar

$$R(x) = Ax + B, \quad S(x) = Cx + D.$$

Tudíž

$$y_p(x) = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x.$$

Po dosazení $y_p(x)$ do rovnice (3.72) a příslušných úpravách dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} & [(-3A + C)x - 2A - 3B + 3C + D] \sin x + \\ & + [(A + 3C)x + 3A + B + 2C + 3D] \cos x = \\ & = x \sin x = x \sin x + 0 \cos x. \end{aligned}$$

Porovnáním výrazů stojících u funkcí $\sin x, \cos x$ dostáváme

$$(-3A + C)x - 2A - 3B + 3C + D = x,$$

$$(A + 3C)x + 3A + B + 2C + 3D = 0.$$

Z těchto rovností plynou čtyři rovnice pro hledané koeficienty A, B, C, D :

$$\begin{array}{ccccccc} -3A & & +C & & = & 1 & \\ & A & & +3C & & = & 0 \\ -2A & -3B & +3C & +D & = & 0 & \\ 3A & +B & +2C & +3D & = & 0 & \end{array}$$

Jejich řešením dostáváme

$$A = -\frac{3}{10}, \quad B = \frac{34}{100}, \quad C = \frac{1}{10}, \quad D = \frac{12}{100}.$$

Hledané partikulární řešení je

$$y_p(x) = \left(-\frac{3}{10}x + \frac{34}{100}\right) \cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{12}{100}\right) \sin x.$$

Cvičení 3.41: Metodou odhadu nalezněte partikulární řešení rovnice

$$y' + 2y = e^{2x} \cos 3x.$$

3.4.3 Modifikace metody odhadu

Uvažujme rovnici

$$y'' - y = 2e^x - x^2. \quad (3.73)$$

Pravá strana této rovnice není typu (3.63), ale každý sčítanec, který ji tvoří, je sám o sobě tohoto typu. Metodu odhadu nelze v tomto případě užít přímo. Pomůže nám následující věta.

Věta 3.42:

Označme jako obvykle $L(y) = k_0 y'' + k_1 y' + k_2 y$.

Pak platí: Je-li $y = y_1(x)$ řešením rovnice $L(y) = b_1(x)$ a $y = y_2(x)$ řešením rovnice $L(y) = b_2(x)$, je funkce $y = y_1(x) + y_2(x)$ řešením rovnice

$$L(y) = b_1(x) + b_2(x).$$

Důkaz této věty je snadný a lze jej ponechat čtenáři jako cvičení.

• **Příklad 3.43:** Vypočítejme obecné řešení rovnice (3.73).

Podle věty 3.42 lze partikulární řešení rovnice (3.73) získat jako součet partikulárních řešení následujících dvou rovnic

$$y'' - y = 2e^x, \quad (3.74)$$

$$y'' - y = -x^2. \quad (3.75)$$

Avšak řešení těchto rovnic lze již získat metodou odhadu. Partikulární řešení rovnice (3.74) hledáme ve tvaru $y_1(x) = xAe^x$, neboť $\alpha = a + ib = 1 + 0i = 1$ je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$ a oba polynomy $P(x) = 2, Q(x) = 0$ mají nulový stupeň.

Podobně partikulární řešení rovnice (3.75) hledáme ve tvaru $y_2(x) = Ax^2 + Bx + C$, neboť $\alpha = a + ib = 0 + 0i = 0$ není kořenem charakteristické rovnice a polynomy P, Q mají tvar $P(x) = -x^2, Q(x) = 0$. Tudíž polynom R je druhého stupně.

Výpočet y_1 a y_2 proveďte sami. Dostanete

$$y_1(x) = xe^x, \quad y_2(x) = x^2 + 2.$$

Dále obecné řešení přiřazené HLDR k rovnici (3.73) je

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

tedy obecné řešení rovnice (3.73) má tvar

$$y_N(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2.$$

3.5 Okrajové úlohy

V předchozích odstavcích této kapitoly jsme se zabývali tzv. **počáteční úlohou** pro diferenciální rovnice 2. řádu, tj. úlohou, kdy hledaná funkce splňuje podmínky (3.5).

Všimněme si, že tyto podmínky byly dvě (což byl i řád diferenciální rovnice a tedy i počet neurčených konstant C_1 a C_2 v obecném řešení) a že v nich byly zadány hodnoty řešení a jeho derivace v jednom pevném bodě $x = x_0$. Ve fyzikálních a technických aplikacích se ale také dvě potřebné podmínky formulují ve dvou různých bodech x_0 a x_1 , např. ve tvaru

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad (3.76)$$

nebo obecněji

$$\alpha_0 y(x_0) + \beta_0 y'(x_0) = \gamma_0, \quad \alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = \gamma_1, \quad (3.77)$$

kde $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 0, 1$, jsou nějaké zadané konstanty. Dodatečné podmínky, které určují výběr partikulárního řešení z obecného řešení, a které mají tvar (3.76) nebo (3.77) se nazývají **okrajové podmínky** a úloha s těmito podmínkami se nazývá **okrajová úloha**.

Zadání okrajových podmínek může učinit úlohu složitější, zejména co se týče existence a jednoznačnosti řešení, srovnej např. větu 3.3 pro úlohu počáteční. Celou problematiku si budeme demonstrovat na jednoduchém příkladě. Budeme hledat řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = 0 \quad (3.78)$$

pro různě zadané okrajové podmínky. Čtenář lehce zjistí, že obecné řešení rovnice (3.78) je ve tvaru

$$y_H(x; C_1, C_2) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (3.79)$$

• **Příklad 3.44:** Hledejme řešení diferenciální rovnice (3.78) splňující okrajové podmínky

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (3.80)$$

Řešení: Dosazením do (3.79) získáme

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 &= 1 \\ C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Jediným řešením této soustavy je $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Okrajová úloha (3.78), (3.80) má tedy jediné řešení

$$y(x) = \cos x.$$

• **Příklad 3.45:** Řešme diferenciální rovnici (3.78) s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (3.81)$$

Řešení: Podobně jako v předchozím příkladě dojdeme k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 &= 0 \\ C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2} &= 0, \end{aligned}$$

která má opět jediné řešení $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Řešením diferenciální rovnice (3.78) s okrajovými podmínkami (3.81) je tedy opět jednoznačné a rovná se nulové funkci

$$y(x) \equiv 0.$$

• **Příklad 3.46:** Řešme diferenciální rovnici (3.78) s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2. \quad (3.82)$$

Řešení: Stejně jako v předchozích příkladech získáme po dosazení do (3.82) soustavu rovnic pro neznámé C_1 a C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 &= 1 \\ C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi &= 2. \end{aligned}$$

Tato soustava nemá řešení, neboť z ní okamžitě plyne $C_1 = 1$ a současně $C_1 = -2$. Tedy žádné řešení diferenciální rovnice (3.78) splňující okrajové podmínky (3.82) neexistuje.

• **Příklad 3.47:** Řešme diferenciální rovnici (3.78) s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (3.83)$$

Řešení: Tyto podmínky vedou na soustavu rovnic pro neznámé C_1 a C_2

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 &= 0 \\ C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi &= 0, \end{aligned}$$

která má nekonečně mnoho řešení ve tvaru $C_1 = 0$, $C_2 \in \mathcal{R}$. Proto má i okrajová úloha (3.78) (3.83) nekonečně mnoho řešení tvaru

$$y(x) = C_2 \sin x, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Z výše uvedených příkladů plyne, že řešení okrajové úlohy může být jednoznačné, nemusí existovat nebo dokonce může být řešení více, např. nekonečně mnoho.

3.5.1 Souvislost počáteční a okrajové úlohy

Uvažujme DR 2. řádu

$$y'' = f(x, y, y') \quad (3.84)$$

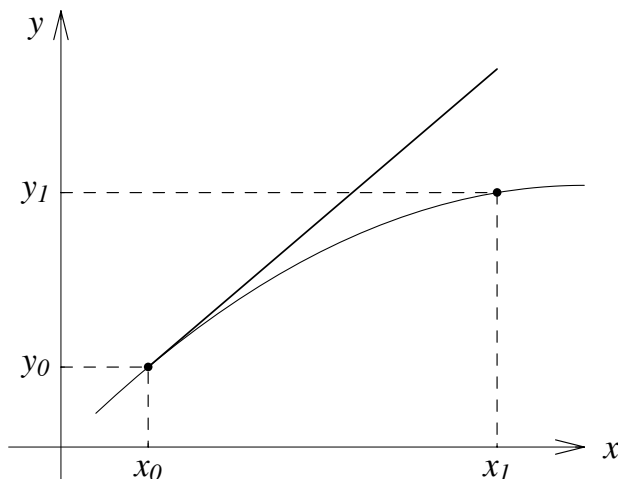
s počátečními podmínkami

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = k \quad (3.85)$$

a okrajovými podmínkami

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \quad (3.86)$$

Vysvětleme si geometrický význam počátečních a okrajových podmínek (3.85) pomocí obr. 3.1.



Obrázek 3.1:

První z podmínek (3.85) nám říká, že graf řešení prochází bodem (x_0, y_0) . Druhá z počátečních podmínek (3.85) předepisuje směrnici tečny ke grafu řešení v bodě (x_0, y_0) . A právě volba této směrnice má vliv na to, zda „se trefováme“ řešením do bodu (x_1, y_1) , který je zadán druhou okrajovou podmínkou (3.86).

• **Příklad 3.48:** Hledejme opět řešení rovnice (3.78). Převezměme první podmínku z (3.80) a formulujme úlohu jako počáteční, tj. chceme splnit podmínky

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = A. \quad (3.87)$$

Po dosazení do (3.79) získáme soustavu rovnic pro neznámé C_1 a C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 &= 1 \\ -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 &= A. \end{aligned}$$

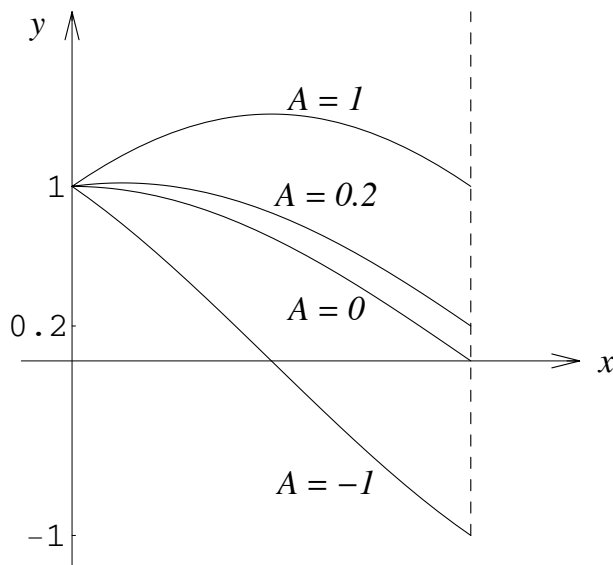
Řešením získáme $C_1 = 1$ a $C_2 = A$. Takže řešení (3.78) splňující počáteční podmínky (3.87) je tvaru

$$y(x) = \cos x + A \sin x. \quad (3.88)$$

Toto řešení má v bodě $x = \pi/2$ hodnotu

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} + A \sin \frac{\pi}{2} = A.$$

Grafy řešení $y(x)$ dle (3.88) pro $A = -1$, $A = 0$, $A = 0,2$ a $A = 1$ jsou zakresleny v obrázku 3.2.



Obrázek 3.2:

Je zřejmé, že řešení počáteční úlohy (3.78) (3.87) je pro $A = 0$ identické s řešením okrajové úlohy (3.78) (3.80).

V závěru odstavce uvedeme dva fyzikální (chemicko-inženýrské) příklady, které najde čtenář v učebnicích chemického inženýrství.

• **Příklad 3.49:** Fyzikální ustálená difúze rovinnou deskou

Uvažujme uspořádání podle obrázku 3.3. Látka A difunduje nekonečnou rovinnou deskou o tloušťce $z_2 - z_1$ mezi zásobníky o koncentracích c_1 a c_2 . Koncentrace difundující složky se tedy mění pouze ve směru z , tedy nikoliv podél desky. Dále předpokládáme konstantní hustotu i difuzní koeficient. Pro ustálený stav platí rovnice

$$\frac{d^2c}{dz^2} = 0. \quad (3.89)$$

Okrajové podmínky jsou pak tvaru

$$c(z_1) = c_1, \quad c(z_2) = c_2. \quad (3.90)$$

Rovnice (3.89) je homogenní LDR 2. řádu a její obecné řešení je (odvoďte si)

$$c(z) = K_1z + K_2, \quad (3.91)$$

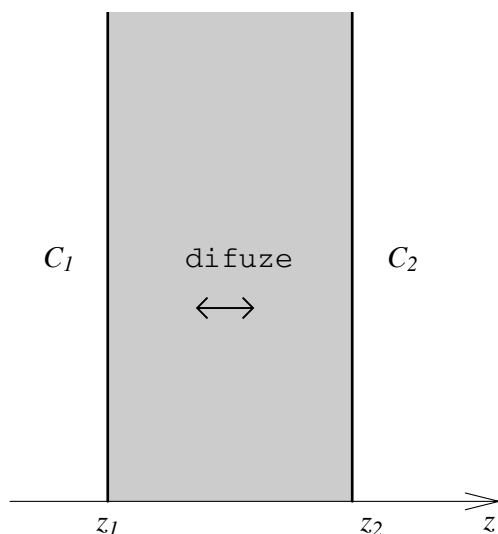
kde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Dosazením do okrajových podmínek (3.90) získáme dvě rovnice pro neznámé K_1 a K_2

$$K_1z_1 + K_2 = c_1, \quad K_1z_2 + K_2 = c_2.$$

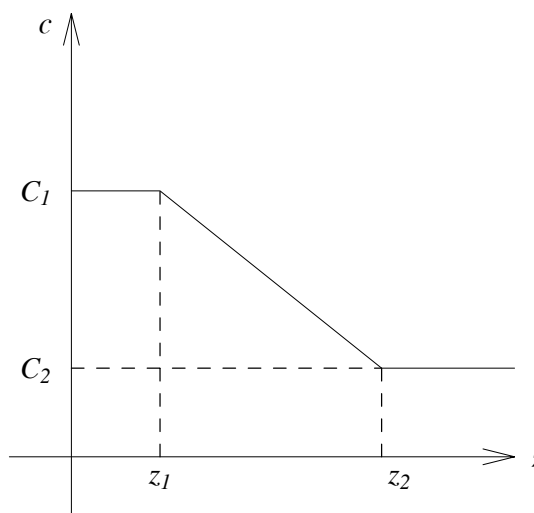
Jejich řešením je

$$K_1 = \frac{c_2 - c_1}{z_2 - z_1}, \quad K_2 = \frac{c_1z_2 - c_2z_1}{z_2 - z_1}.$$

Řešení (3.91) je lineární funkce v intervalu $\langle z_1, z_2 \rangle$, srovnej obrázek 3.4.



Obrázek 3.3:



Obrázek 3.4:

Poznamenejme, že ustálené vedení tepla rovinnou deskou je popsáno analogickou rovnicí

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = 0,$$

kde T je teplota a okrajové podmínky jsou tvaru $T(z_1) = T_1$, $T(z_2) = T_2$, což charakterizuje teploty na styku s okolím.

• **Příklad 3.50:** Ustálené vedení tepla v meziválcovém prostoru

Uvažujme dutý válec (válcovou trubku) podle obrázku 3.5 a předpokládejme osově symetrické teplotní pole a ustálený stav. Teplota pak nezávisí na polárním úhlu φ a vzhledem k tomu, že válec uvažujeme nekonečně dlouhý, ani na délkové souřadnici z . Předpokládáme-li, že teplota média uvnitř “díry” je T_0 a teplota okolí je T_1 , závisí teplota v meziválcovém prostoru (stěně) jen na radiální proměnné r tj. $T = T(r)$.

Diferenciální rovnice popisující tento děj má tvar

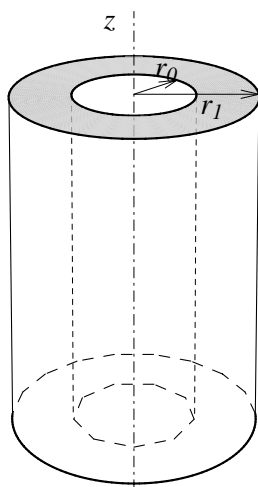
$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (3.92)$$

a okrajové podmínky jsou ($0 < r_0 < r_1$)

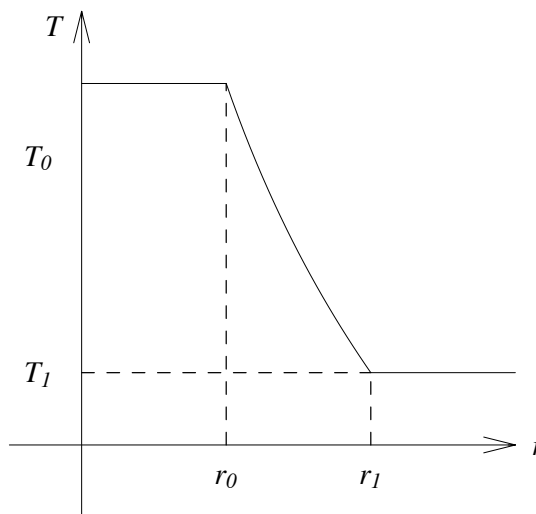
$$T(r_0) = T_0, \quad T(r_1) = T_1.$$

Rovnice (3.92) je HLDR 2.řádu s nekonstantními koeficienty. Abychom získali její obecné řešení, potřebujeme dvě lineárně nezávislá řešení této rovnice. Jedno řešení vidíme okamžitě,

$$T_1(r) \equiv 1.$$



Obrázek 3.5:



Obrázek 3.6:

Druhé najdeme pomocí substituce $u(r) = \frac{dT}{dr}$ (tj. metodou snížení řádu, viz následující odstavec), čímž dostáváme

$$u' + \frac{1}{r}u = 0.$$

Metodou separace proměnných získáme

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{r}dr, \quad \ln |u| = -\ln r + \ln C_1, \quad u = \frac{C_1}{r}$$

a tedy

$$T'(r) = u(r) = \frac{C_1}{r}.$$

Tedy ($r > 0$)

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

Tím jsme získali obecné řešení diferenciální rovnice (3.92). (Všimněte si, že za druhé řešení do fundamentálního systému můžeme vzít funkci

$$T_2(r) = \ln r.$$

Čtenář snadno ověří pomocí Wronskiánu, že jsou $T_1(r)$ a $T_2(r)$ lineárně nezávislé funkce.) Pro splnění daných okrajových podmínek je tedy třeba splnit rovnice

$$C_1 \ln r_0 + C_2 = T_0, \quad C_1 \ln r_1 + C_2 = T_1.$$

Odečtením rovnic získáme

$$C_1 = \frac{T_1 - T_0}{\ln r_1 - \ln r_0} \quad \text{a} \quad C_2 = \frac{T_0 \ln r_1 - T_1 \ln r_0}{\ln r_1 - \ln r_0}.$$

Na obrázku 3.6 je znázorněna závislost teploty na radiální souřadnici pro případ $T_1 < T_0$.

3.6 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Na závěr této kapitoly se stručně zmíníme o řešení lineárních diferenciálních rovnic n -tého řádu, $n \geq 1$. **Homogenní LDR n -tého řádu** rozumíme rovnicí

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (3.93)$$

a **nehomogenní LDR n -tého řádu** rovnicí

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x) . \quad (3.94)$$

O funkcích $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ předpokládáme, že jsou spojité na intervalu I a $a_0(x) \neq 0$ pro každé $x \in I$.

Terminologie (přiřazená homogenní rovnice, konstantní koeficienty, apod.) je naprosto analogická jako u rovnic 2. nebo 1. řádu. Platí rovněž analogická tvrzení o existenci, jednoznačnosti a struktuře řešení. Pro nás nejdůležitější tvrzení jsou shrnuta v následující větě.

Věta 3.51:

1. Množina V_H všech řešení HLDR (3.93) tvoří lineární podprostor prostoru $C^n(I)$ dimenze n , tj. obecné řešení této homogenní rovnice má tvar

$$y_H(x) = C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) ,$$

kde funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tvoří fundamentální systém řešení této rovnice.

2. Obecné řešení NLDR (3.94) dostaneme tak, že k jednomu jejímu partikulárnímu řešení y_p přičteme všechna řešení přiřazené homogenní rovnice. Symbolicky

$$y_N(x) = y_p(x) + y_H(x) .$$

Homogenní LDR (3.93) umíme obecně řešit pouze v případě konstantních koeficientů. Postup je analogický jako u rovnic 2. řádu. Jsou-li koeficienty rovnice (3.93) konstantní, tj.

$$a_0(x) = k_0 , \dots , a_n(x) = k_n ,$$

pak této rovnici přiřadíme charakteristickou rovnici ve tvaru

$$k_0 \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \dots + k_{n-1} \lambda + k_n = 0 .$$

Je-li nyní číslo λ jednoduchým kořenem této rovnice, lze do fundamentálního systému řešení rovnice (3.93) zařadit funkci $\varphi(x) = e^{\lambda x}$.

Je-li číslo λ k -násobným kořenem charakteristické rovnice, lze do fundamentálního systému řešení rovnice (3.93) zařadit funkce

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda x} , \varphi_2(x) = x e^{\lambda x} , \dots , \varphi_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda x} .$$

• **Příklad 3.52:** Určeme obecné řešení HLDR

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0 .$$

Řešení: Charakteristická rovnice této diferenciální rovnice je

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = \lambda(\lambda - 1)^3 = 0$$

má jednoduchý kořen $\lambda_1 = 0$ a 3-násobný kořen $\lambda_{2,3,4} = 1$. Tedy obecné řešení dané DR má tvar

$$y_H(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + C_4 x^2 e^x .$$

Nehomogenní LDR (3.94) řešíme buď metodou **variace konstant** (postup je opět velmi podobný jako pro rovnice 2. řádu), nebo v případě konstantních koeficientů a speciální pravé strany metodou **odhadu**. Odhad řešení je stejný jako pro rovnice 2. řádu a konkrétní výpočet je zcela analogický.

• **Příklad 3.53:** Metodou odhadu určíme obecné řešení NLDR

$$y^{(4)} - y = e^{2x} .$$

Řešení: 1. Určíme řešení přiřazené homogenní rovnice. Charakteristická rovnice

$$\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$ a $\lambda_4 = -i$. Tedy obecné řešení přiřazené HLDR je

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x .$$

2. Pro nalezení řešení dané nehomogenní rovnice lze použít metodu odhadu. Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = A e^{2x}$$

(při označení z odstavce 3.4.2 je $k = 0$, neboť číslo $2 + 0i$ není kořenem charakteristické rovnice). Odtud

$$y' = 2A e^{2x} , y'' = 4A e^{2x} , y''' = 8A e^{2x} \text{ a } y^{(4)} = 16A e^{2x} .$$

Po dosazení do dané rovnice dostaneme

$$16A e^{2x} - A e^{2x} = e^{2x} ,$$

a odtud $A = \frac{1}{15}$. Obecné řešení dané rovnice je tedy

$$y_N(x) = y_H(x) + \frac{1}{15} e^{2x} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{15} e^{2x} .$$

3.6.1 Metoda snížení řádu

Metodu snížení řádu lze použít pro jisté speciální jak lineární tak i nelineární diferenciální rovnice vyšších řádů. Základní myšlenka této metody spočívá v následujícím:

Neobsahuje-li daná diferenciální rovnice člen y ale pouze členy y' , y'' ..., pak zavedením substituce $y'(x) = z(x)$ do dané diferenciální rovnice dostaneme diferenciální rovnici pro neznámou funkci z řádu o 1 menšího než byl řád původní rovnice. Pokud tuto rovnici umíme řešit a získáme její řešení $z(x)$, pak integrací získáme řešení $y(x)$ původní rovnice.

Podobně, neobsahuje-li daná diferenciální rovnice členy y , y' ale pouze členy y'' , y''' ..., pak zavedením substituce $y''(x) = z(x)$ do dané diferenciální rovnice dostaneme diferenciální rovnici pro neznámou funkci z řádu o 2 menšího než byl řád původní rovnice, atd.

Ilustrujme si tuto metodu na příkladě.

- **Příklad 3.54:** Metodou snížení řádu určíme obecné řešení diferenciální rovnice

$$x y'' + y' = 3x^2 \quad \text{na intervalu } (0, \infty) .$$

Řešení: Ačkoliv se jedná o lineární rovnici, neumíme ji (bez metody snížení řádu) řešit, protože se nejedná o rovnici s konstantními koeficienty, a tedy neumíme řešit přiřazenou homogenní rovnici. Protože se ale v dané rovnici nevyskytuje člen y zavedeme substituci $y'(x) = z(x)$. Tedy platí $y''(x) = z'(x)$. Dosazením do dané rovnice dostaneme rovnici

$$x z' + z = 3x^2 . \quad (3.95)$$

To je NLDR 1. řádu, kterou řešit umíme.

Separací proměnných vyřešíme nejprve přiřazenou homogenní rovnici. Dostaneme

$$z_H(x) = C_1 \frac{1}{x} .$$

(Zde píšeme C_1 , protože v obecném řešení původní rovnice budou dvě konstanty.)

Metodou variace konstanty vyřešíme rovnici (3.95). Dostaneme

$$z(x) = c_1(x) \frac{1}{x} , \quad c_1'(x) \frac{1}{x} = 3x \quad \text{a} \quad c_1(x) = x^3 .$$

Odtud

$$y'(x) = z(x) = x^2 + C_1 \frac{1}{x}$$

je obecné řešení rovnice (3.95). Dále integrací dostaneme obecné řešení původní rovnice

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + C_1 \ln x + C_2 .$$

Všimněte si ještě struktury tohoto řešení. Funkce $y_p(x) = \frac{x^3}{3}$ je partikulárním řešením dané nehomogenní rovnice, funkce $y_1(x) = \ln x$ a $y_2(x) = 1$ tvoří fundamentální systém přiřazené homogenní rovnice.

Návody ke cvičením z kap. 3

3.17 Použijte charakteristickou rovnici.

3.18 Vypočtete Wronského determinant.

3.23 Použijte vzorec (3.24).

3.27 Vypočtete

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{ax} \cos bx & e^{ax} \sin bx \\ ae^{ax} \cos bx - e^{ax} b \sin bx & ae^{ax} \sin bx + e^{ax} b \cos bx \end{vmatrix}.$$

3.34 Ověřte, že jsou řešením a vypočtete Wronského determinant.

3.41 Postupujte jako v příkladu 3.40.

Kapitola 4

Soustavy diferenciálních rovnic

1. řádu

Podobně jako jsme se v algebře vedle rovnic o jedné neznámé setkali se soustavami rovnic pro více neznámých, lze se také setkat se soustavami diferenciálních rovnic s několika “neznámými” funkcemi.

V této kapitole se omezíme na soustavy dvou diferenciálních rovnic 1. řádu pro dvě neznámé funkce.

4.1 Základní pojmy a označení

Připomeňme, že obecná diferenciální rovnice 1. řádu rozřešená vzhledem k derivaci má tvar

$$x' = f(t, x),$$

kde $x = x(t)$ je hledaná neznámá funkce nezávisle proměnné t a f daná funkce dvou proměnných.

Obecný tvar **soustavy dvou diferenciálních rovnic 1. řádu** rozřešených vzhledem k derivacím má tvar

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x, y), \\y' &= g(t, x, y),\end{aligned}\tag{4.1}$$

kde $x = x(t)$, $y = y(t)$ jsou hledané neznámé funkce nezávisle proměnné t a funkce f, g jsou dané funkce tří proměnných.

Soustavu (4.1) lze psát ve tvaru

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y)$$

s tou výhodou, že z tohoto tvaru lze vyčíst, které symboly značí hledané funkce a které nezávisle proměnnou.

• **Poznámka 4.1:** Jestliže pravé strany soustavy (4.1), tj. funkce f a g , nezávisí explicitně na proměnné t , tj. funkce f a g jsou funkcemi pouze proměnných x a y , nazýváme

takovou soustavu **autonomní** soustavou diferenciálních rovnic. Jestliže pravé strany soustavy (4.1) závisejí explicitně na čase t , nazýváme takovou soustavu diferenciálních rovnic **neautonomní soustavou**.

Autonomní soustava DR má tedy tvar

$$\begin{aligned}x' &= \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\y' &= \frac{dy}{dt} = g(x, y).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Definice 4.2: Řešením soustavy (4.1) rozumíme takovou dvojici funkcí $[x(t), y(t)]$ definovaných na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, které po dosazení do rovnic (4.1) převádějí tyto rovnice v rovnosti platné pro všechna $t \in I$.

• **Příklad 4.3:** Ověřme, že funkce $x(t) = 2te^t - 3$, $y(t) = (2t + 1)e^t - 2$, $t \in \mathbb{R}$ jsou řešením soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= 2y - x + 1, \\y' &= 3y - 2x.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Řešení: Levá strana první rovnice má po dosazení tvar $x'(t) = 2e^t + 2te^t$, pravá strana $2y - x + 1 = 2[(2t + 1)e^t - 2] - 2te^t + 3 + 1 = 4te^t + 2e^t - 4 - 2te^t + 4 = 2te^t + 2e^t$. Vidíme, že na levé a pravé straně první rovnice soustavy (4.3) jsou po dosazení tytéž funkce. Dosazení do druhé rovnice soustavy (4.3) je ponecháno čtenáři.

4.2 Autonomní soustavy

V tomto odstavci ukážeme, jak lze geometricky interpretovat (znázornit) řešení autonomní soustavy.

Uvažujme autonomní soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y), \\y' &= g(x, y).\end{aligned}\tag{4.4}$$

Jejím řešením je podle definice 4.2 dvojice funkcí $x = x(t)$, $y = y(t)$, definovaných na nějakém intervalu I . Tato dvojice funkcí definuje zobrazení

$$t \mapsto \vec{p}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2, t \in I,$$

tj. zobrazení intervalu do roviny \mathbb{R}^2 .

Zobrazení \vec{p} , takto definované lze chápat jako parametrizaci nějaké rovinné křivky, viz kapitola 7 v [MI]. Tedy:

Každému řešení $x = x(t)$, $y = y(t)$ soustavy (4.4) odpovídá rovinná křivka, kterou nazýváme **trajektorii** daného řešení. Rovnice $x = x(t)$ a $y = y(t)$ jsou parametrickými rovnicemi trajektorie řešení.

Volně pak místo o řešeních soustavy (4.4) mluvíme o trajektoriích soustavy (4.4).

Soustava (4.4) může mít i jednobodové trajektorie. **Jednobodová trajektorie** je křivka sestávající z jediného bodu $S = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Parametrické rovnice jednobodové křivky mají tvar

$$x(t) \equiv x_0, \quad y(t) \equiv y_0 \quad \text{pro všechna } t \in \mathbb{R}.$$

Soustava (4.4) má jednobodovou trajektorii $S = [x_0, y_0]$ právě tehdy, jestliže platí

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

$$g(x_0, y_0) = 0,$$

tj. souřadnice bodu S anulují pravé strany rovnic (4.4). Pak konstantní funkce $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$, $t \in I$ splňují rovnice (4.4), neboť

$$\frac{dx_0}{dt} = 0 = f(x_0, y_0) \quad \text{a} \quad \frac{dy_0}{dt} = 0 = g(x_0, y_0).$$

Bod $S = (x_0, y_0)$ nazýváme **rovnovážným stavem** soustavy (4.4) a příslušné řešení nazýváme **stacionárním**. Stacionární řešení nezávisí na čase, je konstantní a jeho trajektorie je jednobodová.

• **Příklad 4.4:** Soustava diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= x, \end{aligned} \tag{4.5}$$

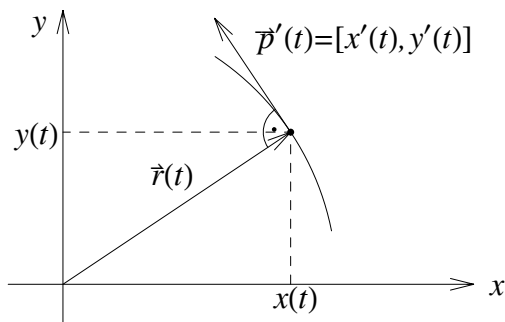
má řešení (přesvědčte se dosazením)

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos t, \\ y(t) &= r \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde $r \in \mathbb{R}$. Rovnice (4.6) jsou pro $r \geq 0$ parametrickými rovnicemi kružnic se středem v počátku o poloměru r .

• **Poznámka 4.5:** Soustava diferenciálních rovnic (4.5) je v úzkém vztahu k řešení následující úlohy:

Nalezněme takovou rovinnou křivku, jejíž tečný vektor v každém bodě je kolmý k polohovému vektoru $\vec{r}(t)$ tohoto bodu, viz obr. 4.1.



Obrázek 4.1:

Řešení: Necht $x = x(t)$, $y = y(t)$ jsou parametrické rovnice hledané křivky. Bod $(x(t), y(t))$ spolu s počátkem P určuje vektor $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$, který má být kolmý na tečný vektor k dané křivce, tj. kolmý na vektor $\vec{p}'(t) = [x'(t), y'(t)]$. Z vlastností skalárního součinu plyne:

$$\vec{r}(t) \perp \vec{p}'(t) \iff \vec{r}(t) \cdot \vec{p}'(t) = 0,$$

tj.

$$x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0. \quad (4.7)$$

Vztah (4.7) bude splněn tehdy, když bude platit

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t). \end{aligned}$$

(Vektor (a, b) je kolmý k vektoru $(-b, a)$.)

Dostali jsme soustavu dvou diferenciálních rovnic pro hledané funkce $x(t), y(t)$, která je totožná se soustavou (4.5). Řešení naší úlohy jsme převedli na řešení soustavy diferenciálních rovnic.

4.3 Autonomní lineární soustavy

Jestliže v soustavě (4.4) jsou funkce f a g lineárními funkcemi v proměnných x, y , pak má soustava (4.4) tvar

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \quad (4.8)$$

kde $a_{ij}, i, j = 1, 2$, jsou daná reálná čísla.

Soustavu (4.8) nazýváme soustavou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s **konstantními koeficienty**. Takové soustavy se nyní naučíme řešit.

Pravou stranou v (4.8) je určena matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Matici \mathbf{A} nazýváme **maticí soustavy** (4.8). Položme

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \text{pak} \quad \vec{z}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}.$$

Soustavu (4.8) lze pomocí matice \mathbf{A} a vektorové funkce \vec{z} zapsat ve vektorovém tvaru

$$\vec{z}' = \mathbf{A}\vec{z}. \quad (4.9)$$

• **Poznámka 4.6:** O množině všech řešení soustavy (4.8) resp. (4.9) platí stejná tvrzení, jaká byla odvozena pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu v kapitole 3.

Tak např. pojem obecného řešení, fundamentálního systému řešení a partikulárního řešení soustavy (4.9) se zavádí zcela analogicky jako v kapitole 3. Obecné řešení je tvaru

$$\vec{z}(t) = c_1\vec{z}_1(t) + c_2\vec{z}_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (4.10)$$

kde $\vec{z}_1(t)$ a $\vec{z}_2(t)$ jsou dvě lineárně nezávislá řešení (**fundamentální systém**) rovnice (4.9) definovaná na \mathbb{R} . Je tedy množina všech řešení soustavy (4.9) opět lineární prostor dimenze 2.

Nulovým prvkem tohoto prostoru je stacionární řešení soustavy (4.8) tvaru $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$, neboť lineární soustava (4.8) má vždy rovnovážný stav $S = [0, 0]$.

Postup řešení soustavy (4.9)

Řešení soustavy (4.9) hledáme ve tvaru

$$\vec{z}(t) = e^{\lambda t} \vec{h}, \quad (4.11)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\vec{h} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{h} \neq \vec{0}$. Tedy λ , \vec{h} se snažíme určit tak, aby výraz (4.11) byl řešením soustavy (4.9). (Srovnej s odstavcem 3.3.) Položme

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}. \quad \text{Pak} \quad \vec{z}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} h_1 \\ e^{\lambda t} h_2 \end{bmatrix}$$

a tedy

$$\vec{z}'(t) = \begin{bmatrix} \lambda e^{\lambda t} h_1 \\ \lambda e^{\lambda t} h_2 \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \vec{h}. \quad (4.12)$$

Dosadíme (4.11) a (4.12) do rovnice (4.9). Dostaneme

$$\lambda e^{\lambda t} \vec{h} = e^{\lambda t} \mathbf{A} \vec{h}, \quad (4.13)$$

neboť $\mathbf{A}(e^{\lambda t} \vec{h}) = e^{\lambda t} \mathbf{A} \vec{h}$. V rovnici (4.13) lze krátit nenulovým výrazem $e^{\lambda t}$. Tím dostaneme rovnici

$$\boxed{\mathbf{A} \vec{h} = \lambda \vec{h}.} \quad (4.14)$$

Definice 4.7: Nenulový vektor \vec{h} a číslo λ , které splňují (4.14), nazýváme **vlastním vektorem** a **vlastním číslem** matice \mathbf{A} . Přesněji: Vektor $\vec{h} \neq \vec{0}$ je vlastním vektorem matice \mathbf{A} , příslušným k vlastnímu číslu λ . Je třeba si uvědomit: Je-li $\vec{h} \neq \vec{0}$ vlastním vektorem matice \mathbf{A} a $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, pak i vektor $\alpha \vec{h}$, je vlastním vektorem matice \mathbf{A} .

Tudíž, aby vektorová funkce $\vec{z}(t) = e^{\lambda t} \vec{h}$ byla řešením soustavy (4.9), musí být λ vlastním číslem matice \mathbf{A} a vektor \vec{h} příslušným vlastním vektorem.

Stanovení vlastních čísel matice

Rovnici (4.14) upravíme na tvar

$$\boxed{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \vec{h} = \vec{0},} \quad (4.15)$$

kde

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a tudíž} \quad \mathbf{E} \vec{h} = \vec{h}.$$

V rovnici (4.14) lze nahradit $\lambda \vec{h}$ výrazem $\lambda \mathbf{E} \vec{h}$ a převést tento člen na druhou stranu rovnice a vytknout \vec{h} . Tím dostaneme rovnici (4.15).

Rovnice (4.15) představuje soustavu dvou algebraických rovnic pro neznámé h_1 , h_2 , která rozepsaná má tvar

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)h_1 + a_{12}h_2 &= 0, \\ a_{21}h_1 + (a_{22} - \lambda)h_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Po této soustavě požadujeme, aby měla nenulové řešení $\vec{h} = [h_1, h_2]^T \neq \vec{0}$. Podle tvrzení z odstavci 14.1 v [MI] má soustava (4.15) nenulové řešení právě tehdy, když je matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ singulární, tedy musí, platit

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \quad (4.17)$$

Protože

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \end{aligned}$$

má rovnice (4.17) tvar

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det\mathbf{A} = 0. \quad (4.18)$$

Kořeny této rovnice, která se nazývá **charakteristickou rovnicí matice \mathbf{A}** , jsou vlastní čísla matice \mathbf{A} .

Stanovení vlastních vektorů

Dosadíme vlastní číslo λ , které jsme obdrželi řešením rovnice (4.18), do soustavy (4.16) a tuto vyřešíme. Protože matice soustavy je singulární, jednu neznámou lze při řešení volit. Obvykle volíme nějakou konkrétní nenulovou hodnotu. Tím získáme vlastní vektor matice \mathbf{A} příslušný k vlastnímu číslu λ . (Připomeňme, že tento vektor je určen až na nenulový násobek jednoznačně).

Případ I:

Charakteristická rovnice (4.18) má dva různé reálné kořeny. Necht' to jsou kořeny λ_1 a λ_2 a k nim příslušné vlastní vektory jsou \vec{h}_1 a \vec{h}_2 . Pak má obecné řešení (4.10) tvar

$$\vec{z}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{h}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{h}_2. \quad (4.19)$$

Postup si ilustrujeme na následujícím konkrétním příkladě.

• **Příklad 4.8:** Řešme soustavu

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 8y, \\ y' &= x + y. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Řešení: Matice soustavy je rovna

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 8 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Rovnice pro vlastní čísla matice \mathbf{A} je

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (3 - \lambda)(1 - \lambda) - 8 = 0, \quad \text{tj.} \quad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. Příslušná soustava lineárních algebraických rovnic pro souřadnice vektoru \vec{h} , tj. soustava (4.16), má v našem případě tvar

$$\begin{aligned} (3 - \lambda)h_1 + 8h_2 &= 0, \\ h_1 + (1 - \lambda)h_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dosadíme vlastní číslo $\lambda_1 = -1$ do soustavy (4.21). Dostaneme

$$4h_1 + 8h_2 = 0,$$

$$h_1 + 2h_2 = 0.$$

Hodnost matice této soustavy je rovna 1. Dimenze prostoru řešení je rovna číslu $2 - 1 = 1$. Množina řešení této soustavy je tvořena vektory

$$k \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Volme např. $k = 1$ a dostaneme

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tento vektor je vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1$.

Nyní dosadíme do soustavy (4.21) vlastní číslo $\lambda_2 = 5$. Dostaneme soustavu

$$-2h_1 + 8h_2 = 0,$$

$$h_1 - 4h_2 = 0.$$

Její řešení mají tvar

$$k \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Volbou $k = 1$ dostaneme vlastní vektor

$$\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 5$.

Podle vztahu (4.11) dostáváme dvě řešení soustavy (4.20):

$$\vec{z}_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix},$$

$$\vec{z}_2(t) = e^{5t} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Z poznámky 4.6 plyne, že obecné řešení soustavy (4.20) má tvar:

$$\vec{z}(t) = c_1 \vec{z}_1(t) + c_2 \vec{z}_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{5t} \\ c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} \end{bmatrix},$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné reálné konstanty.

Tedy obecné řešení soustavy (4.20) lze zapsat jako dvojici funkcí

$$\begin{aligned} x(t) &= -2c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{5t}, \\ y(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Hledejme dále partikulární řešení soustavy (4.20), které vyhovuje např. počátečním podmínkám

$$x(0) = 6, \quad y(0) = 0. \quad (4.23)$$

Dosazením počátečních podmínek (4.23) do řešení (4.22) obdržíme rovnice pro konstanty c_1 a c_2 :

$$\begin{aligned} -2c_1 + 4c_2 &= 6, \\ c_1 + c_2 &= 0, \end{aligned}$$

kteří mají řešení $c_1 = -1, c_2 = 1$.

Hledané partikulární řešení je

$$\begin{aligned} x_p(t) &= 2e^{-t} + 4e^{5t}, \\ y_p(t) &= -e^{-t} + e^{5t}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Vyšetřeme asymptoty trajektorie tohoto partikulárního řešení. Rovnice (4.24) jsou parametrické rovnice této trajektorie, kterou označíme písmenem L . Trajektorie L prochází bodem $[6, 0]$ ležícím na ose x . Pro $t \rightarrow +\infty$ platí $x_p(t) \rightarrow +\infty$ a $y_p(t) \rightarrow +\infty$, kdežto pro $t \rightarrow -\infty$ platí $x_p(t) \rightarrow +\infty$ a $y_p(t) \rightarrow -\infty$. Pro $t \rightarrow +\infty$ má trajektorie L asymptotu $y = kx + q$, tedy $y = \frac{1}{4}x$, neboť

$$k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{5t} - e^{-t}}{2e^{-t} + 4e^{5t}} = \frac{1}{4},$$

$$q = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[e^{5t} - e^{-t} - \frac{1}{4}(2e^{-t} + 4e^{5t}) \right] = 0.$$

Pro $t \rightarrow -\infty$ má trajektorie L asymptotu $y = -\frac{1}{2}x$, neboť

$$k = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{5t} - e^{-t}}{2e^{-t} + 4e^{5t}} = -\frac{1}{2},$$

$$q = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[e^{5t} - e^{-t} + \frac{1}{2}(2e^{-t} + 4e^{5t}) \right] = 0.$$

Trajektorie L je zakreslena na obr. 4.2.

Cvičení 4.9: Ukažte, že polopřímky

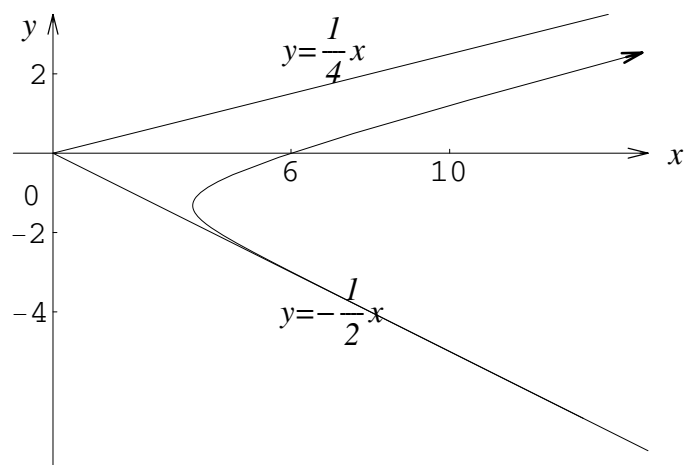
$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{1}{4}x, \quad x > 0, & \text{c) } y &= -\frac{1}{2}x, \quad x > 0, \\ \text{b) } y &= \frac{1}{4}x, \quad x < 0, & \text{d) } y &= -\frac{1}{2}x, \quad x < 0, \end{aligned}$$

jsou trajektoriemi soustavy (4.20). Využijte tvaru řešení (4.22).

Cvičení 4.10: Nalezněte partikulární řešení soustavy (4.20) vyhovující počátečním podmínkám

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 3$$

a zakreslete několik bodů jeho trajektorie.



Obrázek 4.2:

Cvičení 4.11: Nalezněte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1' = x_1 + 3x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2' = \frac{2}{3}x_1. \end{aligned}$$

• **Poznámka 4.12:** Postupem popsaným v příkladě 4.8 obdržíme obecné řešení soustavy dvou LDR s konstantními koeficienty, má-li matice \mathbf{A} dvě různá reálná vlastní čísla $\lambda = \lambda_1$ a $\lambda = \lambda_2$, tj. kvadratická rovnice (4.18) má kladný diskriminant.

Případ II:

Charakteristická rovnice (4.18) má dva imaginární (komplexně sdružené) kořeny. Necht' to jsou kořeny $\lambda_1 = a + ib$ a $\lambda_2 = a - ib$. Postup získání obecného řešení ukážeme na příkladu.

• **Příklad 4.13:** Nalezněme obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -2x + 3y. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Řešení: Matice soustavy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

má charakteristickou rovnici tvaru

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Její kořeny tj. vlastní čísla matice A jsou

$$\lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i.$$

Soustava algebraických rovnic (4.15) pro souřadnice vlastního vektoru $\vec{h} = [h_1, h_2]^T$, příslušného k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2 + i$ má tvar

$$\begin{aligned} -(1+i)h_1 + h_2 &= 0 \\ -2h_1 + (1-i)h_2 &= 0. \end{aligned}$$

Druhou rovnici dostaneme z první vynásobením číslem $(1-i)$, lze ji proto vynechat. V první rovnici volíme $h_1 = 1$ a dostáváme

$$h_2 = 1 + i.$$

Takže vlastní vektor \vec{h}_1 , příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2 + i$ má tvar

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{u} + i\vec{v}.$$

Reálné vektory \vec{u} a \vec{v} chápeme jako reálnou a imaginární část komplexního vlastního vektoru \vec{h}_1 .

Nyní určíme vlastní vektor k číslu $\lambda_2 = 2 - i$. Jeho souřadnice obdržíme řešením soustavy

$$\begin{aligned} -(1-i)h_1 + h_2 &= 0 \\ -2h_1 + (1+i)h_2 &= 0. \end{aligned}$$

a dostáváme

$$\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{u} - i\vec{v}.$$

Vidíme, že přísluší-li imaginárnímu vlastnímu číslu λ vlastní vektor $\vec{h}_1 = \vec{u} + i\vec{v}$, pak vlastnímu číslu $\bar{\lambda}$ přísluší komplexně združený vlastní vektor $\vec{h}_2 = \vec{u} - i\vec{v}$. Toto platí vždy, pokud je matice soustavy reálná. Pak podle vztahu (4.11) dostáváme dvě řešení tvaru

$$\vec{z}_1(t) = e^{(2+i)t}\vec{h}_1, \quad \vec{z}_2(t) = e^{(2-i)t}\vec{h}_2.$$

Tato řešení jsou imaginární a my je upravíme tak, abychom dostali jejich reálné a imaginární části:

$$\begin{aligned} \vec{z}_1(t) &= e^{(2+i)t}(\vec{u} + i\vec{v}) = e^{2t}(\cos t + i \sin t)(\vec{u} + i\vec{v}) = \\ &= (e^{2t} \cos t \vec{u} - e^{2t} \sin t \vec{v}) + i(e^{2t} \cos t \vec{v} + e^{2t} \sin t \vec{u}) = \\ &= \left\{ e^{2t} \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - e^{2t} \sin t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + i \left\{ e^{2t} \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \sin t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} \cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^{2t} \sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{bmatrix} = \vec{\varphi}_1(t) + i\vec{\varphi}_2(t). \end{aligned}$$

Reálná a imaginární část $\vec{\varphi}_1(t)$ a $\vec{\varphi}_2(t)$ komplexního řešení $\vec{z}_1(t)$ jsou rovněž řešením soustavy (4.25). Toto nahlédneme zcela analogickým způsobem jako v kapitole 3, viz větu

3.22, anebo přímo takto:

Platí

$$\vec{z}'_1 = \mathbf{A}\vec{z}_1, \quad \text{tj. } \vec{\varphi}'_1 + i\vec{\varphi}'_2 = \mathbf{A}(\vec{\varphi}_1 + i\vec{\varphi}_2) = \mathbf{A}\vec{\varphi}_1 + i\mathbf{A}\vec{\varphi}_2.$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí dostáváme

$$\vec{\varphi}'_1 = \mathbf{A}\vec{\varphi}_1 \quad \text{a} \quad \vec{\varphi}'_2 = \mathbf{A}\vec{\varphi}_2,$$

tedy $\vec{\varphi}_1$ i $\vec{\varphi}_2$ jsou řešením naší soustavy. Tato reálná řešení jsou lineárně nezávislá a reálné obecné řešení soustavy (4.25) má tvar

$$\begin{aligned} \vec{z}(t) &= C_1\vec{\varphi}_1(t) + C_2\vec{\varphi}_2(t) = \\ &= C_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \cos t \\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \sin t \\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Provedeme-li tutéž úpravu s komplexním řešením $\vec{z}_2(t)$, dostáváme

$$\vec{z}_2(t) = \vec{\varphi}_1(t) - i\vec{\varphi}_2(t).$$

Toto řešení nám dává stejné reálné obecné řešení (4.26).

Případ III:

Případ, kdy rovnice (4.18) má jeden reálný dvojnásobný kořen, je komplikovanější a nebudeme jej zde uvádět.

• **Poznámka 4.14:** V této poznámce ukážeme souvislost mezi diferenciálními rovnicemi 2. řádu a soustavami diferenciálních rovnic 1. řádu.

Uvažujme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x'' = f(t, x, x') \quad (4.27)$$

a položme

$$\begin{aligned} x &= x_1, \\ x' &= x_2 \quad (x'' = x'_2). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Z (4.28) plyne

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= f(t, x_1, x_2). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Vzniklá soustava DR (4.29) je zřejmě ekvivalentní s rovnicí (4.27) v tom smyslu, že mezi množinami řešení rovnice (4.27) a soustavy (4.29) je vzájemně jednoznačný vztah daný rovnicí (4.28). Tento vztah je nejlépe vidět mezi řešením LDR 2. řádu s konstantními koeficienty a příslušnou soustavou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu, viz následující příklad.

• **Příklad 4.15:** Mějme LDR

$$x'' - 5x' + 6x = 0, \quad (4.30)$$

tedy

$$x'' = -6x + 5x'. \quad (4.31)$$

Rovnici (4.30) vyřešíme pomocí charakteristické rovnice

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

a fundamentální systém řešení rovnice (4.30) je

$$\varphi_1(t) = e^{2t}, \quad \varphi_2(t) = e^{3t}.$$

Substituce (4.28) převádí rovnici (4.31) na soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -6x_1 + 5x_2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

kteřou vyřešíme postupem z příkladu 4.8.

Matice soustavy (4.32) je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -6, & 5 \end{bmatrix}.$$

Dále

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda, & 1 \\ -6, & 5 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6,$$

takže vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. K nim příslušné vlastní vektory matice \mathbf{A} jsou

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

takže fundamentální systém řešení soustavy (4.32) je

$$\vec{z}_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix},$$

$$\vec{z}_2(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

První souřadnice řešení $\vec{z}_1(t)$ a $\vec{z}_2(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.30). Druhé souřadnice těchto řešení jsou derivacemi prvních složek, což vyplývá ze vztahů (4.28). Čtenáři je ponecháno, aby sám napsal obecné řešení rovnice (4.30) a soustavy (4.32).

4.4 Eulerova metoda

V tomto odstavci jen stručně ukážeme, jak lze zobecnit Eulerovu metodu (se kterou jsme se seznámili v kapitole 14 skript [MI]) na případ řešení soustavy

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x, y), \\y' &= g(t, x, y)\end{aligned}\tag{4.33}$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Připomeňme, že pro jednu rovnici

$$x' = f(t, x), \quad (x' = \frac{dx}{dt})$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ počítáme přibližné hodnoty řešení podle vztahu

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i), \quad t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Pro soustavu (4.33) má jeden krok Eulerovy metody tvar

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + hf(t_i, x_i, y_i), \\y_{i+1} &= y_i + hg(t_i, x_i, y_i).\end{aligned}\tag{4.34}$$

Vidíme, že Eulerova metoda pro soustavy je “stejně složitá” jako pro jednu rovnici.

Pro autonomní soustavu

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y)\end{aligned}$$

mají vztahy (4.34) tvar

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + hf(x_i, y_i), \\y_{i+1} &= y_i + hg(x_i, y_i).\end{aligned}$$

V následujících dvou příkladech budeme ilustrovat použití Eulerovy metody na neautonomní i autonomní soustavu.

- **Příklad 4.16:** Chceme získat řešení soustavy

$$\begin{aligned}x' &= -x + ty^2, \\y' &= txy - y\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ na intervalu $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Použijeme Eulerovu metodu (4.34), která má tedy pro tento případ konkrétní tvar

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + h(-x_i + t_i y_i^2), \\y_{i+1} &= y_i + h(t_i x_i y_i - y_i),\end{aligned}$$

$t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = 1/N$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Výpočet pro $h = 0.2$ tj. $N = 5$ si uspořádáme do tabulky:

i	t_i	x_i	y_i	$h \cdot f(t_i, x_i, y_i)$	$h \cdot g(t_i, x_i, y_i)$
0	0	1	2	-0.2	-0.4
1	0.2	0.8	1.6	-0.0576	-0.2688
2	0.4	0.7424	1.3312	-0.006713	-0.187177
3	0.6	0.735687	1.144023	0.009917	-0.127807
4	0.8	0.745605	1.016215	0.016110	-0.082012
5	1	0.761715	0.934203		

Kapitoly o diferenciálních rovnicích uzavřeme ukázkou řešení jednoduchého modelu matematické ekologie, který je popsán soustavou dvou diferenciálních rovnic.

4.5 Model “Dravec - kořist”

Předpokládejme, že v rybníku žijí dva druhy ryb, velké a malé ryby. Malé ryby - kořist - slouží jako potrava velkým rybám - dravcům. Potravu malých ryb tvoří rostliny a plankton. Budeme předpokládat, že malé ryby mají vždy dostatek své potravy nezávisle na jejich počtu. Velké ryby se živí pouze malými rybami a jejich počet bude růst do té doby, pokud budou mít dostatek potravy, tj. malých ryb. Nakonec dojde k situaci, kdy budou mít ryby - dravci - nedostatek potravy. V jeho důsledku se počet velkých ryb začne snižovat, protože budou převážně vymírat. Tento úbytek dravců se za jistou dobu projeví růstem počtu malých ryb, který opětovně způsobí i růst počtu ryb - dravců. Tím dostaneme cyklicky (periodicky) se opakující populační stavy malých a velkých ryb.

Nyní sestojíme jednoduchý matematický model popsaného jevu. Označme $x(t)$ množství (např. v kg) malých ryb v čase t a $y(t)$ množství velkých ryb. Pak dx/dt , resp. dy/dt udává rychlost změny (tj. přírůstek či úbytek) množství malých, resp. velkých ryb.

Kdyby v rybníku žily jen samé malé ryby, pak by jejich přírůstek v čase t byl přímo úměrný jejich množství v čase t , tj.

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x(t), \quad (4.35)$$

kde a je nějaká kladná konstanta úměrnosti (zahrnující růst, rozmnožování i vymírání). Avšak v přítomnosti dravců bude přírůstek malých ryb závislý na počtu dravců, tj. nová konstanta úměrnosti \bar{a} v rovnici (4.35) bude závislá na y . Můžeme např. volit

$$\bar{a} = a - \alpha y, \quad \alpha > 0.$$

To znamená, že konstanta úměrnosti bude tím menší, čím větší bude y . Pro velká y může být \bar{a} i záporná, což odpovídá úbytku malých ryb.

Pak rovnice (4.35) má tvar

$$\frac{dx}{dt} = (a - \alpha y)x = ax - \alpha xy. \quad (4.36)$$

Podobně, kdyby v rybníku žily jen samé velké ryby, postupně by vymíraly, jejich přírůstek by byl záporný

$$\frac{dy}{dt} = -by, \quad b > 0, \quad (4.37)$$

kde b značí “konstantu úmrtnosti”.

Za přítomnosti malých ryb musíme v rovnici (4.37) nahradit konstantu b jinou konstantou, která bude záviset na počtu malých ryb, např.

$$\bar{b} = b - \beta x, \quad \beta > 0.$$

Rovnice (4.37) bude pak mít tvar

$$\frac{dy}{dt} = -\bar{b}y = -by + \beta xy. \quad (4.38)$$

Rovnice (4.36) a (4.38) mohou být exaktněji odvozeny na základě úvahy, že součin xy je přímo úměrný pravděpodobnosti setkání velké a malé ryby, které vede ke snížení množství malých ryb a zvýšení množství velkých ryb (α a β jsou koeficienty úměrnosti). Později se s tímto způsobem modelování seznámíte ve fyzikální chemii, kde bude definována rychlost chemické reakce. Dostali jsme tedy autonomní soustavu dvou nelineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -by + \beta xy, \end{aligned} \quad (4.39)$$

kde a, b, α, β jsou kladné parametry soustavy.

Soustava (4.39) má dva rovnovážné (na čase nezávislé) stavy

$$S_1 = [0, 0], \quad S_2 = \left[\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha} \right],$$

jejichž souřadnice dostaneme řešením rovnic

$$\begin{aligned} ax - \alpha xy &= 0, \\ -by + \beta xy &= 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Rovnovážený stav S_1 charakterizuje stacionární (ustálený) stav rybníka, v němž nejsou žádné ryby.

Druhý rovnovážný stav S_2 popisuje ideální (na čase nezávislý) stav vzájemného poměru mezi populacemi malých a velkých ryb. Ve skutečnosti se bude reálný stav těchto dvou populací pohybovat “kolem” stavu S_2 s většími či menšími výchyly a bude záviset na počátečních podmínkách $x(0)$ a $y(0)$.

Soustava (4.39) je nelineární, tudíž ji nemůžeme řešit metodou z odstavce 4.3. Avšak lze ji řešit následujícím obratem (trikem): Vydělením levých a pravých stran v (4.39) dostaneme

$$\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{-by + \beta xy}{ax - \alpha xy}. \quad (4.41)$$

Tím jsme soustavu (4.39) zredukovali na jednu rovnici (4.41), která je “naštěstí” řešitelná metodou separace proměnných, neboť

$$\frac{-by + \beta xy}{ax - \alpha xy} = \frac{y}{a - \alpha y} \cdot \frac{-b + \beta x}{x},$$

takže

$$\int \frac{a - \alpha y}{y} dy = \int \frac{-b + \beta x}{x} dx.$$

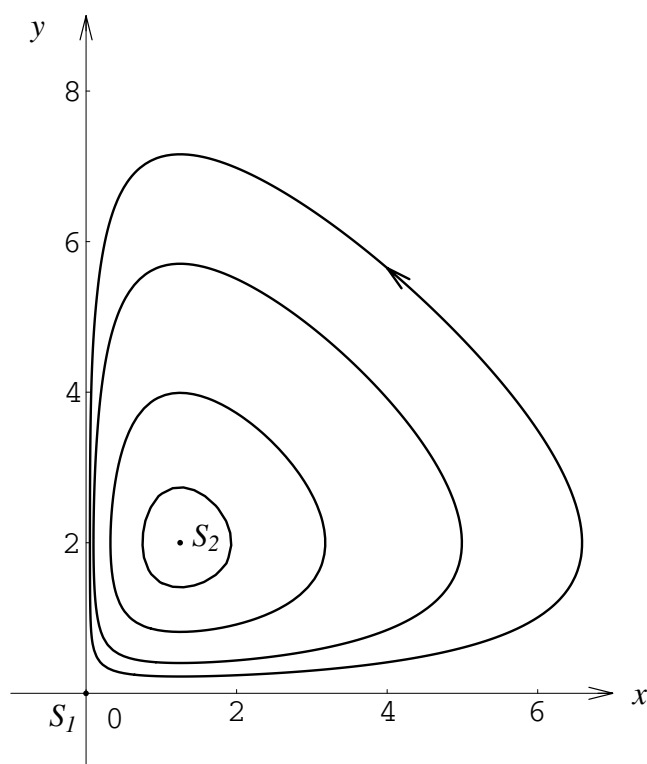
Další výpočet dává ($x > 0, y > 0$):

$$a \ln y - \alpha y = -b \ln x + \beta x - C_1$$

a po úpravě

$$\ln(x^b y^a) - \alpha y - \beta x + C = 0. \quad (4.42)$$

Rovnice (4.42) je rovnicí uzavřené křivky. Pro různé hodnoty konstanty C (daných počáteční podmínkou) obdržíme systém uzavřených křivek, které jsou trajektoriemi původní soustavy (4.39) v rovině x, y . Tyto trajektorie “obíhají” kolem rovnovážného stavu S_2 , viz obr. 4.3.



Obrázek 4.3:

Trajektorie v obr. 4.3 můžeme získat buď jako křivky zadané rovnicí (4.42) nebo numerickou integrací soustavy diferenciálních rovnic (4.39) s příslušnými počátečními podmínkami. V níže uvedené tabulce jsou uvedeny výsledky integrace Eulerovou metodou pro počáteční podmínku $x(0) = 1, y(0) = 0.2$ pro tři různé hodnoty kroku h . Jsou uvedeny jen výsledky pro vybrané hodnoty času t . Z tabulky je vidět, že krok $h = 0.0025$ již dává dostatečně přesné výsledky, které byly použity pro konstrukci obrázku 4.3.

Eulerova metoda pro systém (4.39), $a = 2, b = 1, \alpha = 1, \beta = 0.8, x(0) = 1, y(0) = 0.2$.

t	$h = 0.01$		$h = 0.005$		$h = 0.0025$	
	x	y	x	y	x	y
0.2	1.42931	0.19812	1.43158	0.19833	1.43272	0.19843
1.3	7.05718	2.13005	6.98010	2.20838	6.93908	2.24833
1.8	1.28391	7.69620	1.25854	7.57817	1.24703	7.51963
3.3	0.02128	2.10871	0.02442	2.08915	0.02609	2.07973
6.1	0.72569	0.17789	0.85109	0.18812	0.91858	0.19393

Cvičení 4.17: Ukažte, že kladné poloosy x, y jsou trajektoriemi soustavy (4.39) a vysvětlete význam řešení, která odpovídají těmto trajektoriím.

Návody ke cvičením z kap. 4

4.9 a) V (4.22) volte $c_1 = 0, c_2 = 1$ a ukažte, že rovnice $x(t) = 4e^{5t}, y(t) = ye^{5t}, t \in \mathbb{R}$ jsou parametrickými rovnicemi polopřímky $y = \frac{1}{4}x$. V případech b), c), d) postupujte analogicky.

4.10 Dosadte dané počáteční podmínky do (4.22).

4.11 Opakujte postup z příkladu 4.8.

4.17 Pro kladnou poloosu x : Po dosazení $y = 0$ do (4.39) se soustava zredukuje na $\dot{x} = ax$ a $\dot{y} = 0$.

Kapitola 5

Funkce více proměnných, jejich spojitost a limita

Ve skriptech [MI] jsme se seznámili s funkcemi jedné a dvou reálných proměnných. V této kapitole zobecníme pojem funkce na funkce více proměnných. Nejprve v následujícím odstavci zavedeme pojmy, které budeme potřebovat v dále při vyšetřování vlastností funkcí více proměnných.

5.1 Některé vlastnosti bodových množin v \mathbb{R}^n

Základní význam má pojem **okolí bodu**, který zobecňuje známou definici okolí ze skript [MI]. Připomeňme, že vzdálenost dvou bodů $X = (x_1, \dots, x_n)$ a $Y = (y_1, \dots, y_n)$ z \mathbb{R}^n je číslo

$$\rho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}.$$

Definice 5.1: Je-li $\varepsilon > 0$, pak ε -ovým okolím bodu $X \in \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu bodů

$$O_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n; \rho(X, Y) < \varepsilon\}.$$

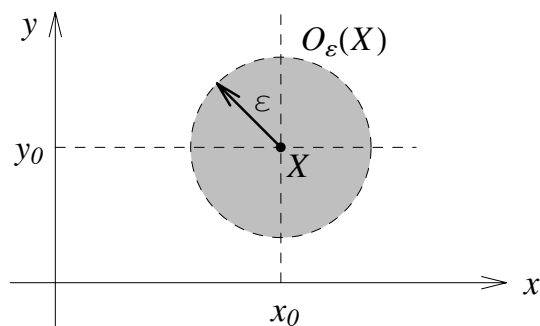
Podobně definujeme **prstencové okolí** bodu $X \in \mathbb{R}^n$:

$$P_\varepsilon(X) = \{Y \in \mathbb{R}^n; 0 < \rho(X, Y) < \varepsilon\},$$

tj.

$$P_\varepsilon(X) = O_\varepsilon(X) \setminus \{X\}.$$

Zřejmě pro $n = 2$ je ε -ové okolí bodu X množina bodů ležících uvnitř kruhu se středem v bodě X a poloměrem ε , viz obr.5.1, pro $n = 3$ je ε -ové okolí bodu X množina bodů ležících uvnitř koule se středem v bodě X a poloměrem ε .



Obrázek 5.1:

Definice 5.2: Necht $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Říkáme, že bod $X \in M$ je **vnitřním bodem** množiny M , jestliže existuje okolí $O_\varepsilon(X)$ takové, že

$$O_\varepsilon(X) \subset M.$$

Říkáme, že bod $Y \in \mathbb{R}^n$ je **hraničním bodem** množiny M , jestliže pro každé (jakkoli malé) jeho okolí $O_\varepsilon(Y)$ platí

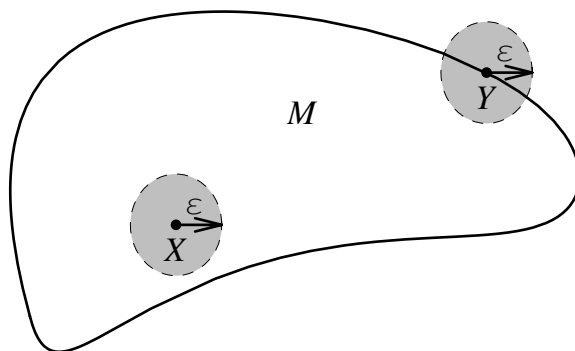
$$O_\varepsilon(Y) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad O_\varepsilon(Y) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset.$$

Na obr. 5.2 je znázorněna množina M , její vnitřní bod X a hraniční bod Y .

Zřejmě každý bod $X \in M$ je buď vnitřním bodem množiny M , nebo hraničním bodem množiny M . Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem** množiny M , množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí** množiny M a značíme

$$\mathcal{H}(M) - \text{hranice množiny } M.$$

Tyto pojmy odpovídají pojmům, které již intuitivně používáme, např. mluvíme-li o vnitřku kruhu.



Obrázek 5.2:

Zdůrazněme, že hraniční bod množiny M nemusí patřit do množiny M . Dále připomeňme, že množinu $\mathbb{R}^n \setminus M$ nazýváme **komplementem** neboli **doplňkem** množiny M . Z definice 5.2 okamžitě plyne, že bod X je hraničním bodem množiny M právě tehdy, když je hraničním bodem jejího doplňku.

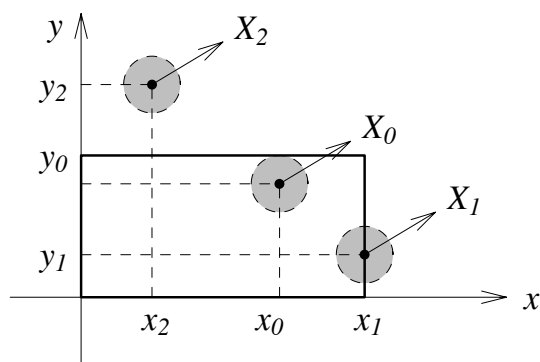
• **Příklad 5.3:** Určeme vnitřek a hranici obdélníka $M \subset \mathbb{R}^2$,

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2 \text{ a } 0 \leq y \leq 1\}.$$

Řešení: a) Uvažujme nejprve libovolný bod $X_0 = (x_0, y_0) \in M$, který neleží na stranách daného obdélníka, tj. $0 < x_0 < 2$, $0 < y_0 < 1$, viz obr. 5.3. Zvolíme-li číslo $\varepsilon > 0$ tak, že je menší než vzdálenost bodu X_0 od jednotlivých stran obdélníka, pak jistě $O_\varepsilon(X_0) \subset M$. Bod X_0 je tedy vnitřním bodem obdélníka M .

b) Uvažujme nyní bod $X_1 = (x_1, y_1)$, který leží na některé straně obdélníka M , viz obr. 5.3. Pak zřejmě každé okolí $O_\varepsilon(X_1)$ obsahuje jak body z M , tak body z $\mathbb{R}^2 \setminus M$, tedy

bod X_1 je hraničním bodem M .



Obrázek 5.3:

c) Zvolíme-li bod $X_2 \in \mathbb{R}^2$, který nepatří do M , pak jistě najdeme okolí $O_\varepsilon(X_2)$, které neprotíná M , a tedy bod X_2 není hraničním bodem obdélníka M , viz obr. 5.3. Tedy vnitřkem množiny $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ je množina $(0, 2) \times (0, 1)$ a hranici množiny M pak tvoří strany daného obdélníka.

Definice 5.4: Říkáme, že množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je **otevřená**, jestliže každý bod množiny G je jejím vnitřním bodem. Říkáme, že množina $F \subset \mathbb{R}^n$ je **uzavřená**, jestliže její doplněk $\mathbb{R}^n \setminus F$ je otevřená.

Věta 5.5:

Množina $F \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená právě tehdy, když každý hraniční bod množiny F patří do množiny F , tj. $\mathcal{H}(F) \subseteq F$.

Důkaz:

1. Nejprve dokážeme, že je-li množina F uzavřená, pak $\mathcal{H}(F) \subseteq F$. Necht' tedy je F uzavřená. Pak je doplněk $\mathbb{R}^n \setminus F$ otevřená množina. Vezměme libovolný bod $X \in \mathcal{H}(F)$. Kdyby $X \notin F$, pak $X \in \mathbb{R}^n \setminus F$, což je otevřená množina, takže bod X by byl vnitřním bodem této množiny. Pak by existovalo jeho okolí, které by celé náleželo množině $\mathbb{R}^n \setminus F$. To je spor s tím, že $X \in \mathcal{H}(F)$. Musí tedy $X \in F$, což jsme měli dokázat.

2. Nyní dokážeme obrácenou implikaci, tj. je-li $\mathcal{H}(F) \subseteq F$, pak je F uzavřená. Necht' tedy $\mathcal{H}(F) \subseteq F$, to znamená že žádný hraniční bod množiny F neleží v $\mathbb{R}^n \setminus F$. Pak každý bod $X \in (\mathbb{R}^n \setminus F)$ má okolí, které celé leží v této množině, tedy $\mathbb{R}^n \setminus F$ je otevřená a tudíž F je uzavřená, což jsme měli dokázat. ■

Například obdélník M z příkladu 5.3 je uzavřená množina, protože každý její hraniční bod do ní patří.

• **Poznámka 5.6:** Samozřejmě "většina" podmnožin \mathbb{R}^n není ani otevřená ani uzavřená. Například uvažujeme-li obdélník M z příkladu 5.3 bez jedné jeho strany, nejedná se ani o otevřenou ani o uzavřenou množinu. Obecně lze říci, že otevřené množiny jsou většinou určeny ostrými nerovnostmi, uzavřené množiny neostrými nerovnostmi. Např. jsme zjistili, že $\{(x, y); 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ je uzavřená a v jejím zápisu vystupují pouze neostřé nerovnosti, množina $\{(x, y); 0 < x < 2, 0 < y < 1\}$ je otevřená a v jejím zápisu vystupují pouze ostré nerovnosti.

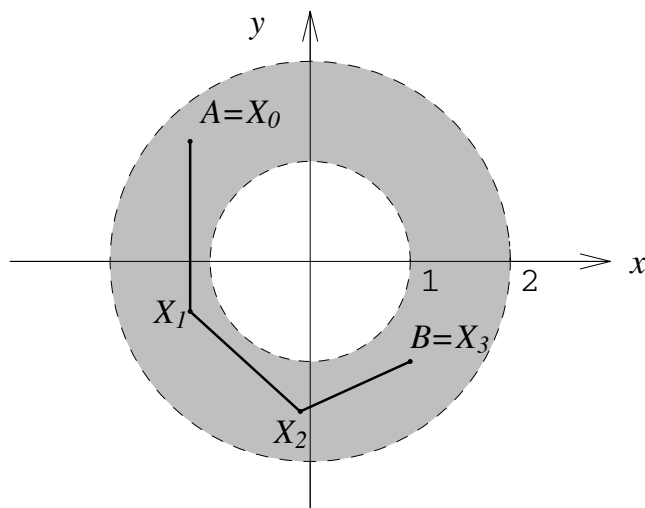
Definice 5.7: Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **omezená** (resp. ohraničená), jestliže existuje $k > 0$ takové, že vzdálenost každého bodu $X \in M$ od počátku O je menší nebo rovna k , tj.

$$\rho(X, O) \leq k.$$

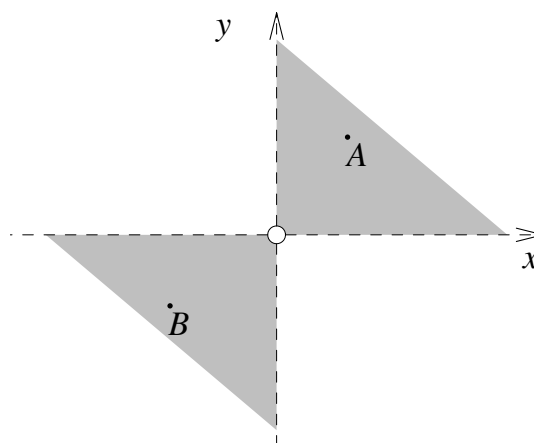
Například obdélník z příkladu 5.3 je množina ohraničená, číslo k lze volit tak aby platilo $k \geq \sqrt{5}$. Naopak, je-li $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$, tj. M je první kvadrant, je M neohraničená množina.

Dále zavedeme pojem souvislé množiny. Abychom mohli podat názornou definici, omezíme se na otevřené množiny, i když lze pojem souvislosti definovat i pro obecnější množiny.

Definice 5.8: Necht $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Říkáme, že G je **souvislá** množina, jestliže pro libovolné dva body $A, B \in G$ existují body $X_0, \dots, X_k \in G$, $X_0 = A$, $X_k = B$, tak, že všechny úsečky s krajními body X_{i-1}, X_i , $i = 1, \dots, k$, leží v množině G , tj. body A, B lze spojit "lomenou čarou", skládající se z úseček, která celá leží v množině G . Souvislou otevřenou množinu budeme nazývat **oblast**. **Omezenou** oblast spolu s její hranicí budeme nazývat **uzavřenou oblastí**.



Obrázek 5.4:



Obrázek 5.5:

Například mezikruží $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ je oblast, viz obr. 5.4. Přidáme-li k M obě hraniční kružnice, dostaneme uzavřenou oblast

$$\overline{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Naproti tomu množina

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \cdot y > 0\}$$

není souvislá množina, viz obr. 5.5. Jsou-li body $A, B \in G$ zvoleny tak, že bod A leží v prvním kvadrantu a bod B ve třetím, pak je zřejmé nelze spojit lomenou čarou, která celá leží v G .

Definice 5.9: Říkáme, že množina $K \subset \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro libovolné dva body $A, B \in K$ leží celá úsečka s krajními body A, B v množině K .

Například obdélník M z příkladu 5.3 i jeho vnitřek jsou konvexní množiny. Naproti tomu mezikruží na obr. 5.4 není konvexní množina.

5.2 Funkce více reálných proměnných

Definice 5.10: Necht $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Reálnou **funkcí n reálných proměnných**, definovanou na množině M , rozumíme předpis f , který každé uspořádané n -tici reálných čísel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$$

přiřazuje právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$. To zapisujeme např. ve tvaru

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

nebo

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Množinu M nazýváme **definičním oborem** funkce f a píšeme $M = D(f)$.

• **Poznámka 5.11:** Většinou budeme pracovat s funkcemi zadanými nějakým analytickým předpisem. **Přirozeným definičním oborem** takové funkce rozumíme pak množinu všech uspořádaných n -tic reálných čísel, pro které má daný předpis smysl. Například, je-li

$$f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 + x_2 + x_3)$$

funkce tří reálných proměnných, pak přirozeným definičním oborem rozumíme množinu

$$D(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 > 0\},$$

tedy jistý poloprostor prostoru \mathbb{R}^3

• **Příklad 5.12:** a) Ve skriptech [MI] v kapitole 13 jsme zavedli normu vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vztahem

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Norma vektoru je tedy funkcí n proměnných, tj. zobrazení z množiny \mathbb{R}^n do množiny \mathbb{R} , přesněji na množinu $\langle 0, +\infty \rangle$.

b) Necht $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ je pevně zvolený vektor z \mathbb{R}^n . Pak funkce

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{a} \cdot \vec{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

je dalším příkladem funkce n proměnných, definované na celém \mathbb{R}^n . Je to lineární funkce n proměnných, viz odstavec 2.2.

S pojmem grafu funkce jedné a dvou proměnných jsme se setkali ve skriptech [MI]. Graf funkce jedné reálné proměnné je jistá křivka v rovině \mathbb{R}^2 a graf funkce dvou proměnných je jistá plocha v trojrozměrném prostoru \mathbb{R}^3 . Graf funkce více než dvou proměnných si již představit nedovedeme, i když formálně jej definujeme naprosto analogicky, viz následující definice:

Definice 5.13: Necht $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných, definovaná na neprázdné množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom **grafem** funkce f rozumíme množinu

$$\text{Graf}(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M, z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Pro funkci f dvou proměnných budeme obvykle **nezávisle proměnné** značit symboly x a y a hodnoty **závisle proměnné** symbolem z , tedy

$$z = f(x, y).$$

Stejnými symboly budeme označovat i osy při grafickém znázornění. Tak jsme ostatně postupovali již dříve.

Pro funkci f více než dvou proměnných budeme obvykle **nezávisle proměnné** označovat symboly x_1, x_2, \dots, x_n a hodnoty **závisle proměnné** symbolem z , tedy

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

5.3 Zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k

Definice 5.14: Necht $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. **Zobrazením f** množiny M do \mathbb{R}^k rozumíme předpis, který každé uspořádané n -tici $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ přiřazuje právě jednu uspořádanou k -tici $(y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$. To zapisujeme například ve tvaru

$$(y_1, y_2, \dots, y_k) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

nebo

$$\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Množinu M nazýváme **definičním oborem** zobrazení \mathbf{f} a píšeme $M = D(\mathbf{f})$.

Vysvětleme, jakým způsobem je zobrazení $\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ zadáno. Protože $\mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^k$ je k -tice reálných čísel (y_1, y_2, \dots, y_k) , pak každé y_i , $i = 1, 2, \dots, k$ závisí na proměnných x_1, x_2, \dots, x_n , to znamená že každé y_i je funkcí (označme ji např. f_i) n proměnných x_1, x_2, \dots, x_n .

Tedy

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_k &= f_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Označíme-li

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

můžeme vztahy (5.1) napsat stručně takto

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

kde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Funkce f_1, f_2, \dots, f_k nazýváme **souřadnicovými funkcemi zobrazení \mathbf{f}** .

Přírozeným definičním oborem zobrazení \mathbf{f} rozumíme

$$D(\mathbf{f}) = \bigcap_{i=1}^k D(f_i).$$

• **Příklad 5.15:** Uvažujme zobrazení

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_2 + \ln x_1, x_1 + \ln x_2, x_1 + x_2).$$

Rozepsáno do souřadnic dává

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2) = x_2 + \ln x_1 \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2 \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Přírozený definiční obor tohoto zobrazení je zřejmě

$$D(\mathbf{f}) = \{(x_1, x_2); x_1 > 0, x_2 > 0\},$$

což je první kvadrant. Zobrazení \mathbf{f} přiřazuje každé dvojici reálných kladných čísel trojici čísel, např. $\mathbf{f}(1, 1) = (1, 1, 2)$ nebo $\mathbf{f}(1, e) = (e, 2, 1 + e)$.

• **Příklad 5.16:** Jiným příkladem zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k je lineární zobrazení reprezentované maticí $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (k, n) , kterým jsme se zabývali v odstavci 2.3. V tomto případě mají souřadnicové funkce tvar

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_k &= a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n. \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.3.1 Různé interpretace zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k

Je užitečné a nutné si uvědomit, v jakých situacích se setkáváme s použitím zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k . Dříve než uvedeme několik případů, připomeňme si že uspořádaná n -tice reálných čísel (kde $n = 1, 2, 3, \dots$) nám může představovat **bod** v \mathbb{R}^n (chápeme-li n -tici jako kartézské souřadnice bodu), nebo **vektor**, viz odstavec 11 skript [MI].

Případ 1.: Zobrazení z \mathbb{R}^1 do \mathbb{R}^2 je případ, kdy každému $t \in \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ přiřazujeme dvojici $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$. Jedná se tedy o zobrazení intervalu do roviny, tj. o **parametrické rovnice rovinné křivky!** Zobrazení z \mathbb{R}^1 do \mathbb{R}^3 pak můžeme interpretovat jako parametrické rovnice prostorové křivky, viz kapitolu 11.

Případ 2.: Zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^3 můžeme interpretovat jako zobrazení, které každému **bodu** $X = (x_1, x_2, x_3)$ přiřazuje **bod** $Y = (y_1, y_2, y_3)$, kde příslušné trojice znamenají kartézské souřadnice bodů v \mathbb{R}^3 . Píšeme pak např.

$$Y = \mathbf{f}(X).$$

Případ 3.: V kapitole 12 se setkáme se zobrazením, které každému bodu $X \in \mathbb{R}^3$ přiřazuje vektor $\vec{v}(X)$, který z tohoto bodu vychází. Je to opět případ zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^3 interpretované geometricky.

Závěr: V textu této a dalších tří kapitol odhlédneme od všech možných interpretací zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k a budeme pracovat pouze s n -ticemi a používat značení z definice 5.14.

5.4 Spojitost a limita funkcí více proměnných

S pojmem spojitosti funkce dvou proměnných jsme se již setkali ve skriptech [MI]. Zde zavedeme pojmy spojitosti a limity obecně pro funkci n proměnných. Začneme pojmem spojitosti. Podobně jako pro funkci jedné proměnné má smysl mluvit o spojitosti funkce pouze v bodech, ve kterých je funkce definována. Intuitivní význam spojitosti funkce více proměnných je stejný jako pro funkce jedné proměnné:

Funkce $f : M \rightarrow R$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, je spojitá v bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, jestliže pro body “blízké” bodu \mathbf{x}_0 jsou funkční hodnoty “blízké” funkční hodnotě $f(\mathbf{x}_0)$.

Tuto představu formálně popisuje následující definice.

Definice 5.17: Necht' je funkce $f : M \rightarrow R$ definována na **otevřené** množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a necht' $\mathbf{x}_0 \in M$. Říkáme, že funkce f je **spojitá v bodě** \mathbf{x}_0 , jestliže platí: Ke každému okolí $O_\varepsilon(f(\mathbf{x}_0))$ existuje okolí $O_\delta(\mathbf{x}_0)$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ je $f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f(\mathbf{x}_0))$. Říkáme, že funkce f je **spojitá**, jestliže je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Podmínku z definice můžeme přeformulovat s použitím kvantifikátorů následovně:
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tak, že pro každé \mathbf{x} je splněna následující implikace

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon. \quad (5.3)$$

Uvědomme si, že $f(\mathbf{x})$ je reálné číslo a tedy okolí $O_\varepsilon(f(\mathbf{x}_0))$ je otevřený interval se středem $f(\mathbf{x}_0)$ a poloměrem ε .

• **Poznámka 5.18:** V definici spojitosti jsme se omezili kvůli jednoduchosti na funkce $f : M \rightarrow R$, definované na **otevřené** množině M . V tomto případě jistě pro každé $\mathbf{x}_0 \in M$ existuje okolí $O(\mathbf{x}_0)$ takové, že $O(\mathbf{x}_0) \subset M$, tj. takové, že f je definována na celém okolí $O(\mathbf{x}_0)$.

Uvažujme-li funkci $f : M \rightarrow R$, kde M není nutně otevřená množina, pak pokud \mathbf{x}_0 není vnitřním bodem množiny M , je funkce f definována pouze na nějaké části okolí $O(\mathbf{x}_0)$ (dokonce může být definována pouze v bodě \mathbf{x}_0). V takovém bodě \mathbf{x}_0 je pak funkce f spojitá, jestliže ke každému $O_\varepsilon(f(\mathbf{x}_0))$ existuje $O_\delta(\mathbf{x}_0)$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap M$ je $f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f(\mathbf{x}_0))$.

V dalším budeme většinou pracovat s funkcemi, které jsou spojitě na svém definičním oboru. Poznat spojitost těchto funkcí nám umožní (podobně jako pro funkci jedné proměnné) věty o spojitosti součtu, součinu a podílu, spojitosti složené funkce a dále o spojitosti některých jednoduchých funkcí.

Věta 5.19:

Nechť jsou funkce $f(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ spojitě v bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Potom jsou v bodě \mathbf{x}_0 spojitě i funkce

$$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}), \quad \text{a funkce } \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$$

pokud je $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$.

Věta 5.20:

Nechť je funkce $f(\mathbf{x})$ spojitá v bodě $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a funkce $g(y)$ spojitá v bodě $f(\mathbf{x}_0)$. Potom je funkce

$$g(f(\mathbf{x}))$$

spojitá v bodě \mathbf{x}_0 .

Uvědomme si, že funkce g v předchozí větě je funkcí **jedné** proměnné, protože $f(\mathbf{x}) \in R$.

Věta 5.21:

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow R$ je definována předpisem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i,$$

kde i je pevný index, $1 \leq i \leq n$.

Potom je funkce f spojitá na celém \mathbb{R}^n .

Důkaz této věty pro $n = 2$ je uveden ve skriptech [MI] (viz věta 3.4).

Cvičení 5.22: Ukažte, že konstantní funkce $f(x, y) \equiv K$ je spojitá na celém \mathbb{R}^2 .

• **Poznámka 5.23:** Důležitost věty 5.21 spočívá v tom, že nám spolu s větami 5.19 a 5.20 umožňuje snadno dokazovat spojitost funkcí více proměnných pomocí spojitosti funkcí jedné proměnné. (Porovnej větu 5.21 s větou 3.4 skript [MI].) Například, uvažujme-li funkci

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Pak funkce $f(x_1, x_2, x_3)$ je součtem tří spojitých funkcí a to funkce $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_2$ a $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3$, a je tedy podle věty 5.19 spojitá. Věta 5.21 říká právě to, že funkce f_1 , f_2 a f_3 jsou spojité.

• **Příklad 5.24:** Ukažme, že funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\operatorname{arctg}(x_1 - x_2)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

je spojitá na svém přirozeném definičním oboru $D(f) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. K ověření spojitosti funkce f uijeme opakovaně vět 5.19, 5.20, 5.21. Funkce $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2$ a $g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jsou spojité na \mathbb{R}^2 podle poznámky 5.23 a vět 5.19 a 5.21. Spojitost funkce $\operatorname{arctg}(x_1 - x_2)$ plyne z věty 5.20 o spojitosti složené funkce. Spojitost funkce f pak plyne z věty 5.19 o spojitosti podílu spojitých funkcí.

5.4.1 Věta o maximu a minimu

O spojitých funkcích jedné proměnné známe důležitou větu, která říká, že funkce spojitá na uzavřeném intervalu zde nabývá maxima i minima. Analogie této věty platí i pro funkce více proměnných. Zde budeme definovat pojem **globálního** maxima a minima. Vyšetřování **lokálních extrémů** se pak budeme zabývat v kapitole 7.

Definice 5.25: Říkáme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ má v bodě $\mathbf{x}_0 \in M$ **globální maximum (minimum)**, jestliže pro každé $\mathbf{x} \in M$ je

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad (f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)).$$

Věta 5.26:

Nechť funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je na M spojitá a nechť M je **uzavřená a ohraničená** množina. Potom funkce f nabývá na množině M svého maxima a minima, tj. existují body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M$ tak, že funkce f má v bodě \mathbf{x}_1 globální maximum a v bodě \mathbf{x}_2 globální minimum.

5.5 Limita funkce více proměnných

Přejděme nyní k pojmu limity. Význam limity funkce více proměnných je stejný jako u funkcí jedné proměnné. **Limita funkce** f v bodě \mathbf{x}_0 nám popisuje chování (tzn. dává nám informaci o funkčních hodnotách) v okolí bodu \mathbf{x}_0 .

Zápis

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

znamená, že pro body \mathbf{x} “blízké” \mathbf{x}_0 jsou hodnoty funkce $f(\mathbf{x})$ “blízké” limitě L . Podobně jako u funkcí jedné proměnné zjišťujeme limitu funkce více proměnných hlavně v bodech, kde funkce není definována anebo v bodech, kde není spojitá.

K tomu, aby funkce f měla v bodě \mathbf{x}_0 limitu, nemusí být v tomto bodě vůbec definována. Je však třeba, aby byla definována v bodech **blízko** bodu \mathbf{x}_0 . Přitom nebudeme předpokládat, že funkce f je definována na celém prstencovém okolí $P_\delta(\mathbf{x}_0)$, ale pouze, že v **každém** prstencovém okolí $P_\delta(\mathbf{x}_0)$ (tj. kde δ je libovolně malé kladné číslo) leží nějaký bod \mathbf{x} , ve kterém je funkce f definována.

Definice 5.27: Nechtě je funkce $f : M \rightarrow R$ definována na množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechtě pro každé prstencové okolí $P_\delta(\mathbf{x}_0)$ platí $M \cap P_\delta(\mathbf{x}_0) \neq \emptyset$. Říkáme, že funkce f má v bodě \mathbf{x}_0 **limitu** $L \in R$ a píšeme

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L,$$

jestliže ke každému $O_\varepsilon(L)$ existuje $P_\delta(\mathbf{x}_0)$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in M \cap P_\delta(\mathbf{x}_0)$ je $f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(L)$.

Podmínku z definice můžeme přepsat následující formou

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

tak, že pro každé $\mathbf{x} \in M$ je splněna následující implikace

$$0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon. \quad (5.4)$$

Věta 5.28:

Funkce $f : M \rightarrow R$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ má v bodě \mathbf{x}_0 nejvýše jednu limitu.

Důkaz:

Důkaz této věty je doslova stejný jako důkaz obdobné věty 3.6 z [MI] pro funkce jedné proměnné. ■

5.5.1 Nevlastní limity

Analogicky jako u funkcí jedné proměnné zavádíme i nevlastní limity.

Definice 5.29: Nechť je funkce $f : M \rightarrow R$ definována na množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť pro každé prstencové okolí $P_\delta(\mathbf{x}_0)$ platí $M \cap P_\delta(\mathbf{x}_0) \neq \emptyset$. Říkáme, že funkce f má v bodě \mathbf{x}_0 limitu $+\infty$ a píšeme

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty,$$

jestliže ke každému $k \in R$ existuje $P_\delta(\mathbf{x}_0)$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in M \cap P_\delta(\mathbf{x}_0)$ je

$$f(\mathbf{x}) > k.$$

Definici nevlastní limity $-\infty$ je ponechána čtenáři jako cvičení.

5.5.2 Souvislost mezi spojitostí a limitou funkce

Zásadní význam má následující věta, která dává do souvislosti pojem limity a spojitosti.

Věta 5.30:

Nechť je funkce $f : M \rightarrow R$ definována na **otevřené** množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathbf{x}_0 \in M$. Potom je funkce f spojitá v bodě \mathbf{x}_0 právě tehdy, když

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Z věty 5.30 plyne, že výpočet limity funkce v bodech, kde je tato funkce spojitá, je triviální a redukuje se na výpočet funkční hodnoty. Naopak výpočet limity funkcí více proměnných v bodech, kde funkce není spojitá a nebo není definována, je obecně značně složitý a nebudeme se jím podrobně zabývat.

Poznamenejme jen, že platí analogické věty o limitě součtu, součinu a podílu dvou funkcí a o limitě složené funkce, jako platily pro limity funkcí jedné proměnné. Na druhé straně ale neexistuje žádná obdoba l'Hospitalova pravidla pro funkce více proměnných.

Představu o chování funkce více proměnných v okolí bodu \mathbf{x}_0 můžeme získat též pomocí limit funkcí jedné proměnné a to tak, že místo

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$$

počítáme například limitu

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{x}_0 + t\vec{a}).$$

Zřejmě

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\vec{a}$$

je parametrická rovnice přímky procházející bodem \mathbf{x}_0 se směrovým vektorem \vec{a} . Limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{x}_0 + t\vec{a})$$

je již limitou funkce **jedné** proměnné t , a tu obvykle umíme vypočítat. Zhruba řečeno, tato limita nám říká, k čemu se blíží funkční hodnoty $f(\mathbf{x})$, jestliže se \mathbf{x} blíží k \mathbf{x}_0 po přímce $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\vec{a}$.

Zřejmě, aby existovala limita $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, musí **nutně** $\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{x}_0 + t\vec{a})$ **mít stejnou hodnotu** pro všechny vektory \vec{a} . Ale pozor, toto je podmínka nutná, ale ne postačující, viz dále poznámku 5.32.

• **Příklad 5.31:** Uvažujme funkci

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Zajímá nás její chování na okolí bodu $(0, 0)$. Zvolme přímku $y = kx$, která prochází počátkem a spočtěme limitu funkce $f(x, y)$ pro (x, y) blížící se bodu $(0, 0)$ po této přímce. Parametrické rovnice přímky $y = kx$ jsou například $x = t$ a $y = kt$.

Spočtěme tedy limitu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{tk^2t}{t^2 + k^2t^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Protože po každé přímce dostaneme jinou hodnotu limity, pak podle věty 5.28 můžeme říci, že limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

neexistuje.

• **Poznámka 5.32:** Poznamenejme, že i když se hodnoty funkce $f(\mathbf{x})$ blíží stále ke stejnému číslu l pokud se blížíme k bodu \mathbf{x}_0 po libovolné přímce procházející tímto bodem, neznamená to ještě, že

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l.$$

Lze pouze tvrdit, že pokud limita $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ existuje, je nutně její hodnota rovna číslu l .

Například pro funkci

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x},$$

jejíž vrstevnice jsme vyšetřovali v příkladu 1.16 skript [MI], limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{2x}$$

neexistuje, neboť z výsledku příkladu 1.16 plyne, že v libovolně malém okolí počátku nabývá naše funkce všech reálných hodnot kromě nuly (neboť počátkem procházejí všechny možné vrstevnice).

Spočteme-li ale limitu funkce $f(x, y)$ pro (x, y) blížící se k $(0, 0)$ po přímce $x = t$, $y = kt$, dostáváme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 + k^2t^2}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}t(1 + k^2) \right) = 0$$

pro každé $k \in R$.

• **Příklad 5.33:** Ukážeme, jak lze pro výpočet limity funkce **dvou** proměnných s výhodou použít **polárních souřadnic**. Uvažujme funkci

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2x},$$

v níž položíme $x = r \cos \varphi$ a $y = r \sin \varphi$. Pak dostáváme po zřejmé úpravě

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2x} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r}{2r \cos \varphi} = \frac{1}{2 \cos \varphi}.$$

Vidíme, že hodnota limity závisí na úhlu φ pod kterým se k počátku blížíme, tedy limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2x}$$

neexistuje.

Naproti tomu pro funkci

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

dostaneme po úpravě

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} (r \cos \varphi \sin \varphi) = 0.$$

Tato limita (chápaná jako limita funkce dvou proměnných r a φ) nezávisí na hodnotách proměnné φ , proto můžeme psát

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

5.5.3 Spojitost a limita zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k

Na závěr se ještě stručně zmíníme o spojitosti zobrazení

$$\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad M \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5.5)$$

Spojitost a limitu lze definovat formálně úplně stejně jako pro funkce více proměnných. Ukážeme si to pro případ spojitosti a definici limity zobrazení ponecháme čtenáři jako cvičení.

Definice 5.34: Necht' je zobrazení $\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ definována na **otevřené** množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a necht' $\mathbf{x}_0 \in M$. Říkáme, že zobrazení \mathbf{f} je **spojité v bodě \mathbf{x}_0** , jestliže platí: Ke každému okolí $O_\varepsilon(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$ existuje okolí $O_\delta(\mathbf{x}_0)$ takové, že pro každé $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ je $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$.
 Říkáme, že zobrazení \mathbf{f} je **spojité**, jestliže je spojitý v každém bodě svého definičního oboru.

Víme, že zobrazení

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

je zadáno pomocí souřadnicových funkcí

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_k &= f_k(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dá se dokázat, že zobrazení \mathbf{f} je spojitě v bodě \mathbf{x}_0 právě tehdy, když všechny funkce f_i , $i = 1, 2, \dots, k$ jsou spojité v bodě \mathbf{x}_0 .

Podobně

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_k)$$

právě tehdy, když

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Vidíme tedy, že vyšetřování spojitosti a limit zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k lze převést na vyšetřování spojitosti a limit jejich souřadnicových funkcí.

Návody ke cvičením z kap. 5

5.22 Ověřte, že podmínky v definici 5.17 jsou splněny. Všimněte si, že v tomto případě lze číslo $\delta > 0$ volit libovolně.

Kapitola 6

Derivace funkcí více proměnných

6.1 Parciální derivace

Podobně jako derivace byla jedním ze základních prostředků pro vyšetřování vlastností funkcí jedné reálné proměnné, budou parciální derivace jedním ze základních prostředků pro vyšetřování vlastností funkcí více proměnných. S parciálními derivacemi funkcí dvou proměnných jsme se již setkali ve skriptech [MI]. Zavedme nyní analogicky parciální derivace pro funkci n proměnných

Definice 6.1: Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$, je funkce n proměnných definovaná na nějakém okolí bodu $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in M$. Zvolme pevné i , $1 \leq i \leq n$ a označme

$$g(u) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, u, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) .$$

Potom derivaci $g'(x_i^0)$ funkce g v bodě x_i^0 (pokud existuje) nazýváme **parciální derivací** funkce f podle x_i v bodě \mathbf{x}_0 a značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} .$$

Někdy se též pro označení parciálních derivací používá indexů a místo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ se píše $f_{x_i}(\mathbf{x}_0)$. V těchto skriptech budeme používat výhradně označení zavedené v předchozí definici.

Parciální derivace můžeme též zavést přímo pomocí limity. Víme, že pro funkci $z = g(x)$ jedné proměnné je

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} .$$

Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h} , \quad i = 1, \dots, n .$$

• **Poznámka 6.2:** Uvědomme si, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ funkce f podle x_i v bodě $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ je číslo, které závisí na volbě bodu \mathbf{x} . Měníme-li $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ mění se též hodnoty parciální derivace. Tedy parciální derivace funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ podle x_i je též funkcí n proměnných. V tomto kontextu píšeme obvykle pouze $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ a **proměnné neoznačujeme**. Je-li $z = f(x_1, \dots, x_n)$ funkcí n proměnných, píšeme někdy též $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ místo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Počítání parciálních derivací pro konkrétně zadané funkce by nám nemělo činit potíže. Počítáme-li parciální derivaci funkce $z = f(x_1, \dots, x_n)$ podle x_i , považujeme ostatní proměnné kromě x_i (tj. $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$) za konstanty a derivujeme, jakoby funkce f byla pouze funkcí proměnné x_i . Ukažme si to na příkladech.

• **Příklad 6.3:** Vypočtěme $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 0, 0)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_3}(1, 0, 0)$ pro funkci

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 + x_1 + \ln(x_1 + x_2 + x_3) .$$

Řešení: Počítáme-li $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, považujeme proměnné x_2 a x_3 za konstanty a derivujeme podle proměnné x_1 . Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 x_2 + 1 + \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} .$$

Podobně,

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} .$$

Dosazením hodnot $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$, pak dostaneme $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 0, 0) = 2$ a $\frac{\partial f}{\partial x_3}(1, 0, 0) = 1$.

Jak jsme již řekli, je parciální derivace funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ podle x_i opět funkcí n proměnných. Můžeme ji tedy opět derivovat podle libovolné proměnné x_j , $j = 1, \dots, n$. Tuto derivaci nazýváme **druhou parciální derivací** (derivací druhého řádu) funkce f podle proměnných x_i a x_j . Značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) .$$

Derivujeme-li parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ opět podle x_i , označujeme tuto parciální derivaci symbolem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) .$$

Analogicky zavádíme i **vyšší parciální derivace**.

- **Příklad 6.4:** Pro funkci f z příkladu 6.3 vypočtěme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$.

Řešení: Postupně s využitím výsledků příkladu 6.3 dostáváme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_2 + \frac{-1}{(x_1 + x_2 + x_3)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{-1}{(x_1 + x_2 + x_3)^2} \quad \text{a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{-1}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}.$$

Všimněme si, že v předchozím příkladu je $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}$. Toto není náhoda. Dá se ukázat (viz následující věta), že za dosti obecných předpokladů nezáleží u vyšších parciálních derivací na pořadí proměnných, podle kterých derivujeme.

Věta 6.5:

Má-li funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ spojitě (všechny) druhé parciální derivace na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$, pak na G platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{pro každé } i, j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Rozšířme ještě označení z kapitoly 1, kde jsme symboly $C(I)$, resp. $C^k(I)$ značili množinu všech funkcí (jedné proměnné) spojitých na intervalu I , resp. množinu všech funkcí, které měly na intervalu (a, b) spojitou k -tou derivaci. Podobně pro otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$ označujeme symboly

$$C(G), \text{ resp. } C^k(G)$$

množinu všech funkcí spojitých na G , resp. množinu všech funkcí, které mají na G spojitě parciální derivace až do řádu k (podle všech proměnných). Funkce z $C^1(G)$, resp. $C^k(G)$ nazýváme **spojitě diferencovatelné** na G , resp. **k -krát spojitě diferencovatelné** na G a říkáme, že jsou **třídy** $C^1(G)$, resp. **třídy** $C^k(G)$.

Poznamenejme ještě, že pouhá existence parciálních derivací nezaručuje ještě "hezké" chování dané funkce. Např. z existence parciálních derivací neplyne spojitost funkce. Proto budeme obvykle pracovat s funkcemi třídy $C^1(G)$, resp. $C^k(G)$, $k > 1$ (viz např. předpoklad věty 6.5). Dá se dokázat, že má-li funkce f spojitě parciální derivace prvního řádu na množině G podle všech proměnných, je na množině G spojitá. Tedy jinak zapsáno $C^{k+1}(G) \subset C^k(G)$, pro $k = 0, 1, 2, \dots$, kde $C^0(G) = C(G)$.

Na závěr tohoto odstavce zavedme ještě jeden důležitý pojem.

Definice 6.6: Necht' $f(x_1, \dots, x_n)$ je funkcí n proměnných, bod $X_0 \in D(f)$. Vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right),$$

pokud všechny tyto parciální derivace existují, nazýváme **gradientem** funkce f v **bodě** X_0 a značíme jej $\text{grad } f(X_0)$.

Zdůrazněme, že **gradient** chápeme jako zobrazení, které **bodu** $X \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$ přiřazuje **vektor** $\text{grad } f(X) \in \mathbb{R}^n$. Tedy $\text{grad } f$ je zobrazení do \mathbb{R}^n definované pro všechna $X \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$, pro něž $\text{grad } f(X)$ existuje. Souřadnicové funkce tohoto zobrazení jsou jednotlivé parciální derivace, tj.

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Při geometrickém znázornění umísťujeme vektor $\text{grad } f(X)$ do bodu X .

Někdy se místo označení $\text{grad } f$, $\text{grad } f(X)$ můžeme též setkat s označením ∇f , $\nabla f(X)$. (Symbol ∇ čteme nabla.)

6.2 Derivace ve směru

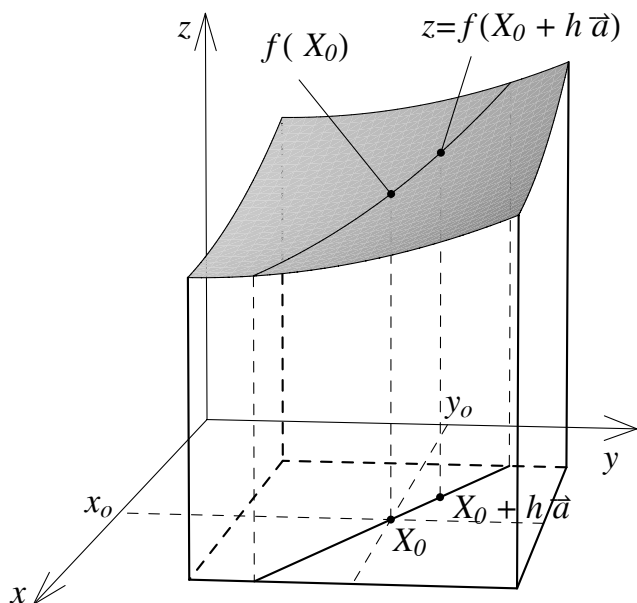
Uvažujeme-li funkci $z = f(x, y)$, pak parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ udávají rychlost změny funkčních hodnot $f(x, y)$ ve směru osy x a ve směru osy y . Zavedeme nyní derivaci funkce v libovolném směru.

Definice 6.7: Necht' $f(x_1, \dots, x_n)$ je funkcí n proměnných, bod $X_0 \in D(f)$ a $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ je vektor s normou $\|\vec{a}\| = 1$. Potom limitu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + h\vec{a}) - f(X_0)}{h}, \quad (6.1)$$

pokud existuje, nazýváme **derivací** funkce f v **bodě** X_0 **ve směru vektoru** \vec{a} a značíme ji $Df(X_0, \vec{a})$.

V definici 6.7 derivace ve směru vektoru \vec{a} jsme předpokládali, že vektor \vec{a} je jednotkový, tj. $\|\vec{a}\| = 1$. Pokud bychom ve výrazu (6.1) uvažovali místo jednotkového vektoru \vec{a} nějaký jeho α násobek, změní se hodnota limity (6.1) právě α -krát. Budeme-li v dalším mluvit o derivaci ve směru **nenulového** vektoru \vec{a} , budeme touto derivací rozumět derivaci ve směru jednotkového vektoru příslušnému \vec{a} , tj. ve směru vektoru $\frac{1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{a}$. Na obr. 6.1 je znázorněna situace definice 6.7 pro případ $n = 2$.



Uvažujeme vlastně pouze funkční hodnoty $f(x, y)$ pro body $X = (x, y)$ ležící na přímce

$$X = X_0 + h\vec{a}$$

a počítáme limitu z podílu přírůstku funkce $f(X_0 + h\vec{a}) - f(X_0)$ a čísla h , pro $h \rightarrow 0$. Derivace $Df(X_0, \vec{a})$ udává rychlost změny funkčních hodnot funkce $f(x, y)$ ve směru vektoru \vec{a} .

Obrázek 6.1:

• **Příklad 6.8:** Vypočtěme $Df(X_0, \vec{a})$ pro funkci $f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$, $X_0 = (1, 2)$, je-li \vec{a} jednotkový vektor příslušný vektoru $(3, -4)$.

Řešení: Zřejmě $\|(3, -4)\| = 5$, a tedy $\vec{a} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. Dále

$$X_0 + h\vec{a} = (1, 2) + h\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(1 + \frac{3}{5}h, 2 - \frac{4}{5}h\right).$$

Tedy

$$f(X_0 + h\vec{a}) = \operatorname{arctg}\left(\left(1 + \frac{3}{5}h\right)\left(2 - \frac{4}{5}h\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(2 + \frac{2}{5}h - \frac{12}{25}h^2\right)$$

a $f(X_0) = \operatorname{arctg} 2$. Podle definice 6.7 dostáváme

$$\begin{aligned} Df(X_0, \vec{a}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}\left(2 + \frac{2}{5}h - \frac{12}{25}h^2\right) - \operatorname{arctg} 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{5} - \frac{24}{25}h}{1 + \left(2 + \frac{2}{5}h - \frac{12}{25}h^2\right)^2} = \frac{2}{25}, \end{aligned}$$

kde jsme pro výpočet limity použili l'Hospitalovo pravidlo.

• **Poznámka 6.9:** Pro funkci dvou proměnných je parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ derivací ve směru vektoru $\vec{e}_1 = (1, 0)$ a parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}$ derivací ve směru vektoru $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Opravdu

$$\begin{aligned} Df((x_0, y_0), \vec{e}_1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

a podobně pro $\frac{\partial f}{\partial y}$. Obecně pro $f(x_1, \dots, x_n)$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = Df(X_0, \vec{e}_i) .$$

Derivaci ve směru lze podle následující věty, kterou dokážeme v odstavci 6.3, počítat jednodušeji, pomocí gradientu dané funkce.

Věta 6.10:

Je-li $f \in C^1(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $X_0 \in G$ a $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{a}\| = 1$, pak

$$Df(X_0, \vec{a}) = \text{grad } f(X_0) \cdot \vec{a} , \tag{6.2}$$

tj. derivace funkce f v bodě X_0 ve směru jednotkového vektoru \vec{a} je za předpokladu spojitosti parciálních derivací funkce f skalárním součinem gradientu funkce f v bodě X_0 a vektoru \vec{a} .

• **Příklad 6.11:** S použitím věty 6.10 lze řešit příklad 6.8 následovně:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2} , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1+x^2y^2} , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{2}{5} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{1}{5} .$$

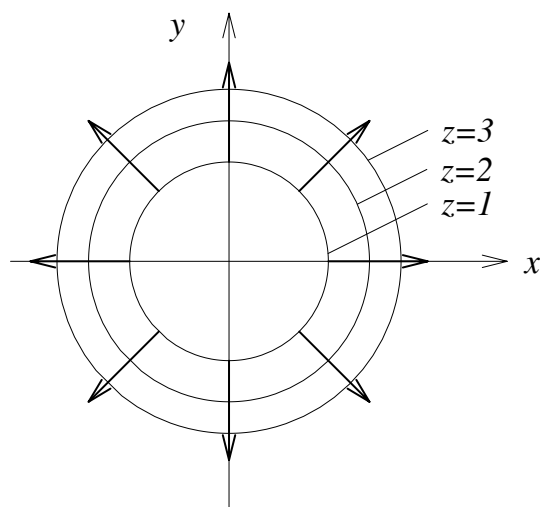
Dále $\vec{a} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$. Tedy

$$Df(X_0, \vec{a}) = \text{grad } f(X_0) \cdot \vec{a} = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{25} .$$

Cvičení 6.12: Vypočtěte $Df(X_0, \vec{a})$ pro funkci $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ v bodě X_0 ve směru jednotkového vektoru \vec{a} příslušnému vektoru $(1, -1)$.

• **Poznámka 6.13:** Vztah (6.2) z věty 6.10 lze též zapsat ve tvaru

$$Df(X_0, \vec{a}) = \text{grad } f(X_0) \cdot \vec{a} = \|\text{grad } f(X_0)\| \|\vec{a}\| \cos \alpha ,$$



Obrázek 6.2:

kde α je úhel mezi vektory $\text{grad } f(X_0)$ a \vec{a} . Z tohoto zápisu vidíme, že $Df(X_0, \vec{a})$ bude největší, pokud $\cos \alpha = 1$, tj. $\alpha = 0$, a tedy \vec{a} bude jednotkový vektor příslušný gradientu. Proto říkáme, že gradient udává **směr nejrychlejšího růstu** funkce.

Např. pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ je $\text{grad } f(1, 2) = (2, 4)$. Tedy vektor $(2, 4)$ udává směr nerychlejšího růstu funkce f . Na obr. 6.2 jsou znázorněny vrstevnice funkce f (tj. křivky s rovnicemi $f(x, y) = K$ pro hodnoty konstanty $K = 1, 2$ a 3) a gradienty v některých bodech.

Všimněte si, že gradient je vždy normálovým vektorem vrstevnice. Toto platí obecně. Uvažujeme-li funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ a nějakou její vrstevnici popsanou rovnicí $f(x, y) = K$, pak gradient funkce f v nějakém bodě (x_0, y_0) této vrstevnice je normálovým vektorem této vrstevnice v bodě (x_0, y_0) .

Podobně pro funkci $f(x, y, z)$ tří proměnných je obecně rovnicí

$$f(x, y, z) = K$$

popsána nějaká **plocha** v prostoru \mathbb{R}^3 a gradient funkce f v nějakém bodě (x_0, y_0, z_0) této plochy je **normálovým vektorem** k této ploše v bodě (x_0, y_0, z_0) . Podrobně si tyto vztahy vysvětlíme v kapitole 8.

6.3 Derivování složených funkcí

Problematiku derivování složených funkcí více proměnných si nejprve ilustrujme na příkladě.

• **Příklad 6.14:** Uvažujme funkci $g(a, b, c)$ tří proměnných a necht' každá proměnná a, b, c ještě závisí nějakým způsobem na proměnných x a y . Např. necht'

$$a = x^2 + y^2, \quad b = xy \quad \text{a} \quad c = x + y. \quad (6.3)$$

Dosadíme-li za proměnné a, b, c do funkce g vztahy (6.3), dostaneme nějakou funkci **dvou proměnných** x, y , kde

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2, xy, x + y).$$

Zkusme nyní vyjádřit parciální derivace funkce f pomocí parciálních derivací funkce g . Všimněte si, že neznáme konkrétní předpis pro funkci g . Budeme pouze předpokládat, že $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Potom se dá ukázat, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x}. \quad (6.4)$$

Parciální derivace

$$\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial b}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial c}{\partial x}$$

můžeme pomocí vztahů (6.3) snadno vypočítat a dosazením do (6.4) dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a} \cdot 2x + \frac{\partial g}{\partial b} \cdot y + \frac{\partial g}{\partial c}. \quad (6.5)$$

Vztah (6.5) můžeme též zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a}(a, b, c) 2x + \frac{\partial g}{\partial b}(a, b, c) y + \frac{\partial g}{\partial c}(a, b, c)$$

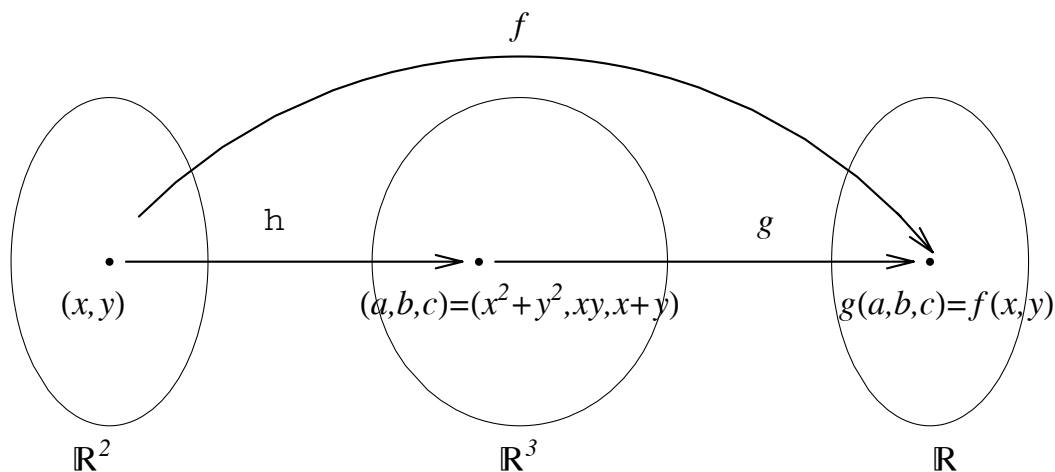
nebo (dosadíme-li za a, b, c ze vztahů (6.3)) ve tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a}(x^2 + y^2, xy, x + y) 2x + \frac{\partial g}{\partial b}(x^2 + y^2, xy, x + y) y + \frac{\partial g}{\partial c}(x^2 + y^2, xy, x + y).$$

Podobně

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial a} \cdot 2y + \frac{\partial g}{\partial b} \cdot x + \frac{\partial g}{\partial c} \quad (6.6)$$

Funkce f je složená funkce vzniklá složením funkce g se zobrazením $\mathbf{h}(x, y) = (x^2 + y^2, xy, x + y)$, kdy $f(x, y) = g(\mathbf{h}(x, y))$, viz obr. 6.3. Někdy též píšeme $f = g \circ \mathbf{h}$.



Obrázek 6.3:

Vztah (6.4) (a podobně vztah (6.6)) vlastně říká, že vnější funkci g derivujeme podle všech jejích proměnných a, b, c a tyto derivace vždy násobíme derivací proměnné a, b nebo c podle x . Následující věta popisuje toto pravidlo v obecném případě.

Věta 6.15:

Nechť $G \subset \mathcal{R}^m$ je otevřená množina, $g(y_1, \dots, y_m) \in C^1(G)$. Nechť $H \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, funkce $h_1, \dots, h_m \in C^1(H)$ a necht' pro každé

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in H \text{ je } \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})) \in G.$$

Položme $y_j = h_j(x_1, \dots, x_n)$ pro $j = 1, \dots, m$ a

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Potom $f \in C^1(H)$ a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(\mathbf{y}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \quad (6.7)$$

pro $i = 1, \dots, n$.

Vztah (6.7) můžeme stručně zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}. \quad (6.8)$$

Tento vztah je velmi důležitý a je třeba si jej zapamatovat. Slovně jej můžeme formulovat takto:

Složenou funkci derivujeme podle proměnné x_i , $i = 1, \dots, n$, tak, že vnější funkci derivujeme podle všech jejích proměnných y_1, \dots, y_m a každou tuto derivaci podle y_j , $j = 1, \dots, m$, násobíme derivací y_j podle x_i . Nakonec všechny takto vzniklá součiny sečteme.

- **Poznámka 6.16:** Vztahy (6.4) a (6.6) v příkladu 6.14 jsou speciálními případy věty 6.15 pro $n = 2$ a $m = 3$.

V případě $m = n = 1$ je věta 6.15 známou větou o derivování složené funkce jedné proměnné, kdy

$$[g(h(x))]' = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

při označení $y = h(x)$.

- **Poznámka 6.17:** Zdůrazněme, že větu 6.15 používáme zejména v případech, kdy neznáme konkrétní předpis pro vnější funkci g nebo vnitřní funkce h_1, \dots, h_m . Vysvětleme si to na příkladu 6.14. Kdyby v tomto příkladě byla funkce g zadaná konkrétně, např. $g(a, b, c) = a + bc$, pak

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2, xy, x + y) = x^2 + y^2 + xy(x + y) = x^2 + y^2 + x^2y + xy^2$$

a parciální derivace funkce f umíme vypočítat přímo bez použití věty 6.15. Je totiž

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2xy + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x^2 + 2xy.$$

Všimněme si, že tyto výsledky souhlasí s výsledky vypočtenými v příkladě 6.14. Pro $g(a, b, c) = a + bc$ je totiž

$$\frac{\partial g}{\partial a}(a, b, c) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial b}(a, b, c) = c \quad \text{a} \quad \frac{\partial g}{\partial c}(a, b, c) = b.$$

Dosazením za tyto derivace do vztahů (6.5) a (6.6), kde klademe $a = x^2 + y^2$, $b = xy$ a $c = x + y$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + cy + b = 2x + (x + y)y + xy = 2x + 2xy + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y + cx + b = 2y + (x + y)x + xy = 2y + 2xy + x^2. \end{aligned}$$

- **Příklad 6.18:** Vypočtěme derivaci funkce $f(x) = g(\sin x, \cos x)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Řešení: Pro řešení je nutné si uvědomit, že g je funkce dvou proměnných. Označme tyto proměnné funkce g např. symboly a, b , tj. $a = \sin x$ a $b = \cos x$. Potom podle věty 6.15 je

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial g}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a} \cos x + \frac{\partial g}{\partial b} (-\sin x).$$

Zde jsme psali poněkud nepřesně $\frac{\partial a}{\partial x}$ a $\frac{\partial b}{\partial x}$ místo $\frac{da}{dx}$ a $\frac{db}{dx}$, aby označení souhlasilo se značením věty 6.15. Funkce $a = \sin x$ a $b = \cos x$ jsou totiž funkce jedné proměnné a označení derivace pomocí symbolu ∂ používáme pouze pro parciální derivace funkcí více proměnných. V dalším budeme již derivaci funkce jedné proměnné označovat tak jako ve skriptech [MI].

Poznamenejme ještě, že při označeních zavedených v příkladu 6.18 je zápis $\frac{\partial g}{\partial x}$ nesmyslný, protože funkce g není funkcí proměnné x .

• **Příklad 6.19:** Uvažujme 1 mol ideálního plynu, který se řídí stavovou rovnicí $pV = RT$, kde R je konstanta. Teplo Q jednoho molu ideálního plynu je funkcí teploty a objemu, tj. $Q = f(T, V)$. Vypočítejme

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p \quad \text{a} \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_T .$$

Řešení: Ze stavové rovnice plyne, že $V = \frac{RT}{p}$, a tedy $Q = f\left(T, \frac{RT}{p}\right)$. Potom

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p &= \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_V \cdot 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_T \cdot \frac{R}{p} \quad \text{a} \\ \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_T &= \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_V \cdot 0 + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_T \cdot \left(-\frac{RT}{p^2}\right) = -\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_T \cdot \frac{RT}{p^2} . \end{aligned}$$

Ve fyzikálně-chemických disciplínách se často užívá nedůsledná symbolika. V situacích jako v předchozím příkladě se obvykle píše

$$Q = Q(T, V) = Q\left(T, \frac{RT}{p}\right) = Q(T, p) .$$

Symbol Q zde pak vystupuje ve třech různých významech: a) jako označení závisle proměnné, b) jako označení funkce proměnných T, V (kterou jsme my označili symbolem f), c) jako označení složené funkce proměnných T, p . Při tomto označení dostaneme např.

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T \cdot \frac{R}{p} .$$

Je zřejmé že při použití této symboliky je nutné uvádět indexy označující proměnné, které považujeme za konstantní, protože tím zároveň ukazujeme, kterou funkci Q (tj. kterých proměnných) uvažujeme.

Vysvětleme nyní jak počítáme vyšší parciální derivace složených funkcí. Princip je stejný jako při počítání prvních derivací. Je třeba si ale uvědomit, že ve vztazích (6.7) a

(6.8) je $\frac{\partial g}{\partial y_j}$ funkcí $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, kde $y_i = h_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$. Tedy parciální derivace $\frac{\partial g}{\partial y_j}$ musíme opět derivovat jako složenou funkci. Ukažme si to na příkladech.

• **Příklad 6.20:** Pro funkci $f(x, y) = g(x^2 + y^2, xy, x + y)$ z příkladu 6.14 vypočtěme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, za předpokladu $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$.

Řešení: V příkladu 6.14 jsme odvodili vztah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a} 2x + \frac{\partial g}{\partial b} y + \frac{\partial g}{\partial c},$$

kde $a = x^2 + y^2$, $b = xy$ a $c = x + y$. Je třeba si uvědomit, že $\frac{\partial g}{\partial a}$ je vlastně zkratka za zápis

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial g}{\partial a}(a, b, c) = \frac{\partial g}{\partial a}(x^2 + y^2, xy, x + y),$$

tj. $\frac{\partial g}{\partial a}$ je funkcí proměnných a, b, c , za které dosazujeme podle vztahu (6.3). Budeme-li tedy derivovat $\frac{\partial g}{\partial a}$, je třeba postupovat jako při derivaci složené funkce. Totéž platí o derivacích $\frac{\partial g}{\partial b}$ a $\frac{\partial g}{\partial c}$. Navíc budeme-li derivovat součin $\frac{\partial g}{\partial a} 2x$ podle x , je třeba jej derivovat jako součin. Abychom si toto ještě více ozřejmili, zavedme následující označení

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial a}(x^2 + y^2, xy, x + y) &= g_1(x^2 + y^2, xy, x + y), \\ \frac{\partial g}{\partial b}(x^2 + y^2, xy, x + y) &= g_2(x^2 + y^2, xy, x + y), \\ \frac{\partial g}{\partial c}(x^2 + y^2, xy, x + y) &= g_3(x^2 + y^2, xy, x + y). \end{aligned}$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g_1(x^2 + y^2, xy, x + y) 2x + g_2(x^2 + y^2, xy, x + y) y + g_3(x^2 + y^2, xy, x + y).$$

Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \right) 2x + g_1(x^2 + y^2, xy, x + y) 2 + \\ &+ \left(\frac{\partial g_2}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \right) y + \left(\frac{\partial g_3}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial g_3}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial g_3}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial a} 2x + \frac{\partial g_1}{\partial b} y + \frac{\partial g_1}{\partial c} \right) 2x + g_1(x^2 + y^2, xy, x + y) 2 + \\ &+ \left(\frac{\partial g_2}{\partial a} 2x + \frac{\partial g_2}{\partial b} y + \frac{\partial g_2}{\partial c} \right) y + \frac{\partial g_3}{\partial a} 2x + \frac{\partial g_3}{\partial b} y + \frac{\partial g_3}{\partial c}. \end{aligned}$$

Protože ale

$$\frac{\partial g_1}{\partial a} = \frac{\partial^2 g}{\partial a^2} \quad , \quad \frac{\partial g_1}{\partial b} = \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} \quad , \quad \frac{\partial g_1}{\partial c} = \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial c} \quad \text{atd.},$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial a^2} 2x + \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} y + \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial c} \right) 2x + \frac{\partial g}{\partial a} 2 + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial b \partial a} 2x + \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} y + \frac{\partial^2 g}{\partial b \partial c} \right) y + \frac{\partial^2 g}{\partial c \partial a} 2x + \frac{\partial^2 g}{\partial c \partial b} y + \frac{\partial^2 g}{\partial c^2} = \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial a^2} 4x^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} 4xy + \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial c} 4x + \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} y^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial b \partial c} 2y + \frac{\partial^2 g}{\partial c^2} + \frac{\partial g}{\partial a} 2, \end{aligned}$$

kdy jsme využili vztahů $\frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 g}{\partial b \partial a}$, apod.

• **Příklad 6.21:** Vypočtěme $f''(x)$ pro funkci $f(x) = g(\sin x, \cos x)$ z příkladu 6.18, kde $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Řešení: V příkladu 6.18 jsme vypočetli, že

$$f'(x) = \frac{\partial g}{\partial a}(a, b) \cos x - \frac{\partial g}{\partial b}(a, b) \sin x,$$

kde $a = \sin x$ a $b = \cos x$. Tedy

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial a^2} \frac{da}{dx} + \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} \frac{db}{dx} \right) \cos x + \frac{\partial g}{\partial a} (-\sin x) \\ &- \left(\frac{\partial^2 g}{\partial b \partial a} \frac{da}{dx} + \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} \frac{db}{dx} \right) \sin x - \frac{\partial g}{\partial b} \cos x = \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial a^2} \cos^2 x + \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} (-\sin x) \cos x + \frac{\partial g}{\partial a} (-\sin x) \\ &- \frac{\partial^2 g}{\partial b \partial a} \cos x \sin x + \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} \sin^2 x - \frac{\partial g}{\partial b} \cos x = \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial a^2} \cos^2 x - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} \sin x \cos x + \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} \sin^2 x - \frac{\partial g}{\partial a} \sin x - \frac{\partial g}{\partial b} \cos x. \end{aligned}$$

Cvičení 6.22: Vypočtěte

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ pro funkci $f(x, y) = g\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$, kde $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$,
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pro funkci $f(x, y) = \frac{y^3}{3x} + g(xy)$, kde $g \in C^2(\mathbb{R})$,
- $f''(x)$ pro funkci $f(x) = x g(x^2, x^3)$, kde $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Věta 6.15 o derivování složené funkce nám umožňuje podat slíbený důkaz věty 6.10 o počítání derivace ve směru pomocí gradientu.

Důkaz věty 6.10:

Označme symbolem g funkci jedné proměnné definovanou na nějakém okolí nuly předpisem

$$g(h) = f(X_0 + h \vec{a}) .$$

Pak

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + h\vec{a}) - f(X_0)}{h} = Df(X_0, \vec{a}) ,$$

podle definice 6.7. Podle věty 6.15 je ale

$$g'(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + h \vec{a}) a_i ,$$

a tedy

$$Df(X_0, \vec{a}) = g'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) a_i = \text{grad } f(X_0) \cdot \vec{a} .$$

■

6.3.1 Derivace zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k

V odstavci 5.3 jsme zavedli pojem zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k . Nyní si ukážeme, co je derivace takového zobrazení.

Definice 6.23: Necht' $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ je zobrazení množiny $G \subset \mathbb{R}^n$ do \mathbb{R}^k , kde f_1, \dots, f_k jsou funkce n proměnných x_1, \dots, x_n , které mají na G všechny parciální derivace prvního řádu. Pak matici (typu (k, n))

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

nazýváme **derivací zobrazení** (nebo též **Jacobiho maticí zobrazení**) \mathbf{f} v bodě $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G$.

Většinou budeme pro označení Jacobiho matice používat symbol $J_{\mathbf{f}}$, případně pouze J bude-li jasné, o jaké zobrazení \mathbf{f} se jedná. Symbol \mathbf{f}' zavádíme zejména proto, abychom zdůraznili podobnost s derivací funkce jedné proměnné, viz věta 6.27

• **Poznámka 6.24:** V případě $k = 1$, tedy zobrazení do \mathbb{R} , má Jacobiho matice $J_{\mathbf{f}}$ zobrazení \mathbf{f} pouze jeden řádek a fakticky je totožná s gradientem funkce \mathbf{f} .

• **Příklad 6.25:** Uvažujme $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_1x_2 + x_3)$ zobrazení \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^2 , kdy

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Pak zřejmě Jacobiho matice zobrazení \mathbf{f} je dána vztahem

$$\mathbf{f}'(x_1, x_2, x_3) = J_{\mathbf{f}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ x_2 & x_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

• **Příklad 6.26:** Necht $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$ je lineární zobrazení \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k reprezentované maticí $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (k, n) . Pak zřejmě

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n,$$

a tedy $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = a_{ij}$ pro $i = 1, \dots, k$ a $j = 1, \dots, n$. Tedy Jacobiho matice lineárního zobrazení \mathbf{f} je právě matice \mathbf{A} , která reprezentuje toto lineární zobrazení.

Vraťme se ještě k derivování složených funkcí. Pro derivování složené funkce $f(x) = g(h(x))$ jedné reálné proměnné známe ze skript [MI] formulu

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Pro derivování složených funkcí více proměnných platí tatáž formulka, jak uvidíme v následující větě, pouze jednotlivé derivace již nejsou čísla, ale příslušné Jacobiho matice, a naznačené násobení je pak samozřejmě násobení matic.

Věta 6.27:

Necht $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ je zobrazení otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^n$ do \mathbb{R}^m a $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_k)$ je zobrazení otevřené množiny $H \subset \mathbb{R}^m$ do \mathbb{R}^k , kde $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in H$ pro každé $\mathbf{x} \in G$. Necht dále funkce h_i a g_j mají spojité parciální derivace. Pak pro derivaci složené funkce $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ platí

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{h}'(\mathbf{x}).$$

• **Poznámka 6.28:** Zřejmě v předchozí větě je $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ matice typu (m, n) , $\mathbf{g}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ matice typu (k, m) , a tedy jejich součin ve výše uvedeném pořadí je matice typu (k, n) .

• **Poznámka 6.29:** Uvědomme si, že dříve uvedená věta 6.15 je speciálním případem věty 6.27 pro $k = 1$. Opravdu, v tomto případě, označíme-li proměnné funkce g symboly y_1, \dots, y_m (píšeme g místo \mathbf{g} , protože se jedná o zobrazení do \mathbb{R}), máme

$$g'(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \right)$$

a

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial h_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Tedy podle věty 6.27 je

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) = \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a odtud zřejmě

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \frac{\partial h_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}),$$

jak tvrdí věta 6.15.

6.4 Totální diferenciál, tečná rovina

6.4.1 Totální diferenciál

Pomocí diferenciálu funkce více proměnných budeme stejně jako u funkce jedné proměnné aproximovat změnu hodnoty závisle proměnné při malých změnách nezávisle proměnných. Pro funkce více proměnných je zvykem používat místo termínu diferenciál termín totální diferenciál z důvodů, které si objasníme v dalším textu.

Uvažujeme nejprve funkci $z = f(x, y)$ dvou proměnných, definovanou na nějakém okolí bodu (x_0, y_0) . Zkusme přibližně vypočítat přírůstek funkce (změnu funkční hodnoty) $\Delta f(x_0, y_0)$, změní-li se x z hodnoty x_0 na $x_0 + h$ a y z hodnoty y_0 na $y_0 + k$, kde h a k jsou nějaká v absolutní hodnotě malá reálná čísla. Tedy

$$\Delta f(x_0, y_0; h, k) = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0). \quad (6.9)$$

Zapišme přírůstek $\Delta f(x_0, y_0)$ ve tvaru

$$\Delta f(x_0, y_0) = (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)) + (f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)). \quad (6.10)$$

Protože ve druhém sčítanci výrazu (6.10) se mění pouze proměnná x , můžeme tento sčítanec přibližně aproximovat pomocí diferenciálu funkce jedné proměnné výrazem $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h$, tj.

$$(f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)) \doteq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h .$$

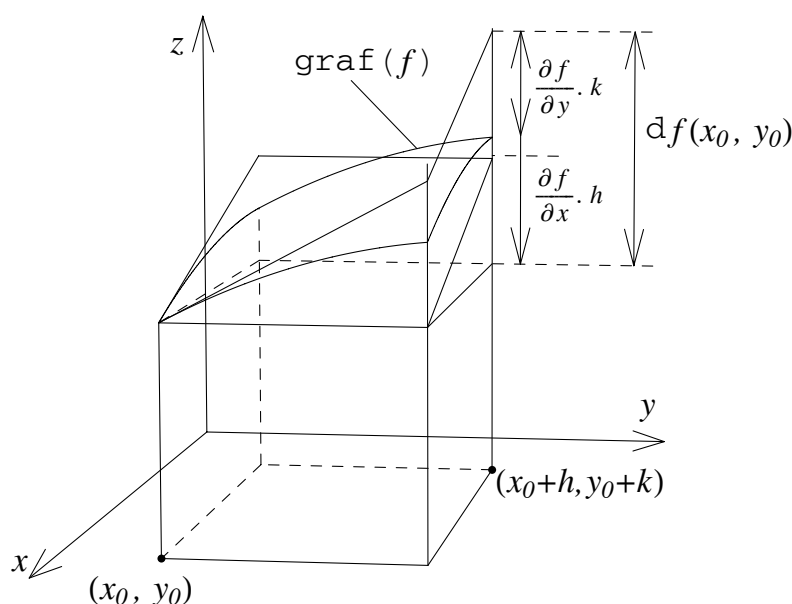
Podobně první sčítanec výrazu (6.10) lze zapsat přibližně ve tvaru

$$(f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)) \doteq \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) k .$$

Navíc, má-li funkce f spojité parciální derivace, lze hodnotu $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0)$ přibližně nahradit hodnotou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Celkem tedy dostáváme

$$(f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)) \doteq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) k . \quad (6.11)$$

Celá situace je znázorněna na obr. 6.4. Označíme-li, jak je často zvykem změnu proměnné



Obrázek 6.4:

x symbolem dx a změnu proměnné y symbolem dy , má potom vztah (6.11) tvar

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) \doteq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy , \quad (6.12)$$

který je možno též upravit na tvar

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) \doteq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy . \quad (6.13)$$

Definice 6.30: Necht funkce $f(x, y)$ má spojité parciální derivace v bodě (x_0, y_0) . Potom výraz

$$df(x_0, y_0; dx, dy) = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy$$

nazýváme **totálním diferenciálem** funkce f v bodě (x_0, y_0) .

• **Poznámka 6.31:** Všimněme si, že totální diferenciál $df(x_0, y_0; dx, dy)$ je vlastně funkcí 4 proměnných. Závisí jednak na hodnotách x_0 a y_0 a jednak na velikosti dx a dy . Přitom závislost na dx a dy je lineární, tj. totální diferenciál je lineární funkcí v proměnných dx a dy . Totální diferenciál obvykle označujeme zkráceně $df(x_0, y_0)$ a proměnné dx a dy zvlášť nevypisujeme.

• **Příklad 6.32:** Vypočtěme totální diferenciál funkce $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ v bodě $(1, 2)$.

Řešení: Protože

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

je

$$df(1, 2) = \frac{6}{\sqrt{5}} dx + \frac{2}{\sqrt{5}} dy$$

• **Poznámka 6.33:** Výrazy $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy$ vystupující v definici 6.30 nazýváme **parciálními diferenciály**. Totální diferenciál je tedy součtem parciálních diferenciálů.

Výraz $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy$ můžeme formálně vytvořit vždy, pokud existují v něm vystupující parciální derivace. Obecně jej ale nazýváme totálním diferenciálem pouze v případě, že **dobře aproximuje** přírůstek funkce

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0),$$

tj. když chyba aproximace

$$\Delta f(x_0, y_0) \doteq df(x_0, y_0)$$

je “podstatně menší” než hodnota $|dx| + |dy|$. Toto je v definici 6.30 zaručeno podmínkou spojitosti parciálních derivací funkce f .

Podobně jako pro funkci jedné proměnné je aproximace $\Delta f(x_0, y_0) \doteq df(x_0, y_0)$ obecně tím přesnější, čím je menší dx a dy .

Totální diferenciál $df(x, y)$ v obecném bodě (x, y) značíme obvykle pouze symbolem df a je tedy

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy .$$

Vztah (6.12) můžeme pak zkráceně zapsat ve tvaru

$$\Delta f \doteq df .$$

• **Příklad 6.34:** Vypočtěme totální diferenciál funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pomocí něj pak vypočtěme přibližně hodnotu výrazu $\sqrt{(0.03)^2 + (2.89)^2}$.

Řešení: Protože

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ,$$

je

$$df(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy .$$

Zvolme $x_0 = 0$, $y_0 = 3$, $dx = 0.03$ a $dy = -0.11$. (Volbu provádíme tak, aby hodnoty $f(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ byly snadno vyčíslitelné a aby veličiny dx a dy byly malé.) Protože $f(x_0, y_0) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$, dostáváme podle vztahu (6.13) pro počítanou hodnotu, kterou lze při našem označení zapsat ve tvaru $f(x_0 + dx, y_0 + dy)$, vyjádření

$$\sqrt{(0.03)^2 + (2.89)^2} \doteq 3 + 0 \cdot 0.03 + 1 \cdot (-0.11) = 2.89 .$$

(Přesná hodnota počítaného výrazu na 6 desetinných míst je 2.890156.)

• **Příklad 6.35:** Ukážeme, že známá poučka “relativní chyba součinu dvou veličin je rovna součtu relativních chyb těchto veličin” je založena na aproximaci totálním diferenciálem. Uvažujme funkci $f(x, y) = xy$ a předpokládejme, že hodnota veličiny x je dána s absolutní chybou dx a hodnota veličiny y s absolutní chybou dy . Potom relativní chyba x je $\frac{dx}{x}$ a relativní chyba y je $\frac{dy}{y}$. Absolutní chyba součinu xy je pak

$$\Delta f(x, y) = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = (x + dx) \cdot (y + dy) - xy = y dx + x dy + dx dy .$$

Tuto hodnotu můžeme aproximovat totálním diferenciálem funkce f , který je, jak lze snadno počítat,

$$df(x, y) = y dx + x dy .$$

Všimněme si, že při aproximaci $\Delta f \doteq df$ zanedbáváme člen $dx dy$, který je zanedbatelný pro malé hodnoty dx a dy . Konečně relativní chyba součinu je

$$\frac{\Delta f(x, y)}{f(x, y)} \doteq \frac{df(x, y)}{f(x, y)} = \frac{y dx + x dy}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} ,$$

což jsme chtěli ukázat.

Cvičení 6.36: Vypočtete přibližně (pomocí totálního diferenciálu) závislost změny tlaku 1 molu plynu na změnách teploty a objemu pro plyn, který se řídí stavovou rovnicí

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = RT ,$$

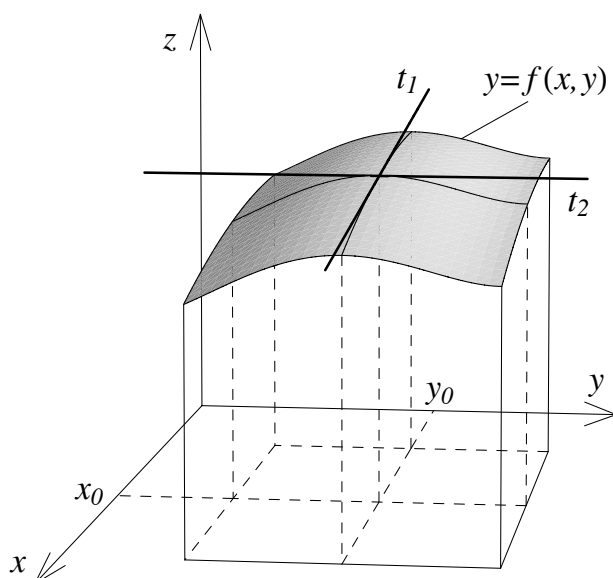
kde a, b, R jsou konstanty.

6.4.2 Tečná rovina ke grafu funkce dvou proměnných

Podobně jako diferenciál funkce jedné proměnné úzce souvisel s pojmem tečny, je totální diferenciál funkce dvou proměnných v úzké souvislosti s tečnou rovinou k jejímu grafu. Připomeňme, že pro funkci $y = f(x)$ je rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ dána vztahem

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) .$$

Směrnice této tečny je $f'(x_0)$ a tedy její směrový vektor je např. vektor $(1, f'(x_0))$ a normálový vektor např. vektor $(f'(x_0), -1)$.



Obrázek 6.5:

Uvažujme nyní funkci $z = f(x, y)$, která má spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě (x_0, y_0) . Vedeme-li bodem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tečnu t_1 ke křivce, kterou dostaneme jako průnik grafu funkce f a roviny $y = y_0$, je směrový vektor této tečny

$$\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) .$$

Podobně vektor

$$\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

je směrovým vektorem tečny t_2 vedené bodem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ke křivce, kterou dostaneme jako průnik grafu funkce f a roviny $x = x_0$, viz obr. 6.5.

Zřejmě je přirozené definovat tečnou rovinu ke grafu funkce f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ jako rovinu, ve které leží tečny t_1 a t_2 . Normálový vektor této roviny je vektorovým součinem směrových vektorů tečen t_1 a t_2 a je to tedy vektor

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) .$$

Rovnice roviny s normálovým vektorem \vec{n} , která prochází bodem $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je pak

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) . \quad (6.14)$$

Definice 6.37: Má-li funkce $z = f(x, y)$ spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě (x_0, y_0) , nazýváme rovinu popsanou rovnicí (6.14) **tečnou rovinou** ke grafu funkce f **v bodě** $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

• **Příklad 6.38:** Napišme rovnici tečné roviny ke kulové ploše $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ v bodě M této plochy, kde $M = (1, 2, z_0)$, $z_0 < 0$.

Řešení: Nejprve spočtěme souřadnici z_0 bodu M kulové plochy. Dosazením $x_0 = 1$ a $y_0 = 2$ do rovnice kulové plochy dostaneme $z_0^2 = 4$, a tedy $z_0 = -2$, protože $z_0 < 0$. Z rovnice kulové plochy dostáváme

$$z = \pm \sqrt{9 - x^2 - y^2} .$$

Protože souřadnice z_0 bodu M je záporná, bude tečná rovina ke kulové ploše procházející bodem M tečnou rovinou ke grafu funkce

$$f(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

v bodě M . Protože dále

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1 ,$$

je podle definice 6.37 rovnice hledané tečné roviny

$$z = -2 + \frac{1}{2}(x - 1) + (y - 2)$$

nebo po úpravě $x + 2y - 2z = 9$.

• **Poznámka 6.39:** Všimněme si ještě souvislosti tečné roviny s totálním diferenciálem. Klademe-li v definici 6.37 $x - x_0 = dx$ a $y - y_0 = dy$, pak

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy = df(x_0, y_0) .$$

Aproximujeme-li tedy změnu funkční hodnoty $f(x_0, y_0)$ funkce f diferenciálem, odpovídá tato aproximace tomu, že hodnoty funkce $f(x, y)$ aproximujeme hodnotami funkce $z(x, y)$ ze vztahu (6.14), jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě (x_0, y_0) . Zřejmě obecně je tato aproximace tím lepší, čím je x blíže x_0 a y blíže y_0 , tj. čím je menší dx a dy .

Na závěr tohoto odstavce zavedme ještě totální diferenciál funkce n proměnných.

Definice 6.40: Necht' funkce $z = f(x_1, \dots, x_n)$ má spojité parciální derivace na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$. Potom **totálním diferenciálem** funkce f rozumíme výraz

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

a totálním diferenciálem funkce f v bodě $\mathbf{x}_0 \in G$ výraz

$$df(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) dx_n .$$

Obdobně jako pro funkci dvou proměnných platí, že totální diferenciál aproximuje přírůstek funkce, tj.

$$\Delta f = f(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n) - f(x_1, \dots, x_n) \doteq \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = df .$$

Přitom o této aproximaci platí totéž, co bylo řečeno o aproximaci totálním diferenciálem funkce dvou proměnných.

• **Příklad 6.41:** Pro Jouleovo teplo Q vzniklé ve vodiči platí vzorec $Q = RI^2t$, kde I je proud, R je odpor a t je čas. Určeme maximální procentuální chybu Q , jestliže veličiny R a I byly stanoveny s maximální chybou 0.2% a veličina t s maximální chybou 0.1%.

Řešení: Pro možnou chybu dR veličiny R platí podle zadání $|dR| \leq 0.002R$, podobně $|dQ| \leq 0.002Q$ a $|dt| \leq 0.001t$. Absolutní chybu veličiny Q (Q je funkcí 3 proměnných R , I a t) aproximujeme totálním diferenciálem.

$$\Delta Q \doteq dQ = \frac{\partial Q}{\partial R} dR + \frac{\partial Q}{\partial I} dI + \frac{\partial Q}{\partial t} dt = I^2t dR + 2RI t dI + RI^2 dt .$$

Odhadneme největší možnou hodnotu $|dQ|$.

$$\begin{aligned} |dQ| &= |I^2t dR + 2RI t dI + RI^2 dt| \leq I^2t |dR| + 2RI t |dI| + RI^2 |dt| \\ &\leq 0.002RI^2t + 0.004RI^2t + 0.001RI^2t = 0.007RI^2t = 0.007Q . \end{aligned}$$

Maximální chyba veličiny Q je tedy asi 0.7%.

(Tento závěr souhlasí s výsledkem příkladu 6.35. Relativní chyba Q je rovna součtu relativních chyb R , I^2 a t , tedy $0.2\% + 2 \cdot 0.2\% + 0.1\% = 0.7\%$. Zde relativní chybu I je třeba počítat dvakrát, protože ve vztahu pro Q vystupuje I^2 .)

6.5 Taylorův polynom

V tomto odstavci se omezíme pouze na funkce dvou proměnných. (Pro funkce více proměnných lze postupovat analogicky.) Základní myšlenka je stejná jako pro funkci jedné

proměnné. Funkci $f(x, y)$, která je definována na nějakém okolí bodu (x_0, y_0) a má zde spojité parciální derivace až do řádu n , budeme aproximovat polynomem dvou proměnných x a y . Tento polynom, který bude mít v bodě (x_0, y_0) stejnou funkční hodnotu i stejné hodnoty všech parciálních derivací až do řádu n jako funkce f , budeme nazývat **Taylorovým polynomem** funkce f stupně n v bodě (x_0, y_0) a značit $T_n(x, y)$.

Řekněme si nejdříve co je polynom dvou proměnných. Je to každá funkce $P(x, y)$, kterou lze zapsat ve tvaru

$$P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij}x^i y^j,$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, pro $i, j = 0, 1, \dots$. Tedy takový polynom je součtem **konečného počtu** sčítanců tvaru $a_{ij}x^i y^j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Stupněm polynomu rozumíme největší z čísel $(i + j)$, pro které je příslušné $a_{ij} \neq 0$. Např. $x + y^2 - xy^2$ je polynom stupně 3, polynom $2yx^3 - y^5 + 1$ je polynom stupně 5.

Ukažme si nyní konkrétní tvar Taylorových polynomů stupňů 1, 2 a 3 pro funkci $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) . Vzorce pro Taylorovy polynomy vyšších stupňů jsou obdobné.

$$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0)(x - x_0)^3 + \right. \\ &+ 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)^2(y - y_0) + \\ &+ \left. 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0)(y - y_0)^3 \right) \end{aligned}$$

• **Poznámka 6.42:** Snadno lze ukázat, že takto zavedený Taylorův polynom $T_n(x, y)$ stupně $n = 1, 2, \dots$ funkce f v bodě (x_0, y_0) má v tomto bodě stejnou funkční hodnotu jako funkce f i stejné hodnoty všech parciálních derivací až do řádu n . Lze tedy očekávat, že pro hodnoty (x, y) blízké (x_0, y_0) aproximují hodnoty Taylorova polynomu $T_n(x, y)$ hodnoty funkce $f(x, y)$, tj.

$$f(x, y) \doteq T_n(x, y) . \quad (6.15)$$

Obecně lze říci, že aproximace 6.15 je tím lepší, čím vyšší je stupeň Taylorova polynomu a čím je (x, y) blíže (x_0, y_0) .

Cvičení 6.43: Ukažte, že pro Taylorův polynom $T_3(x, y)$ funkce f v bodě (x_0, y_0) platí

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) .$$

• **Poznámka 6.44:** Všimněme si, že aproximace $f(x, y) \doteq T_1(x, y)$, tj.

$$f(x, y) \doteq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (6.16)$$

je vlastně aproximací pomocí totálního diferenciálu, neboť po převedení členu $f(x_0, y_0)$ na druhou stranu rovnosti 6.16 dostáváme

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \doteq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = df(x_0, y_0) .$$

Ekvivalentně, jak plyne okamžitě z definice 6.37 tečné roviny, je možno na aproximaci (6.16) i pohlížet jako na aproximaci hodnot funkce $f(x, y)$ hodnotami proměnné z danými vztahem (6.14), tj. aproximujeme graf funkce $z = f(x, y)$ v okolí bodu $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ částí tečné roviny.

• **Příklad 6.45:** Vypočtěme přibližnou hodnotu $= \sqrt{(0.03)^2 + (2.89)^2}$ tak, že funkci $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ aproximujete na okolí bodu $(x_0, y_0) = (0, 3)$ Taylorovým polynomem 2. stupně.

Řešení: Pro zadanou funkci f je

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad . \end{aligned}$$

Odtud dosazením

$$\begin{aligned} f(0, 3) &= 3 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 3) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 3) = 1 \quad , \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 3) &= \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 3) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 3) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2(x, y) = 3 + (y - 3) + \frac{1}{6}x^2 .$$

Odtud

$$\sqrt{(0.03)^2 + (2.89)^2} = f(0.03, 2.89) \doteq T_2(0.03, 2.89) = 2.89015 .$$

Porovnáme-li tento výsledek s výsledkem příkladu 6.34, kde jsme hledanou hodnotu aproximovali pomocí totálního diferenciálu, vidíme, že aproximace pomocí Taylorova polynomu vyššího stupně je přesnější.

• **Příklad 6.46:** Ukažme, že pro malé hodnoty $|x|$ a $|y|$ platí vztah

$$e^x \sin y \doteq y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 . \quad (6.17)$$

Řešení: Protože na pravé straně vztahu (6.17) je polynom 3. stupně, ukážeme, že tento polynom je Taylorovým polynomem 3. stupně funkce $f(x, y) = e^x \sin y$ v bodě $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Tím ověříme vztah (6.17) pro malé hodnoty $|x|$ a $|y|$, tj. pro (x, y) blízké $(0, 0)$. Postupným derivováním dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^x \sin y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = e^x \cos y \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin y \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -e^x \cos y \quad .$$

Odtud

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) = 1 \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) = -1 .$$

Tedy pro danou funkci f je

$$T_3(x, y) = y + xy + \frac{1}{6}(3x^2y - y^3) = y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 .$$

Tím je vztah (6.17) ověřen.

Cvičení 6.47: Řešte znovu cvičení 6.36, ale místo aproximace totálním diferenciálem využijte aproximaci pomocí Taylorova polynomu 2. stupně.

6.6 Newtonova metoda řešení soustav nelineárních rovnic

V tomto odstavci se naučíme přibližně řešit soustavy nelineárních rovnic Newtonovou metodou, která zobecňuje Newtonovu metodu pro řešení jedné rovnice o jedné neznámé,

s kterou jsme se seznámili ve skriptech [MI]. Při vysvětlení metody se omezíme na případ dvou rovnic o dvou neznámých. V případě n rovnic o n neznámých je metoda naprosto analogická.

Mějme soustavu **dvou rovnic o dvou neznámých** x, y ve tvaru

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

kde f_1, f_2 jsou funkce dvou proměnných definované na nějaké otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$. Budeme předpokládat, že funkce f_1 a f_2 jsou na G spojité a mají zde spojité parciální derivace 1. řádu. Vektorově můžeme soustavu (6.18) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, tj. f_1 a f_2 jsou souřadnicové funkce zobrazení \mathbf{f} , a $\mathbf{x} = (x, y)$.

Geometricky si můžeme soustavu (6.18) představit následovně:

Rovnice $f_1(x, y) = 0$ je obecně rovnicí nějaké křivky v \mathbb{R}^2 (nulové vrstevnice funkce $z = f_1(x, y)$), podobně rovnice $f_2(x, y) = 0$ je rovnicí nějaké jiné křivky v \mathbb{R}^2 . (Podrobněji se tím budeme zabývat v kapitole 8.) Řešením soustavy (6.18) je pak každý průsečík těchto dvou křivek.

Definice 6.48: Řešením soustavy (6.18) rozumíme každou dvojici čísel (α, β) takovou, že

$$f_1(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{a} \quad f_2(\alpha, \beta) = 0.$$

Odvodíme nyní vzorec pro výpočet postupných aproximací (x_k, y_k) nějakého řešení (α, β) soustavy (6.18), pro $k = 1, 2, \dots$, které pro vhodnou volbu počáteční aproximace (x_0, y_0) budou konvergovat k řešení (α, β) .

Připomeňme si ještě Newtonovu metodu pro jednu rovnici o jedné neznámé. Bylo-li x_k k -tou aproximací kořene α rovnice $f(x) = 0$, získali jsme x_{k+1} tak, že bodem $(x_k, f(x_k))$ jsme vedli tečnu ke grafu funkce f a průsečík této tečny s osou x jsme volili za x_{k+1} ; číselně

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (6.19)$$

Nechť soustava (6.18) má nějaké řešení (α, β) a nechť (x_k, y_k) je aproximací tohoto řešení. Bodem $(x_k, y_k, f_1(x_k, y_k))$ vedme tečnou rovinu τ_1 ke grafu funkce f_1 , bodem $(x_k, y_k, f_2(x_k, y_k))$ tečnou rovinu τ_2 ke grafu funkce f_2 . Průsečíky těchto tečných rovin s rovinou $z = 0$ budou obecně dvě přímky a průsečík těchto dvou přímek volíme pak za (x_{k+1}, y_{k+1}) . Vyjádřeme nyní (x_{k+1}, y_{k+1}) číselně. Tečná rovina τ_1 má rovnici

$$z - f_1(x_k, y_k) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k)(x - x_k) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k)(y - y_k),$$

tečná rovina τ_2 pak rovnici

$$z - f_2(x_k, y_k) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k)(x - x_k) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k)(y - y_k).$$

Dosazením $z = 0$ do rovnic tečných rovin τ_1, τ_2 získáme soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k)(x - x_k) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k)(y - y_k) &= -f_1(x_k, y_k), \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k)(x - x_k) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k)(y - y_k) &= -f_2(x_k, y_k), \end{aligned} \quad (6.20)$$

kteřou můžeme maticově zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_k \\ y - y_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Tato soustava má jediné řešení $(x, y) = (x_{k+1}, y_{k+1})$ právě tehdy, je-li Jacobiho matice

$$J = J(x_k, y_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k) \end{bmatrix}$$

zobrazení \mathbf{f} v bodě (x_k, y_k) **regulární**. To budeme také v dalším předpokládat. Vynásobíme-li totiž rovnost (6.21) inverzní maticí J^{-1} zleva, získáme po úpravě pro jediné řešení (x_k, y_k) soustavy (6.21) vztah

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_k, y_k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_k, y_k) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Vektorově můžeme tento vztah jednoduše zapsat ve tvaru

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J^{-1}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad (6.23)$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$, $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k)^T$ a $\mathbf{x}_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1})^T$. (Na \mathbf{f} , \mathbf{x}_k a \mathbf{x}_{k+1} je nutno pohlížet jako na sloupcové vektory, aby operace ve vztahu (6.23) měly smysl.) Všimněme si podobnosti vzorce (6.23) se vzorcem (6.19) pro výpočet iterací Newtonovou metodou pro jednu rovnici o jedné neznámé. Metodu, kdy postupně aproximace řešení soustavy (6.18) počítáme podle vztahu (6.22), nazýváme **Newtonovou metodou**.

Věta 6.49:

Má-li soustava (6.18) řešení (α, β) a je-li Jacobiho matice $J(\alpha, \beta)$ zobrazení \mathbf{f} regulární, pak iterace (x_k, y_k) počítané Newtonovou metodou podle vztahu (6.22) konvergují k řešení (α, β) , za předpokladu, že počáteční aproximace (x_0, y_0) je zvolena dosti blízko řešení (α, β) , tj. existuje okolí O bodu (α, β) , že iterace (x_k, y_k) konvergují k řešení (α, β) pro každou volbu počáteční aproximace $(x_0, y_0) \in O$.

• **Poznámka 6.50:** Určení počtu řešení a zvolení počáteční aproximace je u soustav více rovnic o více neznámých obecně značně obtížné a nebudeme se jím podrobně zabývat. Obvykle volíme nějaké přibližné řešení (x_0, y_0) dané soustavy a počítáme několik iterací Newtonovou metodou. Pokud se hodnoty $|f_1(x_k, y_k)|$ a $|f_2(x_k, y_k)|$ zmenšují, dá se očekávat, že body (x_k, y_k) konvergují k nějakému řešení (α, β) dané soustavy. Pokud se hodnoty $|f_1(x_k, y_k)|$ a $|f_2(x_k, y_k)|$ nezmenšují, volíme obvykle jinou počáteční aproximaci (x_0, y_0) .

• **Poznámka 6.51:** Za chybu aproximace (x_k, y_k) řešení (α, β) soustavy (6.18) lze přibližně považovat číslo

$$|x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}|.$$

Chceme-li tedy určit řešení soustavy (6.18) s danou přesností $\varepsilon > 0$, postupujeme obvykle tak, že počítáme postupně iterace (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots$, dokud není splněna podmínka

$$|x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}| \leq \varepsilon.$$

Ukažme si celý postup výpočtu Newtonovou metodou na příkladu.

• **Příklad 6.52:** Soustavu

$$\begin{aligned} 2x^3 - y^2 - 1 &= 0 \\ xy^3 - y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

řešme Newtonovou metodou. Za počáteční aproximaci zvolme $x_0 = 1$ a $y_0 = 2$.

Řešení: V předchozím označení je tedy $f_1(x, y) = 2x^3 - y^2 - 1$ a $f_2(x, y) = xy^3 - y - 4$. Zadaná počáteční aproximace $(1, 2)$ není příliš dobrá, protože $f_1(1, 2) = -3$ a $f_2(1, 2) = 2$.

Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ je

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Odtud

$$J(1, 2) = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad [J(1, 2)]^{-1} = \frac{1}{98} \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Podle (6.22) dostáváme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{98} \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 1.25510 \\ 1.63265 \end{bmatrix},$$

počítáme-li s přesností na 5 desetinných míst.

Dále $f_1(x_1, y_1) = 0.28871$ a $f_2(x_1, y_1) = -0.17058$,

$$J(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} 9.45166 & -3.26530 \\ 4.35190 & 9.03658 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad [J(x_1, y_1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.09071 & 0.03278 \\ -0.04386 & 0.09488 \end{bmatrix}.$$

Odtud

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25510 \\ 1.63265 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.09071 & 0.03278 \\ -0.04368 & 0.09488 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.28871 \\ -0.17058 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 1.23450 \\ 1.66145 \end{bmatrix} .$$

Podobně postupujeme dále: $f_1(x_2, y_2) = 0.00232$ a $f_2(x_2, y_2) = -0.00033$,

$$J(x_2, y_2) = \begin{bmatrix} 9.14394 & -3.32290 \\ 4.58629 & 9.22320 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad [J(x_2, y_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.09262 & 0.03337 \\ -0.04606 & 0.09183 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.23450 \\ 1.66145 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.09262 & 0.03337 \\ -0.04606 & 0.09183 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.00232 \\ -0.00033 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 1.23427 \\ 1.66153 \end{bmatrix} .$$

Nyní již $f_1(x_3, y_3) = -0.00005$ a $f_2(x_3, y_3) = -0.00001$, a tedy můžeme říci, že řešení dané soustavy je přibližně $\alpha \doteq 1.23427$, $\beta \doteq 1.66153$.

Odhad chyby aproximace dává

$$|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2| = 0.00023 + 0.00008 = 0.00031 .$$

Lze tedy říci, že řešení (α, β) dané soustavy je s přesností na 3 desetinná místa určeno pomocí (x_3, y_3) . Pokud bychom vyžadovali vyšší přesnost, museli bychom pokračovat v iteracích a počítat na vyšší počet desetinných míst.

Pro přehlednost shrňme výsledky jednotlivých iterací do tabulky.

k	x_k	y_k	$f_1(x_k, y_k)$	$f_2(x_k, y_k)$
0	1	2	-3	2
1	1.25510	1.63265	0.28871	-0.17058
2	1.23450	1.66145	0.00232	0.00033
3	1.23427	1.66153	-0.00005	0.00001

• **Poznámka 6.53:** V praxi (zvláště u soustav více rovnic) obvykle nepočítáme inverzní matici J^{-1} , ale řešíme soustavu (6.20) vzhledem k neznámým $\Delta x_k = x - x_k$, $\Delta y_k = y - y_k$ např. Gaussovou eliminací. Hodnoty další iterace jsou pak dány vztahy

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \quad , \quad y_{k+1} = y_k + \Delta y_k .$$

Cvičení 6.54: Najděte nějaké řešení soustavy

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 2xy &= 0 , \\ x^2 + y^3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Newtonovou metodou s přesností na 3 desetinná místa.

Na závěr tohoto odstavce uveďme ještě Newtonův vzorec pro výpočet kořenů soustavy n rovnic o n neznámých. Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 , \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 , \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 . \end{aligned} \tag{6.24}$$

Označme $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$ a zvolme počáteční aproximaci \mathbf{x}_0 řešení soustavy (6.24). Potom iterace počítané podle vzorce

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J^{-1}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.25)$$

konvergují k řešení soustavy (6.24) pokud počáteční aproximaci \mathbf{x}_0 zvolíme dosti blízko tohoto řešení. (Zde J opět označuje Jacobiho matici zobrazení \mathbf{f} .) Všimněte si, že formálně je vzorec (6.25) pro soustavu n rovnic o n neznámých úplně stejný jako vzorec (6.23) pro soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

Návody ke cvičením z kap. 6

6.12 Vypočtete nejprve $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0)$. Dále určete příslušný jednotkový vektor k vektoru \vec{a} a využijte vztahu (6.2) z věty 6.10.

6.22 Označte si proměnné vnější funkce nějakými symboly a derivujte podle vztahu (6.7) z věty 6.15 analogicky, jako v příkladě 6.14.

6.36 Z dané rovnice vyjádřete nejprve tlak p jako funkci teploty a objemu. Určete totální diferenciál této funkce.

6.43 Vypočtete nejprve $\frac{\partial^2 T_3}{\partial x \partial y}$. Dosazením hodnot $x = x_0$ a $y = y_0$ ukažte, že

$$\frac{\partial^2 T_3}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

6.47 Určete Taylorův polynom druhého stupně funkce p proměnných T a V . Z něj vyjádřete přibližně změnu tlaku Δp v závislosti na změnách teploty a objemu.

6.54 Počáteční aproximaci volte např. $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Iterace Newtonovou metodou počítejte, dokud není splněno

$$|x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}| \leq 5 \cdot 10^{-4}.$$

Kapitola 7

Extrémy funkcí dvou proměnných

V této kapitole budeme vyšetřovat extrémy funkcí více proměnných. Omezíme se na případ funkcí dvou proměnných. U funkcí více než dvou proměnných je zjišťování extrémů zčásti analogické, avšak podstatně komplikovanější, a vyžadovalo by zavedení dalších pojmů.

7.1 Lokální extrémy

Lokální extrémy funkcí více proměnných definujeme analogicky jako extrémy funkcí jedné proměnné.

Definice 7.1: Nechť funkce $f(x, y)$ je definována na množině $M \subset \mathbb{R}^2$ a $(x_0, y_0) \in M$. Říkáme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) **lokální maximum** (resp. **lokální minimum**), jestliže existuje takové okolí $O(x_0, y_0)$, že pro každé $(x, y) \in O(x_0, y_0) \cap M$ je

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)) . \quad (7.1)$$

Platí-li pro každé $(x, y) \in O(x_0, y_0) \cap M$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ místo podmínky (7.1) dokonce

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (\text{resp. } f(x, y) > f(x_0, y_0)) ,$$

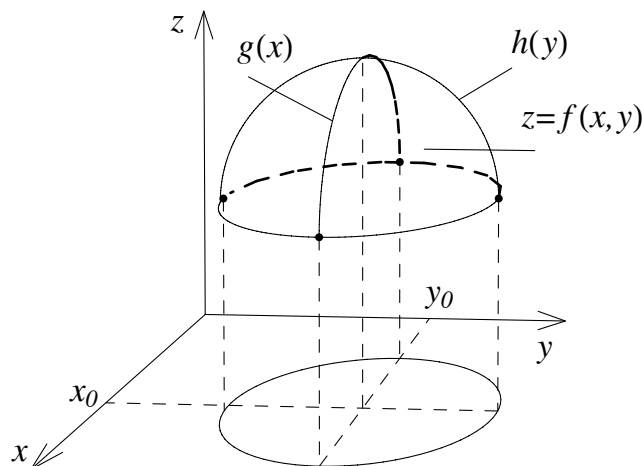
říkáme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) **ostré lokální maximum** (resp. **ostré lokální minimum**).

Říkáme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) **(globální) maximum** (resp. **minimum**), jestliže podmínka (7.1) platí pro každé $(x, y) \in M$.

Při vyšetřování extrémů funkce f se omezíme na zjišťování lokálních extrémů ve vnitřních bodech definičního oboru funkce f . V hraničních bodech definičního oboru je situace poněkud složitější. V dalším tedy budeme předpokládat, že funkce f je definována na nějaké otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$. Podobně jako při hledání lokálních extrémů funkce jedné proměnné, využijeme ke hledání extrémů funkce f jejich parciálních derivací. Budeme tedy také dále předpokládat, že $f \in C^2(G)$.

Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) lokální extrém (tj. lokální maximum nebo minimum). Potom též funkce jedné proměnné $g(x) = f(x, y_0)$ má v bodě x_0

lokální extrém a také funkce $h(y) = f(x_0, y)$ má v bodě y_0 lokální extrém. Proto je nutně $g'(x_0) = 0$ a též $h'(y_0) = 0$. Ale $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ a $h'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. (Celá situace je pro případ, kdy f má v (x_0, y_0) lokální maximum, znázorněna na obr. 7.1.)



Obrázek 7.1:

Dokázali jsme tedy následující větu:

Věta 7.2:

Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a necht' $f \in C^1(G)$. Má-li funkce f v bodě $(x_0, y_0) \in G$ lokální extrém, je nutně

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \quad (7.2)$$

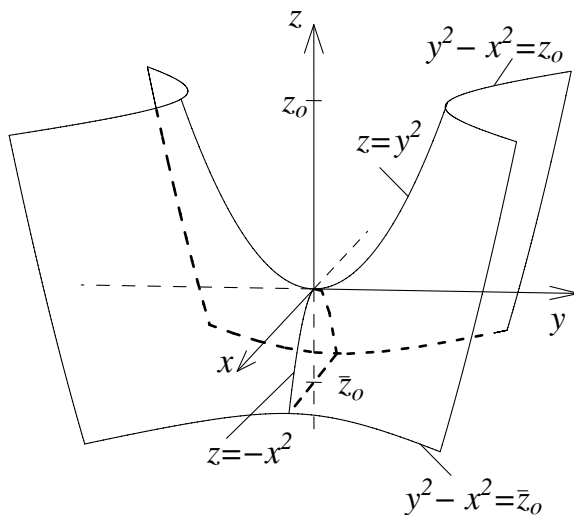
• **Poznámka 7.3:** Podobně jako u funkce jedné proměnné jsou podmínky (7.2) pouze nutné pro existenci extrému, ale obecně ne postačující. Bod (x_0, y_0) , pro který jsou podmínky (7.2) splněny, nazýváme **stacionárním bodem** funkce f . Větu 7.2 lze pak formulovat následovně:

Funkce $f \in C^1(G)$ může mít lokální extrém pouze ve stacionárním bodě.

• **Příklad 7.4:** Uvažujme funkci $f(x, y) = y^2 - x^2$ definovanou na \mathbb{R}^2 , jejíž graf je nakreslen na obr. 7.2.

Protože $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ je rovno nule právě pro $x = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ je rovno nule právě pro $y = 0$, je jediným stacionárním bodem funkce f bod $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Funkce f ale zřejmě nemá v bodě $(0, 0)$ lokální extrém. (Funkce $g(x) = f(x, 0) = -x^2$ má v bodě $x_0 = 0$ lokální maximum, zatímco funkce $h(y) = f(0, y) = y^2$ má v bodě $y_0 = 0$ lokální minimum.)

• **Poznámka 7.5:** Takový stacionární bod $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ funkce $f(x, y)$, kdy funkce f má v jednom směru v \mathbf{x}_0 ostré lokální minimum a v jiném směru ostré lokální maximum



Obrázek 7.2:

nazýváme **sedlový bod** funkce f . (Přesněji: stacionární bod \mathbf{x}_0 je sedlový bod funkce f , jestliže existují směry \mathbf{u} a \mathbf{v} takové, že funkce $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u})$ má v bodě $t = 0$ ostré lokální maximum a funkce $h(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$ má v bodě $t = 0$ ostré lokální minimum.) V předchozím příkladě byly tyto směry $\mathbf{u} = (1, 0)$ a $\mathbf{v} = (0, 1)$.

Podobně jako u funkce jedné proměnné získáme postačující podmínky pro existenci lokálního extrému ve stacionárním bodě pomocí druhých derivací. Zavedme proto následující pojem.

Definice 7.6: Je-li $f \in C^2(G)$, nazýváme matici

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

Hessovou maticí funkce f . Determinant Hessovy matice funkce f nazýváme **Hessiánem** a značíme $H_f = H_f(x, y)$.

Je tedy

$$H = H_f = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2, \quad (7.3)$$

když využijeme faktu, že Hessova matice je symetrická, tedy že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Platí následující věta:

Věta 7.7:

Nechť $f \in C^2(G)$ a $(x_0, y_0) \in G$ je stacionární bod funkce f . Potom

1. Je-li $H_f(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální extrém. Je-li:
 - (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální lokální minimum,
 - (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) ostré lokální lokální maximum.
2. Je-li $H_f(x_0, y_0) < 0$, má funkce f v bodě (x_0, y_0) sedlový bod, a tedy v tomto bodě lokální extrém nemá.

Poznamenejme ještě, že je-li ve stacionárním bodě (x_0, y_0) funkce f Hessián $H_f(x_0, y_0) = 0$, neumíme jednoduše rozhodnout, zda je v tomto bodě lokální extrém nebo ne.

• **Poznámka 7.8:** Význam podmínky $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ pro lokální minimum, a podobně podmínky $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ pro lokální maximum, je zřejmý. Je-li totiž ve stacionárním bodě (x_0, y_0) lokální extrém, což zaručuje podle věty podmínka $H_f(x_0, y_0) > 0$, má také funkce $g(x) = f(x, y_0)$ v bodě x_0 lokální extrém téhož druhu. Ale $g''(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, a tedy se jedná o lokální minimum.

Všimněte si ještě, že z podmínky $H_f(x_0, y_0) > 0$, plyne ze vztahu (7.3), že znaménka derivací $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ jsou stejná.

• **Příklad 7.9:** Určeme lokální extrémy a sedlové body funkce

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y .$$

Řešení: Zřejmě funkce f je definována na celém \mathbb{R}^2 . Nejprve určíme stacionární body funkce f . Musí pro ně být splněny následující dvě rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 , \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 6xy - 12 = 0 . \end{aligned}$$

Z druhé rovnice plyne $y = \frac{2}{x}$. Dosazením do první rovnice a úpravou dostaneme rovnici

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4) = 0 .$$

Tato rovnice má zřejmě 4 kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ a $x_4 = -2$. Ze vztahu $y = \frac{2}{x}$ pak dostaneme odpovídající hodnoty neznámé y , $y_1 = 2$, $y_2 = -2$, $y_3 = 1$ a $y_4 = -1$. Funkce

f má tedy čtyři stacionární body $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (-1, -2)$, $(x_3, y_3) = (2, 1)$ a $(x_4, y_4) = (-2, -1)$. Dále

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6y .$$

Tedy

$$H(x, y) = \det \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix} = 36x^2 - 36y^2 .$$

Odtud dosazením dostáváme $H(1, 2) = H(-1, -2) = -108 < 0$ a $H(2, 1) = H(-2, -1) = 108 > 0$. Z věty 7.7 pak dostáváme, že v bodech $(1, 2)$ a $(-1, -2)$ lokální extrémů nejsou, neboť to jsou sedlové body, v bodech $(2, 1)$ a $(-2, -1)$ lokální extrémů jsou. Protože $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) = 12 > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2, -1) = -12 < 0$, je podle věty 7.7 v bodě $(2, 1)$ ostré lokální minimum a v bodě $(-2, -1)$ ostré lokální maximum. Přitom $f(2, 1) = -28$ a $f(-2, -1) = 28$.

Všimněme si ještě, že funkce f je neomezená shora i zdola. Např. na ose x nabývá libovolně velkých i malých hodnot.

Cvičení 7.10: Určete lokální extrémů a sedlové body funkce

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} , \quad x > 0 , \quad y > 0 .$$

7.2 Metoda nejmenších čtverců

V tomto odstavci si ukážeme jednu aplikaci předchozí látky, která je důležitá v laboratorní praxi.

Budeme řešit úlohu následujícího typu: Předpokládejme, že pro různé hodnoty x_1, \dots, x_n nezávisle proměnné x , např. teploty, jsou získány (např. měřením, a tedy s jistou chybou) hodnoty y_1, \dots, y_n závisle proměnné y , např. tepelné kapacity jisté látky. Dále předpokládejme, že víme jakého typu je uvažovaná závislost proměnné y na proměnné x . Omezíme se na nejjednodušší případ, kdy y závisí na x lineárně, tj.

$$y = ax + b .$$

V tomto kontextu nazýváme funkci $y = ax + b$ lineární, i když není lineární ve smyslu definice 2.1. Předpokládáme tedy, že známe typ závislosti, ale neznáme konkrétní hodnoty konstant a a b . Kdyby odpovídající si hodnoty x_i a y_i vyhovovaly přesně vztahu $y = ax + b$, potom k určení konstant a, b by stačila znalost dvou dvojic (x_i, y_i) a (x_j, y_j) pro $i \neq j$.

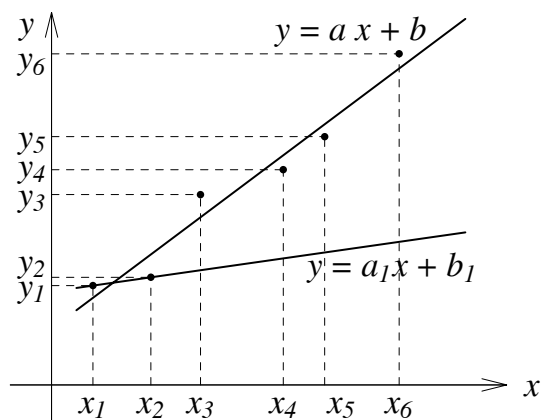
V praxi ale hodnoty y_i budou obvykle získány s nějakou chybou. To znamená, že body $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ obecně neleží na jediné přímce $y = ax + b$ pro žádnou volbu konstant a, b . Budeme chtít určit hodnoty a, b tak, aby získané hodnoty y_i závisely na x_i “co možná nejlépe” podle vztahu $y = ax + b$, tj. aby přímka $y = ax + b$ “co možná nejlépe” procházela body $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Samozřejmě zatím není jasné co rozumíme pojmem “co možná nejlépe”. Na obr. 7.3 jsou nakresleny body $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ pro $n = 6$ a dvě přímky

$y = ax + b$ a $y = a_1x + b_1$. Je přirozené říci, že přímka $y = ax + b$ lépe vystihuje závislost y na x než přímka $y = a_1x + b_1$, i když ani jeden z bodů (x_i, y_i) na této přímce neleží, zatímco na přímce $y = a_1x + b_1$ leží body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) .

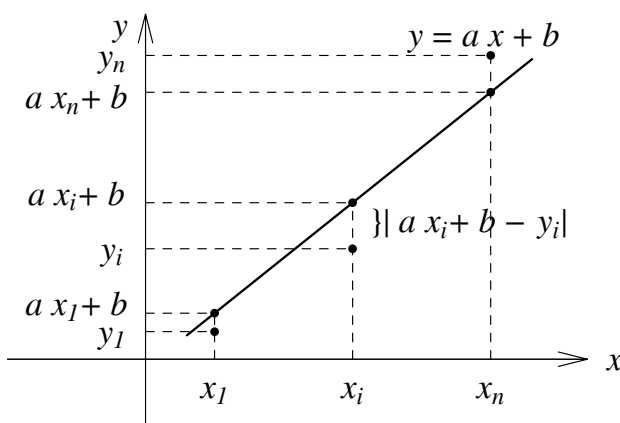
V praxi se ukazuje rozumné brát za kritérium toho, jak dobře přímka $y = ax + b$ vystihuje závislost y na x , součet

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2, \quad (7.4)$$

viz obr. 7.4.



Obrázek 7.3:



Obrázek 7.4:

Čím menší je součet (7.4), tím lépe přímka $y = ax + b$ vystihuje závislost y na x . (Toto kritérium vyplývá z matematické statistiky, jsou-li splněny některé předpoklady o rozdělení chyb experimentu).

Budeme tedy chtít určit hodnoty a, b tak, aby pro známé hodnoty x_i a y_i , $i = 1, \dots, n$, byla hodnota funkce

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \quad (7.5)$$

minimální, tj. hledáme minimum funkce $f(a, b)$ dané vztahem (7.5), viz obr. 7.4. Metodu, kdy hledané hodnoty a, b jsou voleny tak, že v bodě (a, b) má funkce f daná vztahem (7.5) minimum, nazýváme **metodou nejmenších čtverců**.

V dalším odvodíme vztahy pro výpočet těchto hodnot a, b . Z Výsledků předchozího odstavce plyne, že pro minimum funkce f musí platit rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = 0,$$

tedy

$$\sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) x_i = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0,$$

což po úpravě dává soustavu dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) b &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) a + n b &= \sum_{i=1}^n y_i, \end{aligned} \tag{7.6}$$

s neznámými a, b . Uvědomme si, že koeficienty a pravé strany této soustavy $\sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n x_i,$

$\sum_{i=1}^n x_i y_i$ a $\sum_{i=1}^n y_i$ snadno vypočteme ze zadaných hodnot x_i a y_i .

Navíc lze ukázat, že matice této soustavy

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix}$$

je vždy pro $n \geq 2$ regulární, a tedy soustava (7.6) má právě jedno řešení. Proto i funkce $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ má právě jeden stacionární bod a to řešení soustavy (7.6). Obecně se dá ukázat, že funkce f nabývá v tomto bodě svého minima. Platí tedy následující věta:

Věta 7.11:

Nechť jsou dány hodnoty x_1, \dots, x_n a hodnoty $y_1, \dots, y_n, n \geq 2$ tak, že $x_i \neq x_j$ alespoň pro dva indexy $i, j, 1 \leq i, j \leq n$. Aproximujeme-li závislost y na x vztahem $y = ax + b$, pak koeficienty a, b určené metodou nejmenších čtverců, tj. tak, aby hodnota $\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ byla minimální, jsou jednoznačně určeny jako řešení soustavy (7.6).

• **Příklad 7.12:** Následující tabulka uvádí hodnoty molární tepelné kapacity C_p sloučeniny MgF_2 v závislosti na teplotě T .

$T[\text{K}]$	300	400	500	600	700	800
$C_p[\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$	70.28	75.31	80.45	85.73	90.92	96.40

Aproximujme závislost C_p na T vztahem $C_p = aT + b$, kde koeficienty a, b určíme metodou nejmenších čtverců. Koeficienty a, b určíme jako řešení soustavy (7.6). V našem případě je $n = 6$. Ponechme pro přehlednost předchozí označení a hodnoty teploty a tepelné kapacity dané tabulkou označme x_i a $y_i, i = 1, \dots, 6$. Nejprve vypočteme koeficienty soustavy (7.6). Dostáváme

$$\sum_{i=1}^n x_i = 3\,000 \quad , \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\,990\,000 \quad , \quad \sum_{i=1}^n y_i = 499.09 \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = 283\,635 \quad .$$

Soustava (7.6) má tedy tvar

$$\begin{aligned} 1\,990\,000a + 3\,300b &= 283\,635 \\ 3\,300a + 6b &= 499.09 . \end{aligned}$$

Odtud např. Gaussovou eliminací dostáváme $a \doteq 0.0522$ a $b \doteq 54.47$. Hledaná závislost je tedy tvaru

$$C_p = 0.0522T + 54.47 .$$

• **Poznámka 7.13:** Hledaná závislost y na x nemusí být ovšem vždy pouze typu $y = ax + b$. Obecně může být $y = g(x)$, kde funkce g závisí na nějakých konstantách a, b , případně i více konstantách a, b, c, \dots . Např. hledaná závislost může být typu $y = ax^2 + bx + c$, nebo $y = be^{ax}$, apod. Metoda nejmenších čtverců je v těchto případech analogická. Je-li hledaná závislost např. typu $y = ax^2 + bx + c$, pak hledáme minimum funkce

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2 .$$

Bod, kde funkce f tohoto minima nabývá, musí být nutně stacionární bod funkce f , tedy musí platit $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$. Dá se ukázat, že tyto rovnice minimum funkce f jednoznačně určují.

Cvičení 7.14: Jsou dány hodnoty

x	15	18	21	23	26
y	33	44	53	59	70

Závislost y na x aproximujte polynomem $y = ax + b$, koeficienty a, b vypočtete metodou nejmenších čtverců.

Návody ke cvičením z kap. 7

7.10 Určete nejprve stacionární body funkce f jako řešení soustavy $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Podle věty 7.7 pak určete, kde a jakého druhu jsou lokální extrémy a kde jsou sedlové body.

7.14 Vypočtete koeficienty soustavy (7.6) pro tento příklad ($n=5$). Získanou soustavu řešte Gaussovou eliminací nebo Cramerovým pravidlem.

Kapitola 8

Implicitně zadané funkce

V této kapitole poznáme další způsob zadání funkce jedné nebo více proměnných pomocí rovnice, tzv. implicitní zadání funkce. Někdy místo o implicitně zadané funkci mluvíme zkráceně jen o implicitní funkci.

8.1 Implicitní funkce jedné proměnné

Připomeňme si, že funkcí $y = f(x)$ rozumíme předpis, který každému x z množiny $D(f)$ přiřazuje právě jedno y z množiny $H(f)$. Ve skriptech [MI] jsme vyšetřovali funkce jedné proměnné, které byly v tomto tvaru $y = f(x)$, např. $y = \ln x$ nebo $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, apod. Chceme-li v těchto případech znát hodnotu závisle proměnné y pro nějakou hodnotu nezávisle proměnné x , stačí za x do daného předpisu dosadit a okamžitě dostáváme příslušnou hodnotu y . Např. je-li $y = \ln x$, pak pro $x = 1$ je $y = 0$, protože $\ln 1 = 0$ a pro $x = 2$ je $y = \ln 2 \doteq 0.693$. Je-li $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, pak pro $x = 1$ je $y = \frac{1-1}{1+1} = 0$ a pro $x = 2$ je $y = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5}$, atd.

Zadání funkce ve tvaru $y = f(x)$, tj. zadání, kdy je dán vzorec vyjadřující hodnotu závisle proměnné y na hodnotě nezávisle proměnné x , nazýváme **explicitní zadání funkce**.

Někdy může být závislost y na x vyjádřena pouze rovnicí, kde vystupují y i x , např.

$$\frac{1}{y} + 1 = \frac{1}{x} - 1. \quad (8.1)$$

(S tím jsme se již setkali např. při řešení diferenciálních rovnic metodou separace proměnných). V uvedeném příkladě lze z rovnice (8.1) y snadno vypočítat. Je totiž

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}, \quad \text{a tedy} \quad y = \frac{x}{1-2x},$$

což je explicitní vyjádření závislosti y na x popsané rovnicí (8.1). Bude-li ale rovnice, která udává vztah mezi y a x složitější, např.

$$\frac{1}{y} + y^2 = \frac{1}{x} - 1,$$

neumíme již závislost y na x z tohoto vztahu explicitně vyjádřit, resp. z této rovnice vyjádřit y jako funkci x nelze.

Zadání funkce y proměnné x **rovnicí**, ve které vystupují jak x tak y , nazýváme **implicitním zadáním funkce**.

• **Příklad 8.1:** Závislost tlaku na objemu při adiabatickém ději je popsána rovnicí $pV^b = c$, kde b, c jsou konstanty. Tato rovnice implicitně udává závislost tlaku na objemu, případně i opačně závislost objemu na tlaku. Obě tyto závislosti můžeme z dané rovnice snadno vyjádřit explicitně:

$$p = \frac{c}{V^b}$$

je explicitní vyjádření závislosti tlaku na objemu,

$$V = \left(\frac{c}{p}\right)^{1/b}$$

je explicitní vyjádření závislosti objemu na tlaku.

Ne každá rovnice, ve které vystupují x a y , určuje nějakou závislost y na x , tj. určuje nějakou implicitní funkci. Např. rovnice

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

není zřejmě splněna pro žádnou dvojici čísel x a y . Jak poznat, kdy nějaká rovnice skutečně určuje implicitní funkci y proměnné x , nám umožní věta 8.4.

Dříve než ji zformulujeme, uvědomme si, že libovolnou rovnici, ve které vystupují x a y , lze zapsat ve tvaru $F(x, y) = 0$, kde F je nějaká funkce dvou proměnných, převedením její jedné části na druhou stranu. Např. rovnici

$$\frac{1}{y} + y^2 = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{lze převést na tvar} \quad \frac{1}{y} + y^2 - \frac{1}{x} + 1 = 0,$$

a tedy je tvaru

$$F(x, y) = 0, \quad \text{kde} \quad F(x, y) = \frac{1}{y} + y^2 - \frac{1}{x} + 1.$$

Následující definice zavádí exaktně pojem implicitní funkce, který zhruba řečeno znamená, že všechna řešení nějaké rovnice $F(x, y) = 0$, která leží v jistém obdélníku jsou právě dvojice $(x, f(x))$, kde f je funkce implicitně zadaná rovnicí $F(x, y) = 0$. Vystupují v ní tedy dvě funkce. Jednak funkce $F(x, y)$ dvou proměnných, která popisuje rovnici udávající závislost y na x , a jednak funkce jedné proměnné $y = f(x)$, která je explicitním vyjádřením této závislosti.

Definice 8.2: Říkáme, že rovnice $F(x, y) = 0$ definuje **na okolí bodu** (x_0, y_0) **implicitně funkci** $y = f(x)$ nebo, že funkce $y = f(x)$ **je na okolí bodu** (x_0, y_0) **implicitně zadaná rovnicí** $F(x, y) = 0$, jestliže

- 1) $F(x_0, y_0) = 0$ a
- 2) existují čísla $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $y = f(x)$ jediné číslo z intervalu $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, které splňuje rovnici $F(x, y) = 0$.

• **Poznámka 8.3:** Funkce $y = f(x)$ zadaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ na okolí bodu (x_0, y_0) je tedy definována pro všechna x z jistého intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Zdůrazněme že funkce implicitně zadaná rovnicí $F(x, y) = 0$ je funkcí jedné reálné proměnné. Její hodnoty $y = f(x)$ leží v jistém intervalu $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Jsou to pro dané x jediná řešení dané rovnice, která patří do intervalu $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Jinak řečeno rovnice $F(x, y) = 0$ má na obdélníku $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ za řešení právě dvojici $(x, f(x))$, tedy

$$F(x, f(x)) = 0$$

pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Proto také nutně

$$f(x_0) = y_0,$$

jelikož podle předpokladu je $F(x_0, y_0) = 0$.

Věta 8.4: (O existenci implicitní funkce)

Nechť $F \in C^k(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_0, y_0) \in G$ je takový bod, že

- 1) $F(x_0, y_0) = 0$,
- 2) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x, y) = 0$ definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. Navíc $f \in C^k(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pro jisté $\delta > 0$.

Důkaz věty 8.4 nebudeme provádět. Rozeberme ale jednotlivé předpoklady této věty.

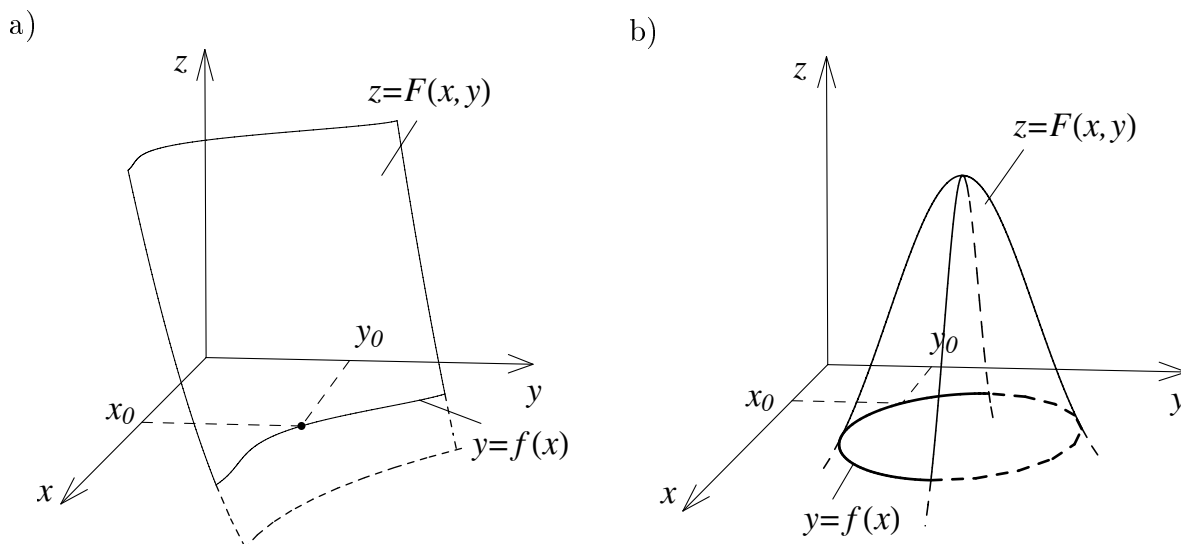
1. Předpoklad $F \in C^k(G)$ není pro $k = 1$ nijak zvlášť omezující. Říká, že funkce F je na G spojitá a má zde spojitě i parciální derivace. Z tvrzení věty 8.4 plyne, že existence a spojitost vyšších parciálních derivací funkce F pro $k \geq 1$ zaručuje existenci a spojitost vyšších parciálních derivací implicitní funkce f . Jak počítat derivace implicitní funkce f si ukážeme později.

2. Předpoklad o existenci bodu $(x_0, y_0) \in G$, jehož souřadnice vyhovují rovnici $F(x, y) = 0$, je přirozený. Pokud by takový bod neexistoval, nemůže existovat ani žádná funkce $y = f(x)$ určená implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$, a tedy splňující podmínku $F(x, f(x)) = 0$.

3. Předpoklad $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ je podstatný a vyplývá z něj, že rovnice $F(x, y) = 0$ má, kromě řešení (x_0, y_0) , nekonečně mnoho dalších řešení tvaru $(x, f(x))$, která všechna tvoří graf implicitně zadané funkce, viz dále poznámka 8.9.

• **Poznámka 8.5:** Geometricky si můžeme graf implicitně zadané funkce představit jako část průniku grafu funkce $z = F(x, y)$ (tedy jisté plochy) s rovinou $z = 0$, viz obr. 8.1a),b) tedy jako část nulové vrstevnice funkce F . Právě podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ zaručuje, že tento průnik je alespoň na nějakém okolí bodu (x_0, y_0) grafem funkce. (Na obr. 8.1b) je tato část vrstevnice nečárkovaná.)

• **Poznámka 8.6:** Uvědomme si, že věta 8.4 je existenční věta. Neříká nic o velikosti čísel δ a ε z definice 8.2, ani nic o tom, jak počítat hodnoty implicitní funkce. Víme pouze, že taková funkce existuje. Její explicitní vyjádření však obvykle určit neumíme. Víme pouze, že $f(x_0) = y_0$.



Obrázek 8.1:

• **Příklad 8.7:** Uvažujme rovnici

$$x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0 . \tag{8.2}$$

Této rovnici vyhovuje např. bod $(x_0, y_0) = (1, 2)$ nebo bod $(x_1, y_1) = (1, -1)$. Označíme-li $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 3$, pak $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 9 \neq 0$. Daná rovnice tedy definuje na okolí bodu (x_0, y_0) implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. O této funkci však zatím pouze víme, že $f(1) = 2$, ale nevíme nic o tom, jak se mění její hodnoty v závislosti na x , je-li např. rostoucí či klesající, apod. To nám umožní určit věta 8.11, kde se naučíme počítat derivaci implicitně zadané funkce.

Naopak, protože $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1) = 0$, nevíme, zda daná rovnice na okolí bodu (x_1, y_1) nějakou implicitně zadanou funkci definuje.

Ukažme si ještě, jak lze vypočítat některé další hodnoty funkce $y = f(x)$ implicitně zadané na okolí bodu $(1, 2)$ rovnicí (8.2). Předpokládejme, že tato funkce je definována pro $x \in \langle 0.9, 1.1 \rangle$, tj. že δ z definice 8.2 lze volit větší než 0.1. Volíme-li např. $x = 0.9$ a dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (8.2) dostaneme rovnici

$$y^3 - 2.7y - 2.271 = 0 .$$

Tato rovnice má v jistém okolí bodu $y_0 = 2$ jediný kořen. Jeho přibližnou hodnotu lze vypočítat např. Newtonovou metodou a dostaneme $y \doteq 1.963783$. Tedy $f(0.9) \doteq 1.963783$. Podobně, volíme-li např. $x = 1.1$, dostaneme pro $y = f(1.1)$ rovnici

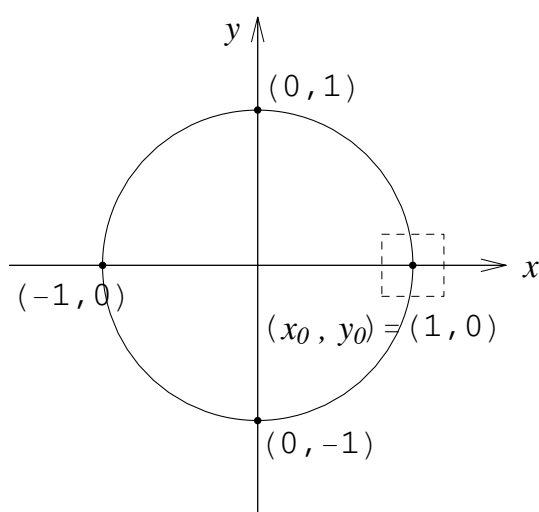
$$y^3 - 3.3y - 1.669 = 0 .$$

Odtud Newtonovou metodou dostaneme $y \doteq 2.030284$, tedy $f(1.1) \doteq 2.030284$.

Cvičení 8.8: Vypočítejte hodnoty $f(0.95)$ a $f(1.05)$ implicitní funkce f z příkladu 8.7.

• **Poznámka 8.9:** Ukažme, že předpoklad $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ nelze ve větě 8.4 obecně vynechat. Uvedeme 3 příklady, kdy $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Ani v jednom z nich nebude splněno tvrzení věty 8.4.

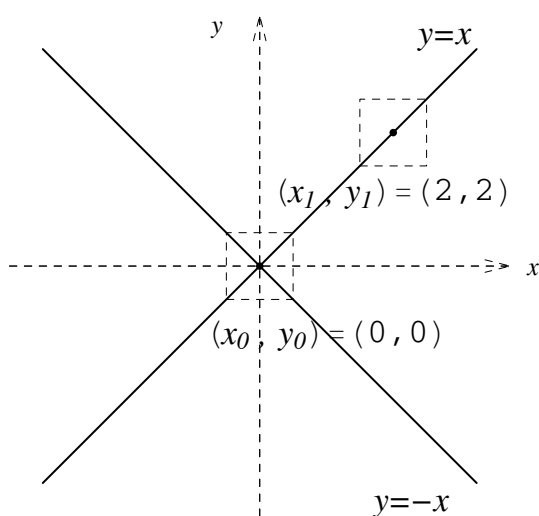
1. Uvažujme rovnici $x^2 + y^2 = 0$, tj. $F(x, y) = x^2 + y^2$ a bod $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Zřejmě $F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y$, a tedy $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$. Nejsou tedy splněny předpoklady věty 8.4. Rovnice $x^2 + y^2 = 0$ nedefinuje žádnou implicitní funkci, protože ji splňuje pouze bod $(0, 0)$.
2. Uvažujme rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$, tj. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ a bod $(x_0, y_0) = (1, 0)$,



Obrázek 8.2:

který ji splňuje. Tato rovnice je rovnicí kružnice se středem v počátku a poloměrem $r = 1$, viz obr. 8.2. Opět $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 0$. Na okolí bodu $(1, 0)$ nedefinuje rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ žádnou implicitní funkci y proměnné x . Pro $x > 1$ neexistuje žádné y takové, aby dvojice (x, y) splňovala danou rovnici. Naopak, pro každé $x < 1$, které je blízké 1, existují dvě hodnoty $y_{1,2} = \pm\sqrt{1-x^2}$ blízké 0 takové, že dvojice (x, y_1) a (x, y_2) splňují danou rovnici.

3. Uvažujme rovnici $y^2 - x^2 = 0$, tj. $F(x, y) = y^2 - x^2$ a bod $(x_0, y_0) = (0, 0)$, který ji



Obrázek 8.3:

splňuje. Opět $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$. Protože $y^2 - x^2 = (y - x) \cdot (y + x) = 0$ právě tehdy, když $y = x$ nebo $y = -x$, je množina všech bodů, které vyhovují dané rovnici tvořena přímkami $y = x$ a $y = -x$, viz obr. 8.3. Ukážeme, že na okolí bodu $(0, 0)$ nedefinuje rovnice $y^2 - x^2 = 0$ implicitně žádnou funkci. Je to opět proto, že pro každé x , které je blízké 0, existují dvě hodnoty $y_{1,2} = \pm x$ blízké 0 takové, že obě dvojice (x, y_1) a (x, y_2) splňují danou rovnici.

Volíme-li ale např. $x_1 = 2$ a $y_2 = 2$, pak na okolí tohoto bodu definuje rovnice $y^2 - x^2 = 0$ právě jednu funkci, a to $y = x$, viz obr. 8.3.

Ve všech třech předchozích příkladech není část křivky $F(x, y) = 0$, ležící v “jakkoli malém obdélníku” se středem (x_0, y_0) , grafem žádné funkce $y = f(x)$ (na rozdíl od případu bodu (x_1, y_1) na obr. 8.3).

• **Příklad 8.10:** Uvažujme ještě jednou kružnici $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, viz obr. 8.2. Na této kružnici leží např. body $(0, 1)$ a $(0, -1)$. Protože $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, -1) = -2 \neq 0$, definuje daná rovnice na okolí bodu $(0, 1)$ i na okolí bodu $(0, -1)$ nějaké implicitní funkce. V tomto případě je ovšem rovnice $F(x, y) = 0$ velmi jednoduchá a y umíme z dané rovnice vypočítat. Tedy implicitní funkce na okolí bodu $(0, 1)$ je dána vztahem $y = \sqrt{1 - x^2}$, implicitní funkce na okolí bodu $(0, -1)$ pak vztahem $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Nyní se naučíme počítat derivace implicitně zadaných funkcí.

Věta 8.11: (O derivaci implicitní funkce)

Jsou-li splněny předpoklady věty 8.4, pak derivace implicitně zadané funkce $y = f(x)$ je dána vztahem

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \quad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) . \quad (8.3)$$

Důkaz:

Důkaz plyne okamžitě z pravidla o derivování složené funkce, viz věta 6.15. Pro funkci $y = f(x)$ totiž podle definice 8.2 platí $F(x, f(x)) = 0$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. To znamená, že funkce $h(x) = F(x, f(x))$ je identicky rovna 0 na intervalu $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, a tedy má na tomto intervalu nulovou derivaci. Podle pravidla o derivování složené funkce dostáváme

$$0 = h'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(x) .$$

Odtud okamžitě dostáváme vztah (8.3), protože derivace $\frac{\partial F}{\partial x}$ a $\frac{\partial F}{\partial y}$ jsou vyčísleny v bodě $(x, f(x))$. Ze spojitosti $\frac{\partial F}{\partial y}$ plyne, že $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ na jistém okolí (x_0, y_0) . ■

• **Poznámka 8.12:** Vztah (8.3) budeme často stručně zapisovat ve tvaru

$$y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} . \quad (8.4)$$

Např. pro rovnici $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$ z příkladu 8.7 máme $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ a $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x$, a tedy

$$y' = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}. \quad (8.5)$$

Uvědomme si, že ve vztahu (8.4) a speciálně též ve vztahu (8.5) vystupují při vyjádření y' nejen hodnoty nezávisle proměnné x , ale též hodnoty závisle proměnné y , za které je ovšem třeba dosadit $f(x)$. Chceme-li tedy vypočítat hodnotu derivace y' implicitně zadané funkce $y = f(x)$ podle vzorce (8.4), nestačí znát pouze hodnotu nezávisle proměnné x , ale musíme znát též odpovídající hodnotu závisle proměnné $y = f(x)$. Navíc musí být $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

Např. pro funkci $y = f(x)$ z příkladu 8.7 zadanou rovnicí $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$ na okolí bodu $(1, 2)$ víme, že $f'(x) = y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$. Hodnotu derivace y' ale umíme vypočítat pouze pro $x_0 = 1$, kdy známe příslušnou hodnotu závisle proměnné $y_0 = f(x_0) = 2$. Dosazením do vztahu (8.5) dostáváme $f'(1) = \frac{1}{3}$. To mimo jiné znamená, že funkce $y = f(x)$ je na okolí bodu $x_0 = 1$ rostoucí.

Ukažme si nyní, jak se počítají derivace vyšších řádů implicitně zadaných funkcí. Derivováním vztahu (8.4) můžeme odvodit obecný vzorec pro výpočet vyšších derivací implicitně zadané funkce. Např.

$$y'' = -\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y'\right) \frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'\right) \frac{\partial F}{\partial x}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}.$$

Pro výpočet vyšších derivací v konkrétních případech však není nutné tento vzorec znát. Při výpočtu vyšších derivací obvykle postupujeme tak, že konkrétní vztah (8.4) pro y' zderivujeme podle proměnné x . Na proměnnou y ve vyjádření (8.4) musíme ovšem pohlížet jako na funkci proměnné x a klást $\frac{dy}{dx} = y'$.

Např. pro funkci $y = f(x)$ z příkladu 8.7 víme, že $f'(x) = y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$. Derivováním podle x dostaneme

$$f''(x) = y'' = \frac{(y' - 2x) \cdot (y^2 - x) - (2y \cdot y' - 1) \cdot (y - x^2)}{(y^2 - x)^2}.$$

Dosazením hodnot $x = 1$, $y = 2$ a dříve vypočtené hodnoty $y' = \frac{1}{3}$ dostáváme

$$f''(1) = \frac{\left(\frac{1}{3} - 2\right) \cdot 3 - \left(\frac{4}{3} - 1\right) \cdot 1}{9} = -\frac{16}{27}.$$

• **Poznámka 8.13:** Podobně jako vyšší derivace implicitně zadané funkce lze počítat i její první derivaci, kdy “derivujeme přímo danou rovnici” $F(x, y) = 0$ a y derivujeme jako funkci proměnné x . Např. pro funkci $y = f(x)$ z příkladu 8.7, která je určena rovnicí $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$, dostaneme derivováním této rovnice podle x rovnicí

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3y - 3x \cdot y' = 0.$$

Odtud již snadno vypočteme $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$, což je vztah (8.5). Pro výpočet první derivace implicitně zadané funkce však není tento postup příliš vhodný, neboť musíme y' ze vztahu získaného “derivováním rovnice” $F(x, y) = 0$ vždy znovu vypočítat. Přitom tento výpočet jsme již provedli obecně, při důkazu věty 8.11. Naopak při výpočtu derivací vyšších řádů může být tento postup výhodnější, než derivovat podíl (8.3).

Ukažme si to na příkladě.

• **Příklad 8.14:** Ukažme, že rovnice $e^{2x} + e^y + x + 2y - 2 = 0$ definuje na okolí bodu $(0, 0)$ implicitně nějakou funkci $y = f(x)$ a vypočtěme $f'''(0)$.

Řešení: Označme $F(x, y) = e^{2x} + e^y + x + 2y - 2$. Protože $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y} = e^y + 2$, a tedy $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 3 \neq 0$, definuje daná rovnice na okolí bodu $(0, 0)$ implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. “Derivováním dané rovnice” podle x postupně dostáváme:

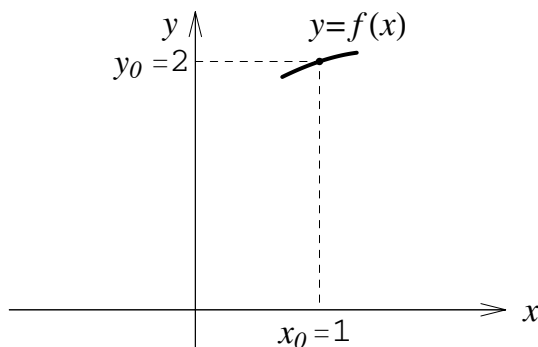
$$2e^{2x} + e^y y' + 1 + 2y' = 0,$$

$$4e^{2x} + e^y (y')^2 + e^y y'' + 2y'' = 0,$$

$$8e^{2x} + e^y (y')^3 + e^y 2y' y'' + e^y y' y'' + e^y y''' + 2y''' = 0.$$

Odtud postupným výpočtem po dosazení $x = 0$ a $y = 0$ dostaneme $y'(0) = -1$, $y''(0) = -\frac{5}{3}$ a konečně $y'''(0) = 4$. Je tedy $f'''(0) = 4$.

• **ad Příklad 8.7:** Shrňme doposud získané výsledky a uveďme co z nich lze odvodit. Víme, že rovnice $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$ definuje na okolí bodu $(1, 2)$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$, pro kterou platí $f(1) = 2$, $f'(1) = \frac{1}{3}$ a $f''(1) = -\frac{16}{27}$. Tato funkce je tedy na okolí bodu $x_0 = 1$ rostoucí a konkávní, viz obr. 8.4.



Obrázek 8.4:

Protože kromě funkční hodnoty známe i hodnoty první a druhé derivace funkce f v bodě x_0 (a umíme vypočítat i hodnoty vyšších derivací), můžeme funkci f na okolí bodu x_0 aproximovat Taylorovým polynomem $T_2(x)$ (případně i polynomem vyššího řádu). Dostáváme

$$T_2(x) = 2 + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{8}{27}(x - 1)^2.$$

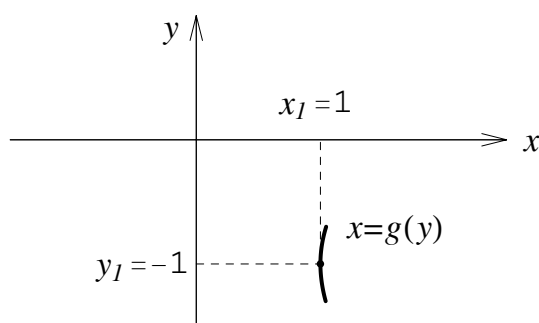
Pomocí tohoto polynomu můžeme např. přibližně vypočítat hodnotu $f(0.9)$. Dostáváme $f(0.9) \doteq T_2(0.9) \doteq 1.963704$. Připomeňme, že tuto hodnotu jsme již vypočítali dříve a přesněji pomocí Newtonovy metody, kdy jsme dostali $f(0.9) \doteq 1.963783$. Výhoda Taylorova polynomu je ovšem v tom, že nám udává přibližné hodnoty závisle proměnné y najednou pro všechna x z jistého okolí x_0 . Máme tedy alespoň jakési přibližné explicitní vyjádření funkce f , pro niž explicitní vyjádření vypočítat neumíme.

Dále jsme zjistili, že bod $(x_1, y_1) = (1, -1)$ také vyhovuje dané rovnici, ale $\frac{\partial F}{\partial y}(1, -1) = 0$, takže nemůžeme využít věty 8.4. Platí ale $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, a tedy $\frac{\partial F}{\partial x}(1, -1) = 6 \neq 0$. Zaměníme-li role x a y , pak podle věty 8.4 definuje rovnice $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$ na okolí bodu $(1, -1)$ nějakou funkci $x = g(y)$ pro kterou je $g(-1) = 1$. Podle věty 8.11 je derivace této funkce

$$x' = g'(y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = - \frac{3y^2 - 3x}{3x^2 - 3y} = \frac{y^2 - x}{y - x^2},$$

a tedy $g'(-1) = 0$. Můžeme rovněž vypočítat druhou derivaci funkce g a dostáváme

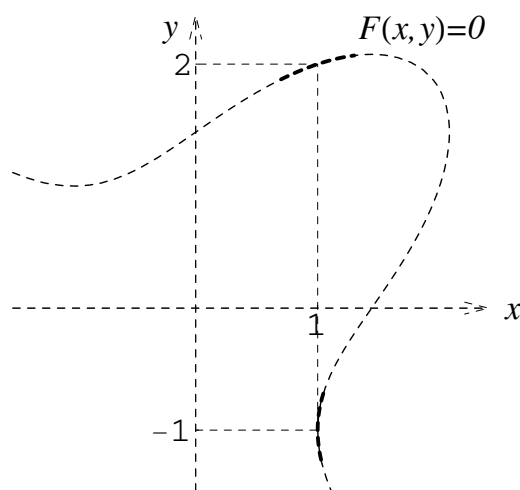
$$g''(y) = \frac{(2y - x')(y - x^2) - (y^2 - x)(1 - 2x \cdot x')}{(y - x^2)^2}.$$



Obrázek 8.5:

Celá křivka popsaná danou rovnicí (tj. množina všech bodů (x, y) , které splňují danou rovnici) je nakreslena na obr. 8.6. Křivka je zřejmě symetrická podle přímky $y = x$, protože vyhovuje-li dané rovnici nějaká dvojice čísel (a, b) , vyhovuje jí i dvojice (b, a) . Tučně jsou znázorněny úseky křivky vyšetřené výše.

Dosažením $y = -1$, $x = 1$ a $x' = 0$ dostaneme $g''(-1) = 1$. Tedy funkce g má v bodě $y_1 = -1$ lokální minimum a je na okolí bodu y_1 konvexní, viz obr. 8.5. Z tohoto obrázku je také zřejmé, že v okolí bodu $(1, -1)$ daná rovnice nedefinuje implicitně žádnou funkci $y = f(x)$. Rovnici $x^3 + y^3 - 3xy - 3 = 0$ vyhovují i další body např. $(0, \sqrt[3]{3})$ nebo $(\sqrt[3]{3}, 0)$, v jejichž okolí můžeme řešení dané rovnice vyšetřovat analogicky.



Obrázek 8.6:

• **Příklad 8.15:** Ukažme, že rovnice

$$\ln(x + y) = x + y - xy - x^2 - y^2$$

definuje na okolí bodu $(0, 1)$ implicitně funkci $y = f(x)$. Napišme rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $(0, 1)$.

Řešení: Danou rovnici upravíme na tvar $\ln(x + y) - x - y + xy + x^2 + y^2 = 0$ a položíme $F(x, y) = \ln(x + y) - x - y + xy + x^2 + y^2$. Dále vypočtíme $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x + y} + 2y + x - 1$. Protože $F(0, 1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0$, definuje rovnice $F(x, y) = 0$ na okolí bodu $(0, 1)$ implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. Pro její derivaci platí vztah (8.4), tedy

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{\frac{1}{x + y} + 2x + y - 1}{\frac{1}{x + y} + 2y + x - 1}.$$

Protože $f(0) = 1$, dostáváme $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Rovnice hledané tečny je tedy

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x.$$

Cvičení 8.16: Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $(1, 0)$, kde funkce f je definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ z předchozího příkladu na okolí bodu $(1, 0)$.

• **Příklad 8.17:** Ukažme, že rovnice $e^x - e^y - x - y = 0$ definuje na okolí bodu $(0, 0)$ implicitně funkci $y = f(x)$. Rozhodněme, zda je tato funkce na okolí bodu $x_0 = 0$ rostoucí či klesající, konvexní či konkávní a aproximujme ji na okolí tohoto bodu Taylorovým polynomem $T_2(x)$.

Řešení: Položíme $F(x, y) = e^x - e^y - x - y$. Protože $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y} = -e^y - 1$, a tedy $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -2 \neq 0$, definuje rovnice $F(x, y) = 0$ na okolí bodu $(0, 0)$ implicitně nějakou funkci $y = f(x)$. Pro tuto funkci platí

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{e^x - 1}{-e^y - 1} = \frac{e^x - 1}{e^y + 1}$$

a dále

$$f''(x) = \frac{e^x \cdot (e^y + 1) - (e^x - 1) \cdot e^y \cdot y'}{(e^y + 1)^2}.$$

Dosazením $x = 0$, $y = 0$ dostáváme $f'(0) = 0$ a $f''(0) = \frac{1}{2}$. Tedy funkce f má v bodě $x_0 = 0$ lokální minimum a není tedy na okolí tohoto bodu ani rostoucí ani klesající. Dále je na okolí tohoto bodu konvexní a $T_2(x) = \frac{1}{4}x^2$.

Cvičení 8.18: Uvažujme rovnici

$$\sin x + \sin y + xy = 0 .$$

- Najděte alespoň tři různé body (x_0, y_0) , (x_1, y_1) a (x_2, y_2) , na jejichž okolí definuje daná rovnice implicitně nějakou funkci $y = f(x)$.
- Rozhodněte, zda je tato funkce na okolí bodu x_0 rostoucí či klesající, konvexní či konkávní.
- Aproximujte tuto funkci $y = f(x)$ na okolí bodu x_0 Taylorovým polynomem $T_2(x)$ a vypočtěte přibližně hodnotu této funkce pro $\bar{x} = x_0 + 0.2$.
- Vypočtěte hodnotu této funkce $y = f(x)$ v bodě $\bar{x} = x_0 + 0.2$ s přesností na 5 desetinných míst Newtonovou metodou a porovnejte výsledek s výsledkem z bodu c).

8.1.1 Normálový vektor ke křivce

V odstavci 6.2 jsme uvedli, že gradient funkce $f(x, y)$ v nějakém bodě (x_0, y_0) vrstevnice, popsané rovnicí $f(x, y) = K$, je normálovým vektorem této vrstevnice v bodě (x_0, y_0) , tj. normálovým vektorem tečny vrstevnice v tomto bodě. Nyní toto tvrzení vysvětlíme podrobněji a zároveň jej i dokážeme. Abychom zachovali označení tohoto odstavce, předpokládejme, že vrstevnice je popsána rovnicí $F(x, y) = 0$.

Věta 8.19:

Nechť je dána rovnice $F(x, y) = 0$ a bod (x_0, y_0) , který ji splňuje, tj. $F(x_0, y_0) = 0$. Nechť alespoň jedno z čísel $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ je nenulové, tj. $\text{grad}F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Potom body (x, y) z okolí bodu (x_0, y_0) , které splňují rovnici $F(x, y) = 0$ tvoří jistou křivku procházející bodem (x_0, y_0) , jejíž normálový vektor v tomto bodě je právě vektor $\text{grad}F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$.

Důkaz:

Předpoklad $\text{grad}F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ zaručuje podle věty 8.4, že všechna řešení rovnice $F(x, y) = 0$ z jistého okolí bodu (x_0, y_0) tvoří skutečně křivku (která je grafem nějaké funkce jedné proměnné) a má tedy smysl mluvit o její tečně a normále. Nechť např. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Pak část křivky $F(x, y) = 0$ na okolí bodu (x_0, y_0) je grafem nějaké funkce $y = f(x)$ implicitně zadané rovnicí $F(x, y) = 0$. Derivace této funkce v bodě x_0 , a tedy

směrnice k tečny k dané křivce v jejím bodě (x_0, y_0) , je podle věty 8.11 dána vztahem

$$k = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Tedy vektor $\left(-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$ je směrovým vektorem tečny ke grafu funkce f v bodě (x_0, y_0) , a tedy k němu kolmý vektor

$$\text{grad}F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

je hledaným normálovým vektorem vrstevnice v bodě (x_0, y_0) . ■

• **Příklad 8.20:** Řešme znovu příklad 8.15 s využitím věty 8.19.

Řešení: Omezíme se pouze na nalezení rovnice tečny, vše ostatní je analogické. Protože $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 1$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2$, je vektor $(1, 2)$ normálovým vektorem k dané křivce v bodě $(0, 1)$. Proto rovnice tečny bude mít tvar $x + 2y = c$, kde konstantu c určíme tak, aby tečna procházela bodem $(0, 1)$. Tedy nutně $c = 2$ a hledaná rovnice tečny je $x + 2y = 2$, což souhlasí s výsledkem příkladu 8.15.

8.2 Implicitní funkce více proměnných

V tomto odstavci zobecníme předchozí látku na implicitně zadané funkce více proměnných. Protože je celá teorie analogická budeme postupovat stručněji.

Definice 8.21: Říkáme, že rovnice $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ definuje na okolí bodu $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z_0)$ **implicitně funkci** $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jestliže

- 1) $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z_0) = 0$ a
- 2) existují čísla $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, je $y = f(\mathbf{x})$ jediné číslo z intervalu $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$, které splňuje rovnici $F(x_1, \dots, x_n, z) = 0$.

Zřejmě $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$ pro každé $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$, a proto $f(\mathbf{x}_0) = z_0$. Srovnajme toto tvrzení s poznámkou 8.3. Zdůrazněme, že takto implicitně zadaná funkce $z = f(\mathbf{x})$ je funkcí n proměnných.

Věta 8.22:

Nechť $F \in C^k(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $k \geq 1$. Nechť $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z_0) \in G$ je takový bod, že

- 1) $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z_0) = 0$,
- 2) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z_0) \neq 0$.

Potom rovnice $F(x_1, \dots, x_n, z) = 0$ definuje na okolí bodu $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z_0)$ implicitně nějakou funkci $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Navíc $f \in C^k(O_\delta(\mathbf{x}_0))$ pro jisté $\delta > 0$, kde $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Věta 8.23:

Jsou-li splněny předpoklady věty 8.22, pak parciální derivace implicitně zadané funkce $z = f(\mathbf{x})$ jsou dány vztahem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.6)$$

Vztah (8.6) budeme stručně zapisovat ve tvaru

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.7)$$

Parciální derivace vyšších řádů získáme následným derivováním vztahu (8.6).

• **Příklad 8.24:** Uvažujme rovnici

$$\ln(x_1 + x_2 + x_3) + \ln z - z(x_1 + x_2 x_3) = 0.$$

Označme $F(x_1, x_2, x_3, z) = \ln(x_1 + x_2 + x_3) + \ln z - z(x_1 + x_2 x_3)$. Na okolí bodu $(0, 1, 0, 1)$ definuje rovnice $F(x_1, x_2, x_3, z) = 0$ implicitně nějakou funkci $z = f(x_1, x_2, x_3)$, protože $F(0, 1, 0, 1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial z}(x_1, x_2, x_3, z) = \frac{1}{z} - (x_1 + x_2 x_3)$, a tedy $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 1, 0, 1) = 1 \neq 0$. (Analogicky definuje daná rovnice implicitně i nějakou jinou funkci $z = g(x_1, x_2, x_3)$ na okolí bodu $(0, 0, 1, 1)$). Pro parciální derivace funkce f platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{1}{\frac{1}{z} - (x_1 + x_2 x_3)} - z.$$

Podobně

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{\frac{1}{z} - (x_1 + x_2 x_3)} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_3}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{\frac{1}{z} - (x_1 + x_2 x_3)} .$$

Konkrétně vyčíslit hodnoty těchto derivací umíme v bodě $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0)$, kdy bereme $z = f(0, 1, 0) = 1$. Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 1, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 1, 0) = -1 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 1, 0) = 0 .$$

Rovnici $F(x_1, x_2, x_3, z) = 0$ vyhovuje též bod $(1, 0, 0, 1)$, ale v tomto případě je $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 0, 0, 1) = 0$ a větu 8.22 nelze použít.

• **Příklad 8.25:** Ověřme, že rovnice $x^3 + y^3 - z^3 - 2xyz = 2$ definuje na okolí bodu $(1, 1, 0)$ nějakou plochu. Napišme rovnici tečné roviny k této ploše v bodě $(1, 1, 0)$ ležícím na této ploše.

Řešení: Upravme rovnici na tvar $F(x, y, z) = x^3 + y^3 - z^3 - 2xyz - 2 = 0$. Protože $F(1, 1, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = -3z^2 - 2xy$, a tedy $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 0) = -2 \neq 0$, definuje daná rovnice implicitně na okolí bodu $(1, 1, 0)$ nějakou funkci $z = f(x, y)$, jejíž graf je požadovaná plocha. Pro funkci f platí $f(1, 1) = 0$ a dále podle vztahu (8.6)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{3x^2 - 2yz}{3z^2 + 2xy} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{3y^2 - 2xz}{3z^2 + 2xy} .$$

Dosazením $x = 1$, $y = 1$ a $z = 0$ dostáváme $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{3}{2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{3}{2}$. Hledaná rovnice tečné roviny je tedy

$$z = \frac{3}{2}(x - 1) + \frac{3}{2}(y - 1) .$$

Cvičení 8.26: Napišme rovnici tečné roviny k ploše popsané rovnicí

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz + 3 = 0$$

v bodě $A = (1, 2, -2)$.

• **Příklad 8.27:** Ukažme, že rovnice

$$e^x + e^y - 2e^z + xyz = 0$$

definuje na okolí bodu $(0, 0, 0)$ implicitně funkci $z = f(x, y)$. Aproximujme tuto funkci Taylorovým polynomem $T_2(x, y)$.

Řešení: Označme $F(x, y, z) = e^x + e^y - 2e^z + xyz$.

Protože $F(0,0,0)=0$ a $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = -2 \neq 0$ (vypočtěte sami!), definuje daná rovnice na okolí bodu $(0,0,0)$ nějakou implicitní funkci $z = f(x, y)$. Pro její parciální derivace platí podle (8.7) vztahy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{e^x + yz}{-2e^z + xy} = \frac{e^x + yz}{2e^z - xy}, \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{e^y + xz}{-2e^z + xy} = \frac{e^y + xz}{2e^z - xy}. \quad (8.9)$$

Derivováním vztahů (8.8) a (8.9) získáme druhé parciální derivace implicitní funkce $z = f(x, y)$. (Proměnnou z , která v těchto vztazích vystupuje, musíme ovšem derivovat jako funkci proměnných x a y .) Dostáváme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(e^x + y \frac{\partial z}{\partial x})(2e^z - xy) - (e^x + yz)(2e^z \frac{\partial z}{\partial x} - y)}{(2e^z - xy)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(z + y \frac{\partial z}{\partial y})(2e^z - xy) - (e^x + yz)(2e^z \frac{\partial z}{\partial y} - x)}{(2e^z - xy)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(e^y + x \frac{\partial z}{\partial y})(2e^z - xy) - (e^y + xz)(2e^z \frac{\partial z}{\partial y} - x)}{(2e^z - xy)^2}.$$

Dosazením $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$ dostaneme postupně $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \frac{1}{2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = \frac{1}{4}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = -\frac{1}{4}$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = \frac{1}{4}$. Tedy

$$T_2(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}xy + \frac{1}{8}y^2.$$

• **Příklad 8.28:** Pomocí totálního diferenciálu vypočtěme přibližnou změnu objemu 1 molu plynu řídicího se stavovou rovnicí

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT,$$

kde a, b, R jsou konstanty, jestliže se tlak p změní o dp a teplota T o dT .

Řešení: Objem V je zadán danou rovnicí implicitně jako funkce tlaku a teploty, tj. $V = V(p, T)$. Pro přibližnou změnu objemu platí vztah

$$dV = \frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial T} dT.$$

Parciální derivace funkce V vypočteme podle věty 8.23. Označíme-li $F(p, T, V) = (p + \frac{a}{V^2})(V - b) - RT$, pak daná rovnice má tvar $F(p, T, V) = 0$ a

$$\frac{\partial V}{\partial p} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = - \frac{V - b}{-\frac{2a}{V^3}(V - b) + p + \frac{a}{V^2}} = \frac{(b - V)V^3}{2ab + pV^3 - aV},$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = - \frac{-R}{-\frac{2a}{V^3}(V - b) + p + \frac{a}{V^2}} = \frac{RV^3}{2ab + pV^3 - aV}.$$

Tedy

$$dV = \frac{(b - V)V^3}{2ab + pV^3 - aV} dp + \frac{RV^3}{2ab + pV^3 - aV} dT.$$

(Srovnajte tento příklad se cvičením 6.36, kdy jsme počítali změnu tlaku p v závislosti na změnách objemu V a teploty T . Tlak p , na rozdíl od objemu, lze ovšem z dané rovnice vyjádřit explicitně.)

• **Příklad 8.29:** Necht' rovnice $g\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y}\right) = 0$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, definuje implicitně funkci $z = f(x, y)$. Ověřme, že

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Řešení: Funkce z je implicitně určena rovnicí $F(x, y, z) = g\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{y}\right) = 0$. Tedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (8.10)$$

Protože ale funkce $F(x, y, z)$ je zadaná jako složená funkce, musíme její parciální derivace vyjádřit pomocí parciálních derivací funkce g , kterou konkrétně neznáme. Označme a, b proměnné funkce g a položme $a = \frac{y}{x}$ a $b = \frac{z}{y}$. Potom

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a} \left(-\frac{y}{x^2}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial a} \frac{1}{x} + \frac{\partial g}{\partial b} \left(-\frac{z}{y^2}\right) \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial b} \frac{1}{y}.$$

Dosazením těchto vztahů pro parciální derivace funkce F do vztahu (8.10) a úpravou dostaneme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial g}{\partial a} \frac{y^2}{x^2}}{\frac{\partial g}{\partial b}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial a} \frac{y}{x} + \frac{\partial g}{\partial b} \frac{z}{y}}{\frac{\partial g}{\partial b}}.$$

Dále se již snadno dosazením ověří, že tyto derivace splňují danou rovnici.

Vyšší parciální derivace implicitně zadané funkce lze s výhodou také počítat tak, že derivujeme přímo danou rovnicí. (Stejně jsme postupovali v příkladě 8.14 při počítání derivací funkce jedné proměnné, viz též poznámku 8.13.)

• **Příklad 8.30:** Ukažme, že rovnice $z^3 + xy + xyz - 1 = 0$ definuje na okolí bodu $(0, 0, 1)$ implicitně nějakou funkci $z = f(x, y)$. Aproximujme tuto funkci Taylorovým polynomem $T_2(x, y)$.

Řešení: Označme $F(x, y, z) = z^3 + xy + xyz - 1 = 0$. Protože $F(0, 0, 1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) = 3 \neq 0$ (vypočítejte sami!), definuje daná rovnice na okolí bodu $(0, 0, 1)$ nějakou implicitní funkci $z = f(x, y)$. Derivováním dané rovnice podle x a y dostaneme

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y + yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0 ,$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + x + xz + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0 .$$

Derivováním první z těchto rovnic podle x a y a druhé rovnice podle y pak dostaneme

$$6z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 ,$$

$$6z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 1 + z + y \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 ,$$

$$6z \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 3z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

Postupným dosazováním $x = 0$, $y = 0$ a $z = 1$ dostaneme potřebné parciální derivace výpočtem z pěti získaných rovnic

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 0 , \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0) = 0 , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 0) = 0 , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) = -\frac{2}{3} , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 0) = 0 .$$

Tedy hledaný Taylorův polynom má tvar $T_2(x, y) = 1 - \frac{2}{3}xy$.

8.2.1 Normálový vektor k ploše

Podobně jako jsme ve větě 8.19 ukázali, jak vypadá normálový vektor ke křivce zadané rovnicí $F(x, y) = 0$, ukážeme v následující větě, jak vypadá normálový vektor k ploše zadané rovnicí $F(x, y, z) = 0$.

Věta 8.31:

Nechť je dána rovnice $F(x, y, z) = 0$ a bod (x_0, y_0, z_0) , který ji splňuje, tj. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Nechť alespoň jedno z čísel $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ nebo $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$ je nenulové, tj. $\text{grad}F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. Potom body (x, y, z) z okolí bodu (x_0, y_0, z_0) , které splňují rovnici $F(x, y, z) = 0$, tvoří jistou plochu procházející bodem (x_0, y_0, z_0) , jejíž normálový vektor v tomto bodě je právě vektor $\text{grad}F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right)$.

Důkaz:

Předpoklad $\text{grad}F(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$ zaručuje podle věty 8.22, že všechna řešení rovnice $F(x, y, z) = 0$ z jistého okolí bodu (x_0, y_0, z_0) tvoří skutečně plochu (která je grafem nějaké funkce dvou proměnných) a má tedy smysl mluvit o jejím normálovém vektoru, tj. normálovém vektoru tečné roviny. Nechť např. $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Pak část křivky $F(x, y, z) = 0$ na okolí bodu (x_0, y_0, z_0) je grafem nějaké funkce $z = f(x, y)$ implicitně zadané rovnicí $F(x, y, z) = 0$. Parciální derivace k_1 a k_2 podle x a y této funkce v bodě (x_0, y_0) , jsou podle věty 8.23 dány vztahy

$$k_1 = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{a} \quad k_2 = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Odtud z definice 6.37 tečné roviny dostáváme, že vektor $(k_1, k_2, -1)$ je hledaným normálovým vektorem. Tento vektor je ale nenulovým násobkem vektoru $\text{grad}F(x_0, y_0, z_0)$. ■

• **Příklad 8.32:** Řešme znovu příklad 8.25 s využitím věty 8.31.

Řešení: Omezíme se pouze na nalezení rovnice tečné roviny, vše ostatní je analogické. Protože $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1, 0) = 3$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1, 0) = 3$ a $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 0) = -2$, je vektor $(3, 3, -2)$ normálovým vektorem k dané ploše v bodě $(1, 1, 0)$. Proto rovnice tečné roviny bude mít tvar $3x + 3y - 2z = d$, kde konstantu d určíme tak, aby tečná rovina procházela bodem $(1, 1, 0)$. Tedy nutně $d = 6$ a hledaná rovnice tečné roviny je $3x + 3y - 2z = 6$, což souhlasí s výsledkem příkladu 8.25.

Návody ke cvičením z kap. 8

8.8 Dosadte hodnoty $x = 0.95$ ($x = 1.05$) do dané rovnice a vzniklou rovnici pro y řešte Newtonovou metodou.

8.16 Ověřte předpoklady věty 8.11 a vypočtěte derivaci $f'(1)$, která je směrnicí hledané tečny.

- 8.18** a) Volte $x = 0$ a za y vhodné násobky π . Ověřte předpoklady věty 8.4.
b) Podle věty 8.11 vypočtete $f'(x_0)$ a dalším derivováním $f''(x_0)$. Rozhodněte podle znaménka 1. a 2. derivace.
c) Využijte znalost hodnot $f(x_0)$, $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.
d) Do dané rovnice dosadte hodnotu $x = x_0 + 0.2$ a dostanete rovnici pro neznámou y .
- 8.26** Ukažte podle věty 8.22, že daná rovnice definuje na okolí bodu A implicitně funkci $z = f(x, y)$. Podle věty 8.23 vypočtete parciální derivace této funkce. Hledaná rovina je tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě A .

Kapitola 9

Aplikace integrálů funkcí jedné proměnné

9.1 Riemannova definice určitého integrálu

V kapitole 8 skript [MI] jsme definovali určitý integrál pomocí primitivní funkce vztahem

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) , \quad (9.1)$$

kde F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$, tj. pro $x \in \langle a, b \rangle$ platí $F'(x) = f(x)$. Takto definovaný určitý integrál se nazývá **Newtonův určitý integrál** a značí se někdy symbolem

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \, dx .$$

Dále připomeňme, že pro funkci f nezápornou na intervalu $\langle a, b \rangle$ znamená číslo $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \, dx$ plošný obsah obrazce omezeného osou x , grafem funkce f a přímkami $x = a$, $x = b$. V následujícím textu uvedeme jinou definici určitého integrálu, tzv. **Riemannovu** definici určitého integrálu. Podáme její zjednodušenou verzi, která většinou postačí pro naše úvahy.

Definice 9.1: Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b \rangle$ na n stejných dílků dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, tj.

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n} , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n .$$

v každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ zvolme libovolně bod c_i , tj. $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Položme

$$S_n(f) = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(c_n)(x_n - x_{n-1}) , \quad \text{tj.}$$

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i , \quad (9.2)$$

kde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$, $i = 1, 2, \dots, n$. **Riemannovým integrálem** funkce f od a do b rozumíme číslo

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) . \quad (9.3)$$

• **Poznámka 9.2:** Veličinu

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme **Riemannovým integrálním součtem (sumou)** funkce f , určeným dělicími body $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Hodnota $S_n(f)$ zřejmě obecně závisí na volbě bodů $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Aby tedy předchozí definice měla smysl, je nutné ukázat, že výsledná hodnota integrálu, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)$, již na této volbě nezávisí. To tvrdí následující věta.

Poznamenejme ještě, že při dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ na n dílků bychom měli přesněji označovat dělicí body symbolem x_i^n , protože jejich hodnota závisí na zvoleném n , a podobně i místo c_i psát přesněji $c_i^n \in \langle x_{i-1}^n, x_i^n \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Z důvodu přehlednosti zápisu však tento horní index n nebudeme používat.

Věta 9.3:

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)$ vždy existuje a její hodnota nezávisí na volbě bodů $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$.

Větu 9.3 nebudeme dokazovat. Pro její důkaz bychom museli zavést některé další pojmy z teorie spojitých funkcí. V dalším si však ukážeme jinou formulaci této věty, kterou později využijeme v některých důkazech.

Věta 9.4:

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b \rangle$ na n stejných dílků dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Zvolme $\underline{c}_i, \bar{c}_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ tak, že $f(\underline{c}_i) = \min\{f(x); x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}$ a $f(\bar{c}_i) = \max\{f(x); x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle\}$. Pak pro

$$\underline{S}_n(f) = \sum_{i=1}^n f(\underline{c}_i)(x_i - x_{i-1}),$$

tzv. dolní Riemannův součet, a pro

$$\bar{S}_n(f) = \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i)(x_i - x_{i-1}),$$

tzv. horní Riemannův součet, platí:

$$\underline{S}_n(f) \leq S_n(f) \leq \bar{S}_n(f) \tag{9.4}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f), \tag{9.5}$$

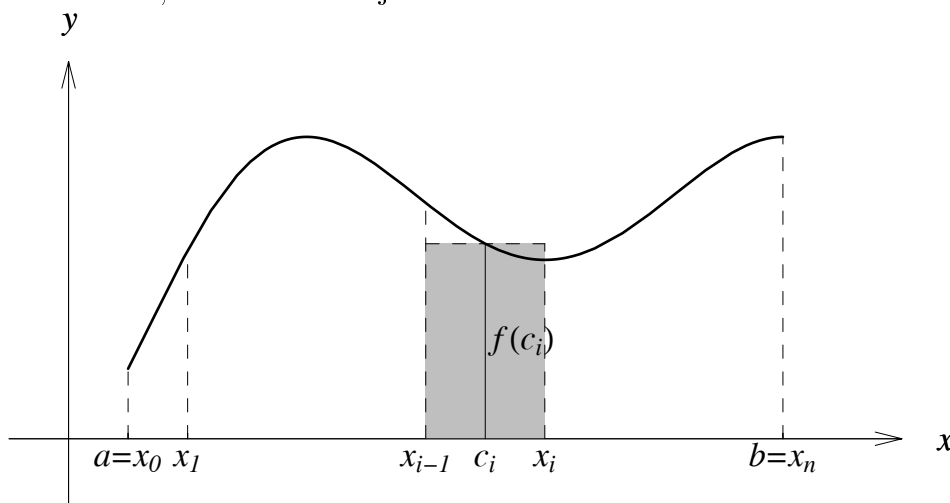
kde $S_n(f)$ značí libovolný Riemannův součet funkce f .

• **Poznámka 9.5:** Vztah (9.4) plyne zřejmě z volby bodů $\underline{c}_i, \bar{c}_i$, viz též poznámku 9.7. Vztah (9.5) je jen jinou formulací tvrzení věty 9.3.

• **Poznámka 9.6:** Riemannův integrál lze zavést i pro nespojitě funkce. V tomto případě je ale právě třeba v definici integrálu požadovat nezávislost hodnoty $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)$

na volbě bodů $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Navíc je třeba uvažovat ne pouze ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, tj. dělení na stejně velké dílky, ale všechna taková dělení $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ intervalu $\langle a, b \rangle$, že délky všech podintervalů tohoto dělení konvergují k 0 pro $n \rightarrow \infty$.

• **Poznámka 9.7:** Ukážeme, že číslo $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx$ opět znamená (pro funkci f nezápornou a spojitou na $\langle a, b \rangle$) plošný obsah P obrazce ohraničeného grafem funkce f , osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Situace je znázorněna na obr. 9.1.

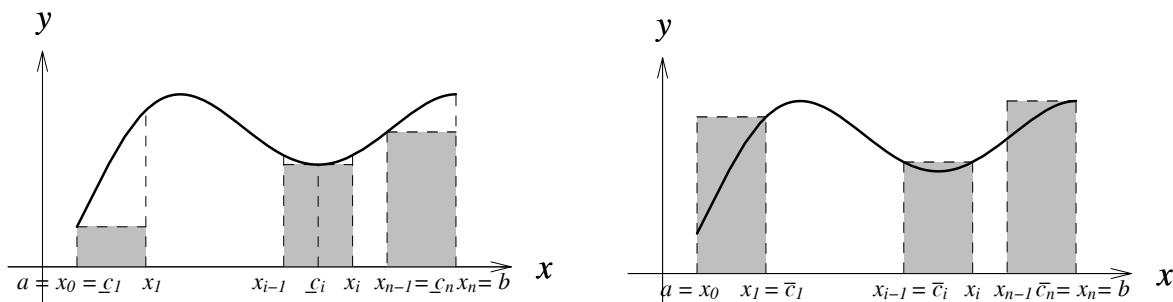


Obrázek 9.1:

Každý sčítanec v Riemannově součtu (9.2) lze interpretovat jako plochu obdélníka. Na obr. 9.1 je vystínován i -tý obdélník, jehož rozměry jsou $(x_i - x_{i-1})$ a $f(c_i)$. Zřejmě Riemannův součet $S_n(f)$ aproximuje velikost plochy obrazce ohraničeného osou x , grafem funkce f a přímkami $x = a$, $x = b$. Obecně tato aproximace bude tím lepší, čím větší bude číslo n , tj. čím větší bude počet dílků, na něž rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$. Požadované tvrzení o velikosti plochy P plyne okamžitě z věty 9.4. Pro dolní a horní Riemannovy součty funkce f totiž platí

$$\underline{S}_n(f) = \sum_{i=1}^n f(\underline{c}_i)(x_i - x_{i-1}) \leq P \leq \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i)(x_i - x_{i-1}) = \overline{S}_n(f),$$

viz. obr. 9.2.



Obrázek 9.2:

Ale podle věty 9.4 je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n(f) = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) \, dx \quad , \text{ a tedy nutně } P = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) \, dx \, .$$

• **Poznámka 9.8:** Nyní máme dvě různé definice určitého integrálu, Newtonovu a Riemannovu. Následující věta říká, že pro spojitě funkce, kdy oba integrály existují, je jedno, kterou definici použijeme. Hodnoty Riemannova a Newtonova určitého integrálu spojitě funkce jsou stejné. (Pro nespojitě funkce se může stát, že podle jedné definice integrál existuje a podle druhé neexistuje. Existují-li však oba integrály, jsou jejich hodnoty i v tomto případě stejné.)

Věta 9.9:

Je-li f funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak existují integrály $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) \, dx$ a $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \, dx$ a jejich hodnoty jsou stejné. Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = F(b) - F(a) \, , \quad (9.6)$$

kde F je primitivní funkce k funkci f .

Důkaz:

Ukážeme pouze, že $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) \, dx = (\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \, dx$, pokud oba integrály existují podle příslušných definic. V důkazu podstatně využijeme toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)$ nezávisí na volbě hodnot $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Je-li dáno dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ na n dílků $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a je-li F primitivní funkce k funkci f na $\langle a, b \rangle$, pak

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \, dx &= F(b) - F(a) \\ &= (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \dots + (F(x_1) - F(x_0)) \\ &= \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= S_n(f) \, , \end{aligned}$$

kde $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ volíme podle věty o střední hodnotě diferenciálního počtu tak, aby $(F(x_i) - F(x_{i-1})) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$. Pro tuto volbu c_i je tedy pro každé n $S_n(f) = (\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \, dx$ a tedy

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = (\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \, dx \, .$$

■

Úmluva: V dalším budeme pracovat pouze se spojitými funkcemi, pro něž oba integrály existují a pro něž tedy platí

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) \, dx = (\mathcal{N}) \int_a^b f(x) \, dx .$$

Z tohoto důvodu budeme symboly (\mathcal{R}) a (\mathcal{N}) před integrálem vynechávat.

• **Příklad 9.10:** Pomocí Riemannovy definice určitého integrálu vypočtete $\int_0^1 x^2 \, dx$.

Řešení: Interval $\langle 0, 1 \rangle$ rozdělme na n stejných dílků. Dělicí body pak budou

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \quad \dots, \quad x_n = 1 .$$

Zvolme např. $c_i = \frac{i}{n} \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Protože $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$, má Riemannova suma pro funkci $f(x) = x^2$ tvar

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 .$$

Ze střední školy známe vzorec (lze jej dokázat matematickou indukcí)

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Po dosazení do $S_n(f)$ dostaneme

$$S_n(f) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a odtud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3} .$$

(Vypočtete tuto limitu sami!) Dostali jsme tedy výsledek $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$. Ilustrujme si ještě větu 9.4 na tomto příkladě. Zřejmě volba $c_i = \frac{i}{n} = x_i$ je volba těch $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, ve kterých nabývá funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$ svého maxima. Tedy

$$\int_0^1 x^2 \, dx \leq \overline{S}_n(f) = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Naopak volba $c_i = \frac{i-1}{n} = x_{i-1}$ je volba těch $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, ve kterých nabývá funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$ svého minima. Tedy

$$\begin{aligned} \underline{S}_n(f) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} . \end{aligned}$$

Odtud

$$\int_0^1 x^2 dx \geq \underline{S}_n(f) = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Opět ovšem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Vidíme, že

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n(f) = \frac{1}{3}.$$

Pomocí primitivní funkce lze ovšem daný integrál vypočítat velmi snadno:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Cvičení 9.11: Pomocí Riemannovy definice integrálu vypočítejte $\int_0^1 x dx$. Jednou volte za c_i střed intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, podruhé volte $c_i = x_{i-1}$. Nakreslete si obrázky pro obě volby bodů c_i pro $n = 3$.

• **Poznámka 9.12:** Z příkladu 9.10 je vidět, že výpočet integrálu podle Riemannovy definice je i pro tak jednoduchou funkci jako je $f(x) = x^2$ nepoměrně složitější než výpočet pomocí Newtonovy definice. Vystává tedy přirozená otázka, proč zavádíme Riemannovu definici integrálu. Není to zbytečná komplikace? Uvedeme dva důvody, proč je Riemannova definice integrálu potřebná.

První důvod

Naši definici Riemannova integrálu lze snadno zobecnit tak, že podle ní mají Riemannův integrál i funkce, které nejsou spojité a které nemají Newtonův integrál. Tento důvod není pro nás příliš podstatný, neboť nebudeme s takovými funkcemi pracovat.

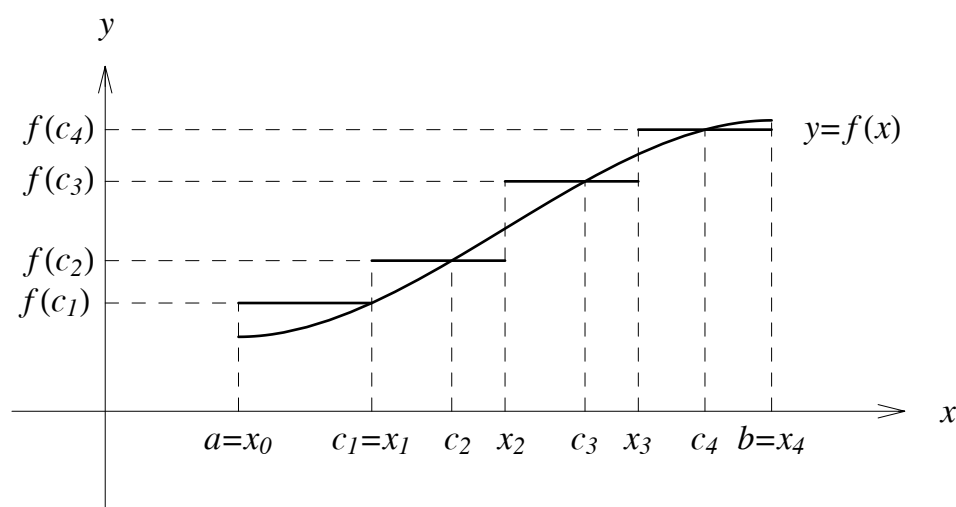
Pro praktický výpočet to znamená, že budeme integrál počítat výhradně pomocí Newtonovy definice za předpokladu, že dovedeme zjistit příslušnou primitivní funkci. Jestliže příslušnou primitivní funkci spočítat neumíme, pak k výpočtu určitého integrálu musíme použít některou numerickou metodu (např. lichoběžníkovou metodu, viz skripta [MI]). Uvědomte si, že základní myšlenky numerických metod vycházejí z Riemannovy definice určitého integrálu.

Druhý důvod

Pro výpočet určitého integrálu je tedy jednoznačně výhodnější Newtonova definice. Avšak při řešení různých geometrických, fyzikálních a jiných aplikovaných úloh je Riemannova definice integrálu základním pracovním nástrojem, bez něhož se nelze obejít. Tedy, Riemannova definice integrálu nám umožní převést řešený problém na výpočet určitého integrálu z nějaké funkce. Hodnotu tohoto integrálu pak stanovíme pomocí Newtonovy definice.

Riemannova definice nám slouží k matematickému popisu daného problému pomocí určitého integrálu. Newtonova definice nám umožňuje konkrétní výpočet získaných integrálů.

• **Poznámka 9.13:** Dříve než přistoupíme k vlastním aplikacím určitého integrálu, zdůrazněme základní myšlenku Riemannovy definice určitého integrálu. Ta spočívá v tom, že danou funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$ nahradíme funkcí, která je po částech konstantní, tj. na každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ nahradíme funkci $y = f(x)$ konstantní funkcí $y = f(c_i)$, viz obr. 9.3. Tento postup nám v aplikovaných úlohách rozhodujícím způsobem usnadňuje úvahy a dovoluje nám odvodit příslušné vztahy a vzorce.



Obrázek 9.3:

9.2 Geometrické aplikace

(i) Plocha ohraničená grafy funkcí

Tato situace byla vyšetřena již ve skriptech [MI].

(ii) Plošný obsah obrazce zadaného v polárních souřadnicích

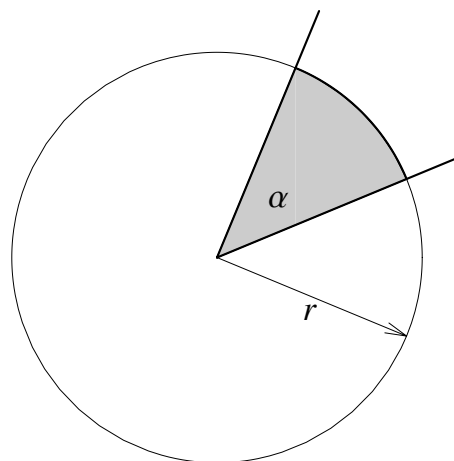
Bud' $r = f(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$, rovnice křivky v polárních souřadnicích, viz odstavec 7.5 ve skriptech [MI]. Budeme se zabývat výpočtem plošného obsahu obrazce A , omezeného polopřímkami o rovnicích $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (v polárních souřadnicích!) a uvažovanou křivkou, viz obr. 9.5. Budeme předpokládat, že $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Připomeňme si nejdříve, že pro plošný obsah P kruhové výseče, která přísluší středovému úhlu o velikosti α (rad), platí vzorec:

$$P = \frac{1}{2}r^2\alpha ,$$

kde r je poloměr příslušné kružnice, viz obr. 9.4.

Pro pevné r je totiž plošný obsah kruhové výseče přímo úměrný velikosti středového úhlu α . Protože plocha celého kruhu má velikost πr^2 a odpovídá středovému úhlu 2π , je plošný obsah P kruhové výseče se středovým úhlem α dán vztahem

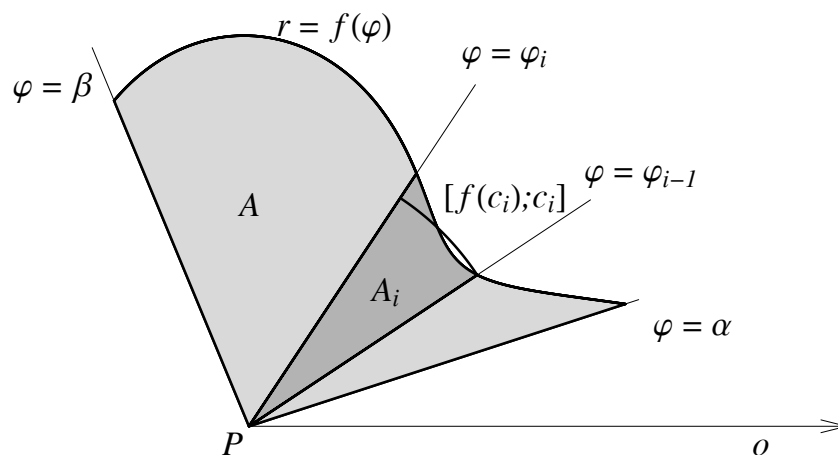
$$P = \pi r^2 \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \alpha .$$



Obrázek 9.4:

K odvození vzorce pro plošný obsah obrazce A použijeme Riemannovu definici integrálu. Rozdělme interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ na n dílků dělicími body $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$.

Tomuto rozdělení intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ odpovídá rozdělení obrazce A na části A_i , které leží ve výsečích určených polopřímkami o rovnicích $\varphi = \varphi_{i-1}$, $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$. Na obr. 9.5 je i -tá část A_i vystínována tmavě.



Obrázek 9.5:

V intervalu $\langle \varphi_{i-1}, \varphi_i \rangle$ zvolme bod $c_i \in \langle \varphi_{i-1}, \varphi_i \rangle$. Bodu c_i odpovídá bod na křivce o polárních souřadnicích $[f(c_i), c_i]$, kde $f(c_i)$ je polární poloměr a c_i polární úhel. Funkci $r = f(\varphi)$ nahradíme v intervalu $\langle \varphi_{i-1}, \varphi_i \rangle$ konstantní funkcí $r = f(c_i)$, $i = 1, \dots, n$, viz poznámka 9.13.

Plošný obsah obrazce A_i pak můžeme aproximovat plošným obsahem kruhové výseče o poloměru $f(c_i)$ a středovém úhlu $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, tedy číslem

$$\frac{1}{2} f^2(c_i) \Delta\varphi_i ,$$

viz obr. 9.5. Plošný obsah P celého obrazce A lze pak aproximovat součtem ploch jednotlivých obrazců A_i , $i = 1, \dots, n$, tj. číslem

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(c_i) \Delta\varphi_i . \tag{9.7}$$

Pro hledaný plošný obsah P pak platí

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(c_i) \Delta\varphi_i . \quad (9.8)$$

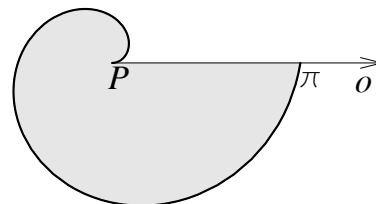
Protože výraz (9.7) je **Riemannovým součtem** funkce $\frac{1}{2}f^2(\varphi)$ na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, dostáváme ze vztahů (9.7) a (9.8) hledaný vzorec pro plošný obsah P obrazce A :

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) \, d\varphi . \quad (9.9)$$

• **Příklad 9.14:** Vezměme Archimedovu spirálu $r = \frac{1}{2}\varphi$. Určeme plošný obsah obrazce, který je omezen prvním závitem Archimedovy spirály a příslušnou částí polární osy, viz obr. 9.6.

Řešení: Podle vzorce (9.9) dostáváme

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2 \, d\varphi = \frac{1}{8} \left[\frac{\varphi^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^3}{3} .$$



Obrázek 9.6:

• **Příklad 9.15:** Křivka $r = \sin 2\varphi$ má tvar "dvojlístku". Vypočteme plošný obsah P jednoho lístku.

Řešení: Hodnoty polárního úhlu odpovídající prvnímu lístku leží v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Aplikací vzorce (9.9) dostáváme

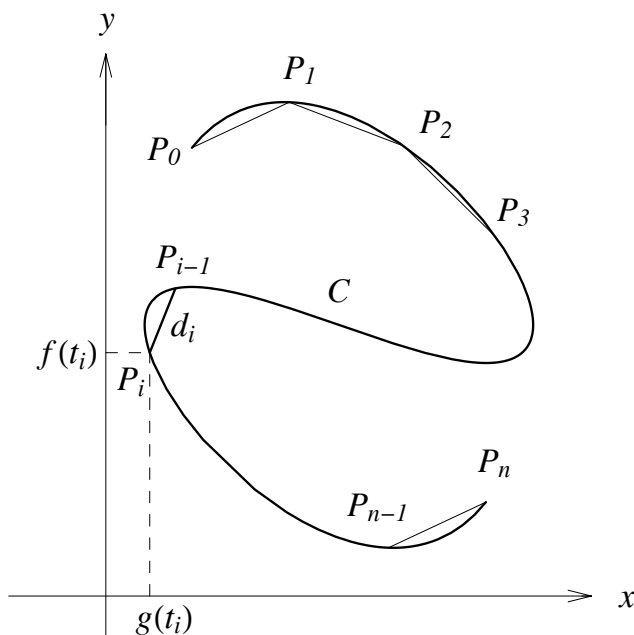
$$P = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{1}{4} \left[\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} .$$

Cvičení 9.16: Vypočtěte plošný obsah obrazce omezeného křivkou, která je v polárních souřadnicích zadána rovnicí $r = \cos 3\varphi$ ("trojlístek").

(iii) Délka křivky

Uvažujme křivku C , zadanou parametrickými rovnicemi (viz kapitola 7 ve skriptech [MI])

$$x = g(t) , \quad y = f(t) , \quad t \in \langle a, b \rangle . \quad (9.10)$$



Obrázek 9.7:

Nyní budeme definovat délku této křivky (viz obr. 9.7). Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělme dělicími body $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Buď bod P_i bod křivky C o souřadnicích $[g(t_i), f(t_i)]$ a označme d_i délku úsečky $\overline{P_{i-1}P_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Délku l křivky C položíme rovnu číslu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n d_i . \quad (9.11)$$

Křivku C jsme aproximovali lomenou čarou $P_0P_1 \dots P_n$ a délku křivky C jsme aproximovali délkou příslušné lomené čáry, kterou ale dovedeme stanovit. Ze vzorce pro vzdálenost dvou bodů v rovině dostaneme pro d_i vztah

$$d_i = \sqrt{[g(t_i) - g(t_{i-1})]^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2} . \quad (9.12)$$

Použijeme-li na funkce $g(t)$, $f(t)$ a interval $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ větu o střední hodnotě diferenciálního počtu, dostaneme:

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(c_i)(t_i - t_{i-1}), \quad c_i \in (t_{i-1}, t_i) , \quad (9.13)$$

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\tilde{c}_i)(t_i - t_{i-1}), \quad \tilde{c}_i \in (t_{i-1}, t_i) . \quad (9.14)$$

Po dosazení vztahů (9.13) a (9.14) do vztahů (9.11) a (9.12) a jednoduché algebraické úpravě dostaneme

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{[g'(c_i)]^2 + [f'(\tilde{c}_i)]^2} (t_i - t_{i-1}) . \quad (9.15)$$

Kdyby platila rovnost $c_i = \tilde{c}_i$, pro $i = 1, \dots, n$, pak by výraz na pravé straně rovnosti (9.15) byl Riemannovým integrálním součtem funkce $\sqrt{[g'(t)]^2 + [f'(t)]^2}$ a pro délku křivky

C pak dostaneme vzorec

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n d_i = \int_a^b \sqrt{[g'(t)]^2 + [f'(t)]^2} dt . \quad (9.16)$$

Složitějšími matematickými prostředky se dá dokázat, že vztah (9.16) platí i v případě, kdy $c_i \neq \tilde{c}_i$. Hledaný vzorec pro délku parametricky zadané křivky má tedy tvar:

$$l = \int_a^b \sqrt{[g'(t)]^2 + [f'(t)]^2} dt . \quad (9.17)$$

Zdůrazněme ještě, že meze a, b v integrálu ve vztahu (9.17) jsou meze pro hodnoty parametru t .

• **Příklad 9.17:** Pomocí vzorce (9.17) stanovme délku kružnice o poloměru $r > 0$.

Řešení: Víme, že parametrické rovnice kružnice mají tvar

$$\begin{aligned} x &= r \cos t = g(t) \\ y &= r \sin t = f(t) , \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle . \end{aligned}$$

Podle (9.17) dostáváme známý vzorec pro délku kružnice:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = r \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r .$$

Cvičení 9.18: Vypočítejte délku křivky $x = t^2$, $y = t^3$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$.

• **Poznámka 9.19:** Ze vzorce (9.17) lze snadno odvodit vzorec pro délku křivky, která je grafem funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Graf funkce $y = f(x)$ lze parametrizovat rovnicemi

$$x = t = g(t) , \quad y = f(t) , \quad t \in \langle a, b \rangle . \quad (9.18)$$

Po dosazení (9.18) do vzorce (9.17) obdržíme vzorec pro délku křivky, která je grafem funkce $y = f(x)$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx . \quad (9.19)$$

• **Příklad 9.20:** Počítejme opět délku kružnice o poloměru $r > 0$. K výpočtu tentokrát využijeme polokružnici, která je grafem funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r, r \rangle$.

Délka kružnice se tedy rovná

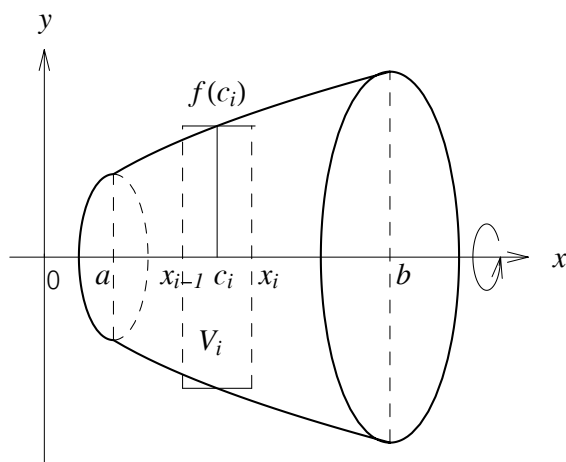
$$\begin{aligned} l &= 2 \int_{-r}^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx = 2r \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2r \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \\ &= 2r [\arcsin t]_{-1}^1 = 2\pi r . \end{aligned}$$

• **Příklad 9.21:** Určeme délku oblouku paraboly $y = x^2$ pro $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

Řešení: Podle vzorce (9.19) dostáváme:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} \, dx = 2 \int_0^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \, dx = 2 \left[\frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right) \right) \right]_0^2 \\ &= 2 \frac{17}{4} + \frac{1}{4} \ln \left(2 + \sqrt{\frac{17}{4}} \right) - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} \doteq 4.647 . \end{aligned}$$

(iv) Objem rotačního tělesa



Obrázek 9.8:

Nechť je dána spojitá nezáporná funkce f definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$. Uvažujme plošný obrazec ohraničený grafem funkce f , přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x . Rotací tohoto obrazce kolem osy x vznikne rotační těleso, viz obr. 9.8. Naším úkolem je odvodit vzorec pro objem tohoto tělesa.

Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme dělicími body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a uvažujme i -tý interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$.

Vyberme libovolně bod c_i v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a na tomto intervalu nahradíme funkci f konstantní funkcí $y = f(c_i)$. Obrazec omezený grafem této konstantní funkce, přímkami $x = x_{i-1}$, $x = x_i$ a osou x je obdélník a jeho rotací kolem osy x vznikne válec o výšce $v = x_i - x_{i-1}$ a poloměru podstavy $r = f(c_i)$. Objem V_i tohoto válce je tedy dán vztahem

$$V_i = \pi f^2(c_i)(x_i - x_{i-1}) .$$

Pro objem V celého rotačního tělesa pak platí:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n V_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi f^2(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx ,$$

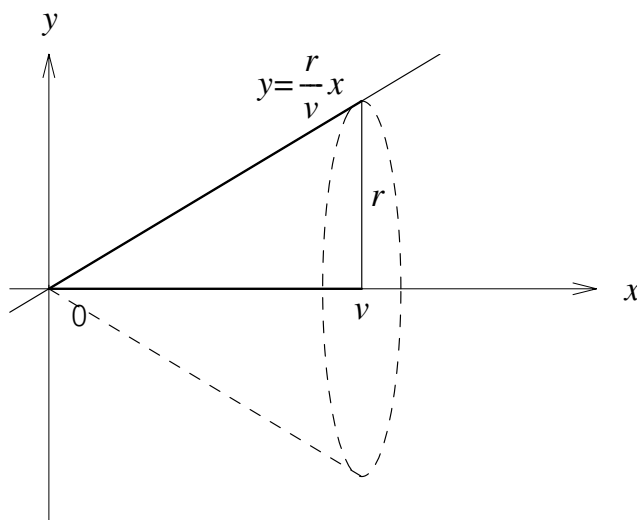
protože výraz $\sum_{i=1}^n \pi f^2(c_i)(x_i - x_{i-1})$ je integrální Riemannovou sumou pro funkci $y = f^2(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Shrnutí: Objem V rotačního tělesa, které vznikne výše popsaným způsobem, je dán vzorcem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx . \tag{9.20}$$

- **Příklad 9.22:** Odvodme vzorec pro objem kužele o výšce v a poloměru podstavy r .

Řešení: Kužel je rotační těleso, které vznikne rotací trojúhelníka znázorněného na obr. 9.9.



Obrázek 9.9:

Funkce f je v našem případě dána vztahem $f(x) = \frac{r}{v}x$ pro $x \in \langle 0, v \rangle$. Ze vztahu (9.20) dostáváme vzorec pro objem kužele

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{1}{3}\pi r^2 v .$$

9.3 Fyzikální aplikace

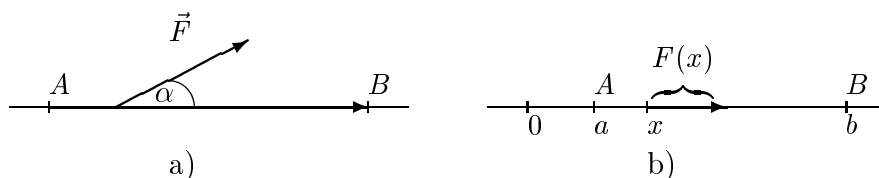
(i) Práce síly

Ze střední školy známe vzorec pro velikost práce W , kterou vykoná konstantní síla \vec{F} , působící po úsečce AB ve směru od bodu A do bodu B :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB} = |\vec{F}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha , \quad (9.21)$$

kde $|\vec{F}|$ znamená velikost síly, $|\vec{AB}|$ délku úsečky AB a α je úhel, který svírá síla \vec{F} s úsečkou \vec{AB} , viz obr. 9.10.

Vzorec (9.21) lze použít pro výpočet práce pouze tehdy, je-li síla \vec{F} konstantní podél celé úsečky \vec{AB} . V případě proměnné síly je třeba pro výpočet použít integrál.



Obrázek 9.10:

Pro zjednodušení budeme uvažovat sílu \vec{F} rovnoběžnou s úsečkou AB , tj. síla \vec{F} působí ve směru dráhy. Úsečku AB umístíme na osu x tak, že body A, B mají souřadnice a , resp. b , $a < b$. Velikost síly \vec{F} v bodě $x \in \langle a, b \rangle$ označíme $F(x)$, viz obr. 9.10. (Síla $F(x) > 0$ působí-li v bodě x ve směru od A do B , v opačném případě je $F(x) < 0$.) O funkci $F(x)$ předpokládáme, že je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Pro určení práce proměnné síly $F(x)$ po dráze od a do b uijeme Riemannovy definice integrálu. Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme dělicími body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ na n stejných dílků. Jestliže je velikost těchto dílků dostatečně malá, můžeme předpokládat, že síla \vec{F} je skoro konstantní na každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Její velikost pak můžeme na každém takovém intervalu nahradit hodnotou $F(c_i)$, kde $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ je libovolně vybraný bod. Potom práci síly \vec{F} na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ můžeme aproximovat hodnotou W_i , kde

$$W_i = F(c_i)(x_i - x_{i-1}) ,$$

podle vzorce (9.21). Celkovou práci síly \vec{F} na intervalu $\langle a, b \rangle$ je pak možno aproximovat součtem

$$\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n F(c_i)(x_i - x_{i-1}) . \quad (9.22)$$

Výraz na pravé straně ve vztahu (9.22) je Riemannovým integrálním součtem funkce $F(x)$. Velikost celkové práce W je pak dána vztahem

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_i = \int_a^b F(x) dx . \quad (9.23)$$

• **Příklad 9.23:** Zeměkoule působí na hmotný bod o hmotnosti m , který je ve výšce x nad povrchem zemským, gravitační silou

$$F(x) = \frac{\kappa m M}{(R + x)^2} ,$$

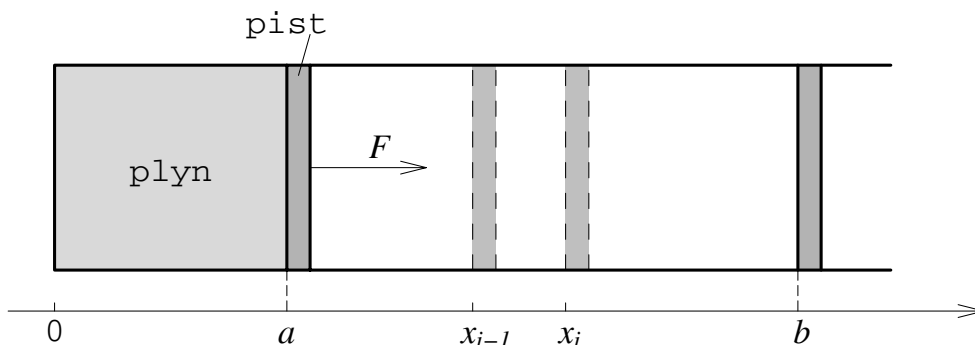
kde M je hmotnost zeměkoule a R je její poloměr. Určete práci, která je potřebná k vyzvednutí tělesa o hmotnosti m z povrchu zemského do výšky $x = R$.

Řešení: Podle vztahu (9.23) pro tuto práci platí:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^R F(x) dx = \int_0^R \frac{\kappa m M}{(R + x)^2} dx = \kappa m M \int_0^R \frac{dx}{(R + x)^2} \\ &= \kappa m M \left[\frac{-1}{R + x} \right]_0^R = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = \frac{\kappa m M}{2R} . \end{aligned}$$

(ii) Práce plynu

Představme si plyn, uzavřený ve válci pod pístem, který se pohybuje bez tření, viz obr. 9.11.

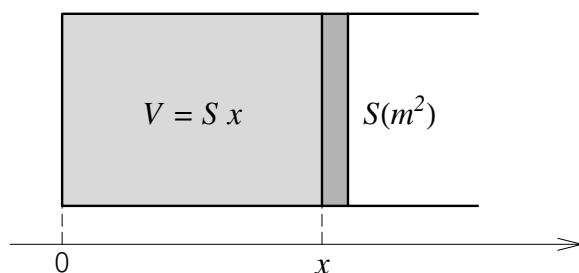


Obrázek 9.11:

Poloha pístu je určena souřadnicí na ose x . Nechť plošný obsah pístu je S (m^2). Předpokládejme, že se plyn rozpíná při konstantní teplotě, tj. jedná se o izotermickou expanzi. Plyn působí silou na píst, který se vlivem této síly posunuje doprava, a tím plyn koná práci. Naším cílem je získat vzorec pro výpočet práce plynu. Je třeba si uvědomit, že při pohybu pístu se mění tlak plynu, a tedy i celková tlaková síla, působící na píst. Při našem uspořádání je objem plynu ve válci, omezeném pístem v poloze x , roven

$$V = S \cdot x, \quad (9.24)$$

viz obr. 9.12.



Vztah (9.24) vyjadřuje vzájemně jednoznačnou relaci mezi "objemovou" proměnnou V a "délkovou" proměnnou x . Jinak řečeno, objem V je funkcí polohy pístu x .

Obrázek 9.12:

Nyní na chvíli odbočíme od našeho hlavního cíle a vyřešíme nejdříve jednodušší úlohu, kdy je tlak plynu na píst konstantní, tj. nezáleží na poloze pístu. Předpokládejme tedy, že tlak p plynu je konstantní. Pak celková síla, kterou plyn působí na píst je rovna

$$F = p \cdot S, \quad (9.25)$$

neboť tlak je definován jako síla připadající na jednotku plochy. Práce této síly po dráze $s = b - a$, tj. při přemístění pístu z polohy $x = a$ do polohy $x = b$ je rovna

$$W = F(b - a) = pS(b - a) = pSb - pSa = pV_b - pV_a = p(V_b - V_a) = p\Delta V, \quad (9.26)$$

kde $\Delta V = V_b - V_a$ je přírůstek objemu rozpínajícího se plynu. Tedy práce při konstantním tlaku je rovna součinu tlaku a přírůstku objemu. Při odvození vztahu (9.26) není integrál zapotřebí. Avšak je-li tlak plynu proměnný, pak při odvození vzorce pro práci plynu je třeba použít integrál, jak ukážeme v následujícím textu.

Nyní budeme předpokládat, že tlak plynu ve válci s pístem závisí na poloze pístu, neboli na objemu ve válci omezeného pístem, tj.

$$p = p(V). \quad (9.27)$$

Rozdělme interval $\langle a, b \rangle$ dělicími body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ na intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, viz obr. 9.11. Předpokládáme, že délka každého intervalu je tak malá, že při přemístění pístu z bodu x_{i-1} do bodu x_i se tlak plynu prakticky nezmění, a je tedy na i -tém intervalu roven číslu $p(V_{i-1})$, kde $V_{i-1} = Sx_{i-1}$ je objem plynu v případě, že se píst nachází v místě x_{i-1} , viz vztah (9.24). Práce plynu vykonaná při přemístění pístu z polohy x_{i-1} do polohy x_i je pak podle (9.26) přibližně rovna

$$W_i = p(V_{i-1}) \cdot S \cdot (x_i - x_{i-1}) = p(V_{i-1}) \cdot (V_i - V_{i-1})$$

a celková práce je pak přibližně rovna součtu

$$\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n p(V_{i-1}) \cdot (V_i - V_{i-1}). \quad (9.28)$$

Tento součet je Riemannovým integrálním součtem funkce $p = p(V)$ na intervalu $\langle V_a, V_b \rangle$, kde $V_a = Sa$ a $V_b = Sb$ jsou příslušné objemy, jež odpovídají počáteční a koncové poloze pístu pro $x = a$, $x = b$. Podle věty 9.3 dostáváme vztah pro celkovou práci plynu

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n W_i = \int_{V_a}^{V_b} p(V) \, dV. \quad (9.29)$$

• **Příklad 9.24:** Je-li $p(V) = \frac{RT}{V}$ (Boylův zákon), pak

$$W = \int_{V_a}^{V_b} \frac{RT}{V} \, dV = RT \ln \frac{V_b}{V_a}. \quad (9.30)$$

Je-li ve vztahu (9.30) $V_b < V_a$, tj. místo expanze dochází ke kompresi plynu, pak vychází práce W daná vzorcem (9.30) záporná, tzn., že při kompresi plynu se práce spotřebovává, tedy je třeba práci dodávat.

9.4 Věta o střední hodnotě integrálního počtu

Píše-li n studentů test z matematiky a je-li a_i bodový zisk i -tého studenta, $i = 1, \dots, n$, pak průměrný bodový zisk z testu je dán aritmetickým průměrem

$$p = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i .$$

Nyní zobecníme výpočet průměrné (střední) hodnoty konečného počtu čísel na případ spojitě funkce.

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Jak definovat průměrnou, někdy se též říká střední, hodnotu funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$?

• **Příklad 9.25:** Uvažujme bod, který se pohybuje po přímce rychlostí $v(t)$ v čase t pro $t \in \langle a, b \rangle$. Přirozeně je jeho průměrná rychlost takové číslo \bar{v} , že dráha, kterou urazí bod při rychlosti $v(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, bude stejná jako dráha, kterou urazí za tuto dobu, tj. za čas $b - a$, bude-li se pohybovat touto průměrnou rychlostí \bar{v} . V prvním případě je dráha rovna číslu

$$s = \int_a^b v(t) dt$$

a ve druhém

$$s = \bar{v}(b - a) .$$

Číslo \bar{v} tedy splňuje vztah

$$\bar{v}(b - a) = \int_a^b v(t) dt ,$$

neboli

$$\bar{v} = \frac{1}{(b - a)} \int_a^b v(t) dt .$$

Předchozí příklad nás vede k následující definici:

Definice 9.26: Je-li f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak **střední hodnotou** funkce f na $\langle a, b \rangle$ rozumíme číslo

$$\text{prm} \{f(x); x \in \langle a, b \rangle\} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx .$$

Věta 9.27: (O střední hodnotě integrálního počtu)

Je-li f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak existuje číslo $c \in (a, b)$ takové, že

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx, \quad (9.31)$$

tj. $f(c) = \text{prm} \{f(x); x \in \langle a, b \rangle\}$.

Důkaz:

Věta o střední hodnotě integrálního počtu je vlastně přepsáním věty o střední hodnotě diferenciálního počtu pomocí integrálů. Označme $F(x) = \int f(x) \, dx$, tj. $F'(x) = f(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Pak $F(x)$ splňuje předpoklady věty o střední hodnotě diferenciálního počtu, a tedy existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a},$$

což je totéž jako

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx,$$

protože $F'(c) = f(c)$ a $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx$. ■

• **Poznámka 9.28:** Interpretujeme-li funkci $f(x)$ jako rychlost v čase $x \in \langle a, b \rangle$, pak věta 9.27 říká, že pro spojitě se měnící rychlost $f(x)$ existuje časový okamžik $c \in (a, b)$, kdy okamžitá rychlost $f(c)$ je rovna průměrné rychlosti, což je intuitivně zřejmé.

Geometrický význam věty 9.27 je pro nezápornou funkci f znázorněn na obr. 9.13. Přepíšeme-li vztah (9.31) do tvaru

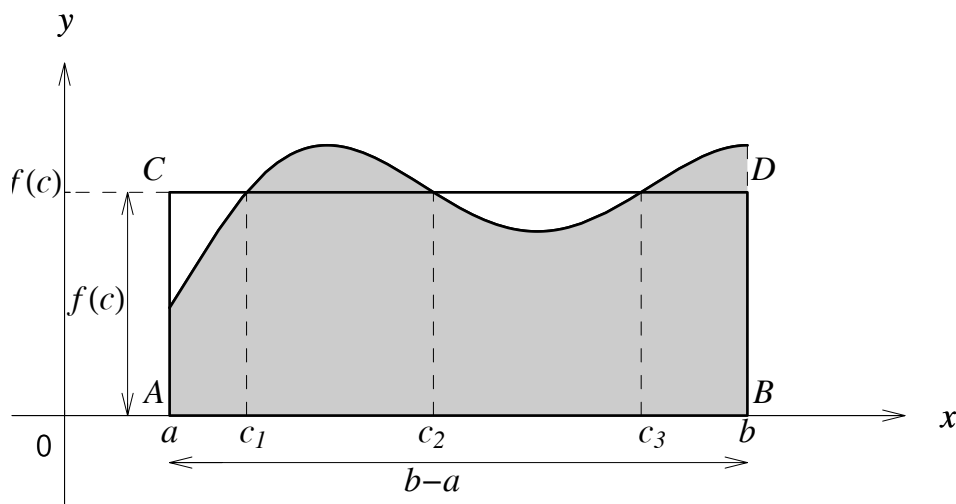
$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) \, dx, \quad (9.32)$$

pak levou stranu v (9.32) lze chápat jako plošný obsah obdélníka o stranách $(b-a)$ a $f(c)$ a na pravé straně tohoto vztahu je plošný obsah vystínovaného obrazce na obr. 9.13. Z tohoto obrázku také plyne, že bodů c s vlastností (9.31) může ležet v intervalu (a, b) více.

• **Příklad 9.29:** Vypočteme střední hodnotu funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a určete body, ve kterých tuto hodnotu nabývá.

Řešení: Podle definice 9.26 dostáváme

$$\text{prm} \{x^2; x \in \langle 0, 1 \rangle\} = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Obrázek 9.13:

Střední hodnota funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je rovna $\frac{1}{3}$. Tuto hodnotu nabývá funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ zřejmě v jediném bodě $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

• **Příklad 9.30:** Vypočteme střední výkon střídavého proudu $I = I_0 \sin at$ během jedné periody, je-li střídavé napětí $E = E_0 \sin(at+p)$, kde E_0, I_0 jsou amplitudy, $a > 0$ je cyklická frekvence a p je fázové posunutí.

Řešení: Výkon střídavého proudu je funkcí času a je dán vztahem

$$P(t) = EI = E_0 I_0 \sin(at + p) \sin at .$$

Délka jedné periody proudu je $\frac{2\pi}{a}$. Střední výkon \bar{P} , tj. střední (průměrná) hodnota výkonu $P(t)$ během jedné periody je tedy

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{\frac{2\pi}{a}} \int_0^{\frac{2\pi}{a}} P(t) dt = \frac{a}{2\pi} E_0 I_0 \int_0^{\frac{2\pi}{a}} \sin(at + p) \sin at dt = \left| \begin{array}{l} at = x \\ a dt = dx \end{array} \right| \\ &= \frac{E_0 I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x + p) \sin x dx = \frac{E_0 I_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos p - \cos(2x + p)] dx \\ &= \frac{E_0 I_0}{4\pi} \left[x \cos p - \frac{\sin(2x + p)}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} E_0 I_0 \cos p , \end{aligned}$$

kde při úpravě integrandu jsme použili vzorec

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] .$$

Návody ke cvičením z kap. 9

- 9.11** Postupujte podle příkladu 9.10. V obou případech využijte vzorce pro součet členů aritmetické posloupnosti.
- 9.16** "Trojlístek" se skládá ze tří stejných částí. Stačí stanovit plošný obsah jedné části.
- 9.18** Zderivujte funkce $g(t) = t^2$ a $f(t) = t^3$ a vyjádřete délku podle vztahu (9.17). Primitivní funkci určete úpravou a substitucí $9t^2 + 4 = z$.

Kapitola 10

Dvojný a trojný integrál

Až dosud jsme se zabývali integrály, jejichž integrační obory byly jednorozměrné. Nyní se budeme zabývat integrály, jejichž integrační obory budou dvojrozměrné a trojrozměrné. Budeme integrovat funkce dvou proměnných přes množinu $D \subset \mathbb{R}^2$, kde D bude např. obdélník, kruh, mezikružší. Na konci kapitoly pak také funkce tří proměnných přes množinu $D \subset \mathbb{R}^3$, kde D bude např. kvádr, čtyřstěn, koule, válec.

10.1 Riemannova definice dvojného integrálu přes obdélníkový obor

V tomto a následujícím odstavci budeme integrovat pouze přes obdélník

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle c, d \rangle\}, \text{ tj. } D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle .$$

Uvažujme spojitou a nezápornou funkci f definovanou na množině $D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Zabývejme se úlohou nalézt objem tělesa T nakresleného na obr. 10.1. Těleso T , které má za podstavu obdélník D , je ohraničeno shora grafem funkce $z = f(x, y)$ a jeho plášť je tvořen stěnami, které leží v rovinách $x = a$, $x = b$, $y = c$ a $y = d$. Tedy

$$T = \{(x, y, z); x \in \langle a, b \rangle, y \in \langle c, d \rangle, 0 \leq z \leq f(x, y)\} .$$

Zkráceně budeme říkat, že T je těleso sestavené nad množinou D , shora ohraničené grafem funkce $z = f(x, y)$.

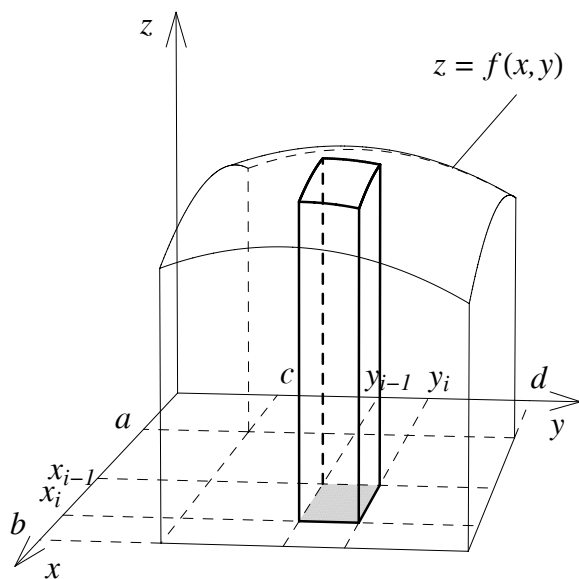
Výpočet objemu je jednoduchý, pokud je funkce f konstantní, tj. $f(x, y) = K$ pro každé $(x, y) \in D$. V tomto případě je totiž těleso T kvádr a jeho objem $V = (b - a)(d - c)K$. Pokud ale funkce f není konstantní na D , pak objem tělesa T zatím obecně vypočítat neumíme. Aproximujme jeho objem součtem objemů vhodných hranolů. Postup je analogický Riemannově definici určitého integrálu v kapitole 9.

Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n stejných dílků dělicími body

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

a interval $\langle c, d \rangle$ rozdělíme na m stejných dílků dělicími body

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d.$$



Obrázek 10.1:

Zřejmě platí $\frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ a $\frac{d-c}{m} = y_j - y_{j-1}$ pro všechna $j = 1, \dots, m$. Označme

$$\begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= \Delta x_i, \\ y_j - y_{j-1} &= \Delta y_j. \end{aligned}$$

Zvolme si i -tý dílek $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, a j -tý dílek $\langle y_{j-1}, y_j \rangle$, $j = 1, \dots, m$, pevně. Množina

$$D_{ij} = \langle x_{i-1}, x_i \rangle \times \langle y_{j-1}, y_j \rangle$$

je obdélník a tvoří podstavu tělesa T_{ij} vyznačeného tučnými čarami na obr. 10.1. Součet objemů těles nad všemi obdélníky D_{ij} pak bude objem celého tělesa T .

Aproximujme nyní objem tělesa nad obdélníkem D_{ij} následovně. Zvolme libovolný bod $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \in D_{ij}$. Při dostatečně velkém počtu dělicích bodů x_i a y_j se hodnota $f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j)$ příliš neliší od ostatních hodnot $f(x, y)$ pro $(x, y) \in D_{ij}$. Proto objem V_{ij} tělesa T_{ij} lze aproximovat objemem hranolu s postavou D_{ij} a výškou o velikosti $f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j)$, tedy

$$V_{ij} \doteq f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Pro hledaný objem V celého tělesa pak platí

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m V_{ij} \doteq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j. \quad (10.1)$$

Aproximace bude obecně tím lepší, čím větší budou čísla m a n . Pro hledaný objem pak platí

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j. \quad (10.2)$$

Hodnotu limity (o které lze dokázat, že existuje) na pravé straně tohoto výrazu, označujeme symbolem

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \quad (10.3)$$

a nazýváme **dvojným integrálem** funkce f přes množinu D . Geometrický význam tohoto symbolu je pro nezápornou funkci f zřejmý. Hodnota dvojného integrálu (10.3) je rovna objemu tělesa sestaveného nad množinou D a shora ohraničeného grafem funkce $z = f(x, y)$.

Analogickým způsobem zavedeme dvojný integrál pro libovolnou omezenou funkci na $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Zde je ale třeba uvažovat libovolné dělení takové, že délky všech podintervalů konvergují k 0. Srovnej s poznámkou 9.6.

Definice 10.1: Nechť f je omezená funkce na $D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Potom **dvojným** (Riemannovým) **integrálem** funkce f přes množinu D rozumíme číslo

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j \quad (10.4)$$

pokud limita vpravo je konečná a nezávisí na výběru dělení a výběru bodů $\tilde{x}_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $\tilde{y}_j \in \langle y_{j-1}, y_j \rangle$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Úmluva: Množinu D v definici 10.1 nazýváme integračním oborem dvojného integrálu.

• **Poznámka 10.2:** Pro funkci g dvou proměnných $n, m \in \mathbb{N}$ symbol

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} g(n, m) = A$$

znamená, že pro velké hodnoty n a m je číslo $g(n, m)$ blízko číslu A , tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ je

$$|g(n, m) - A| < \varepsilon.$$

V definici 10.1 nepředpokládáme nic o spojitosti funkce f na množině D . Dá se ale ukázat, že pro spojitou funkci f na D je limita (10.4) konečná a nezávisí na výběru bodů \tilde{x}_i, \tilde{y}_j . Tedy platí následující věta:

Věta 10.3:

Je-li funkce f spojitá na $D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, pak existuje dvojný integrál $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$.

V odstavci 10.3 tuto větu dále zobecníme, což nám umožní zavést dvojný integrál i přes jiné než obdélníkové obory.

10.2 Výpočet dvojného integrálu přes obdélníkové obory

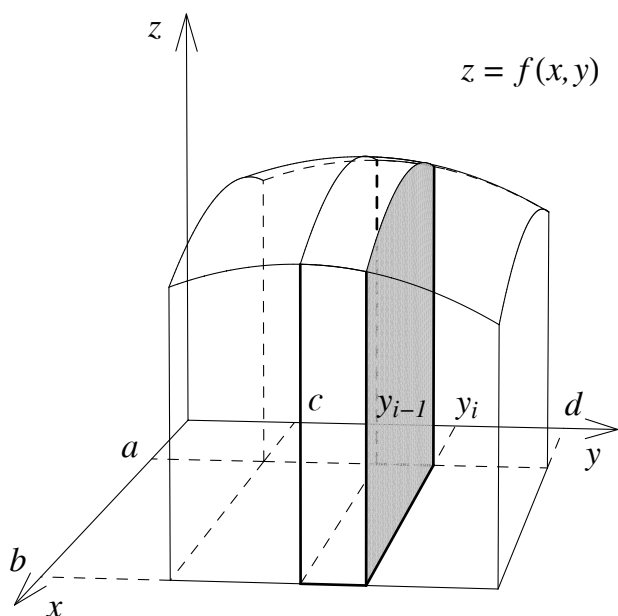
Vztah (10.4) se pro výpočet dvojného integrálu v konkrétních příkladech příliš nehodí. Proto odvodíme v tomto odstavci větu, která převede výpočet dvojného integrálu na postupný výpočet dvou určitých integrálů funkcí jedné proměnné, tzv. **dvojnásobnou integraci**. Nechť $f(x, y)$ je spojitá a nezáporná funkce na množině $D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Počítejme objem tělesa T popsaneho v odstavci 10.1. Nyní nerozdělíme dané těleso řezy rovnoběžnými s rovinami (x, y) a (y, z) , nýbrž pouze řezy rovnoběžnými s rovinou (x, z) , viz obr. 10.2. Tímto se dané těleso rozpadne na několik desek. Součet objemů těchto desek je roven objemu celého tělesa T . Rozděleme tedy interval $\langle c, d \rangle$ na m stejných dílů dělicími body

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d.$$

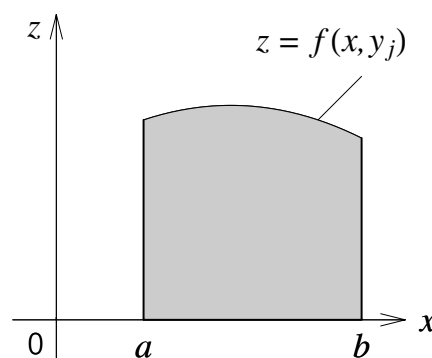
Aproximujme dále objem j -té desky, $j = 1, \dots, m$, jejíž tloušťka je rovna $(y_j - y_{j-1})$. Podstava této desky (vyznačená stínováním na obr. 10.2) vznikne řezem tělesa T rovinou $y = y_j$. Tato podstava promítnutá do roviny (x, z) je nakreslena na obr. 10.3. Její plošný obsah P_j je roven číslu

$$P_j = \int_a^b f(x, y_j) dx, \quad (10.5)$$

neboť se jedná o plošný obsah obrazce ohraničeného grafem funkce jedné proměnné $z = f(x, y_j)$ (y_j je pevné), osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.



Obrázek 10.2:



Obrázek 10.3:

Aproximace objemu V_j j -té desky je potom dána vztahem

$$V_j \doteq P_j \cdot (y_j - y_{j-1}) = \left(\int_a^b f(x, y_j) dx \right) \cdot \Delta y_j, \quad (10.6)$$

kde $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Pro celkový objem V tělesa T pak platí

$$V = \sum_{j=1}^m V_j \doteq \sum_{j=1}^m \left(\int_a^b f(x, y_j) dx \right) \cdot \Delta y_j. \quad (10.7)$$

Označme

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (10.8)$$

Rovnici (10.7) lze pak zapsat ve tvaru

$$V \doteq \sum_{j=1}^m F(y_j) \Delta y_j, \quad (10.9)$$

kde výraz na pravé straně vztahu (10.9) je Riemannovým integrálním součtem funkce F , a tedy

$$V = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m F(y_j) \Delta y_j = \int_c^d F(y) dy . \quad (10.10)$$

Protože $V = \iint_D f(x, y) dx dy$, dostáváme po dosazení ze vztahu (10.8) do (10.10)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy . \quad (10.11)$$

Budeme-li uvažovat místo řezů rovinami rovnoběžnými s rovinou (x, z) řezy rovnoběžné s rovinou (y, z) , odvodíme analogický vztah jako (10.11), ve kterém bude vnitřní integrace podle proměnné y a vnější podle proměnné x . Tyto poznatky shrnuje následující věta.

Věta 10.4: (Fubiniova věta pro obdélníkový integrační obor)

Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na množině $D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Potom

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx . \quad (10.12)$$

Věta ukazuje jak postupovat při výpočtu dvojného integrálu pro případ obdélníkového integračního oboru. Jde o převedení dvojrozměrné integrace na sled dvou jednorozměrných integrací; zkráceně hovoříme o **převodu dvojného integrálu na dvojnásobný**. Použití tohoto postupu si ukážeme na následujících příkladech.

• **Příklad 10.5:** Vypočítejme dvojný integrál funkce $f(x, y) = 5x^2y - 2y^3$ přes množinu $D = \langle 2, 5 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle$.

Řešení: Podle vztahu (10.12) platí

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (5x^2y - 2y^3) dx dy = \int_1^3 \left(\int_2^5 (5x^2y - 2y^3) dx \right) dy .$$

Vypočteme nejprve vnitřní integrál (na proměnnou y pohlížíme jako na konstantu).

$$\int_2^5 (5x^2y - 2y^3) dx = \left[\frac{5}{3}x^3y - 2xy^3 \right]_2^5 = 195y - 6y^3 = F(y) .$$

Potom pro vnější integrál platí

$$\int_1^3 F(y) dy = \int_1^3 (195y - 6y^3) dy = 660 .$$

Celkem tedy $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = 660$.

Můžeme také postupovat způsobem, kdy za vnitřní integraci volíme integraci podle proměnné y a za vnější pak integraci podle proměnné x . Dostáváme:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_2^5 \left(\int_1^3 (5x^2y - 2y^3) \, dy \right) dx = \int_2^5 \left[\frac{5}{2}x^2y^2 - \frac{2}{4}y^4 \right]_1^3 dx = \\ &= \int_2^5 (20x^2 - 40) \, dx = 660. \end{aligned}$$

• **Příklad 10.6:** Vypočítejme dvojný integrál funkce $f(x, y) = 2xe^y$ přes množinu $D = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení: Podle (10.12) dostáváme

$$\begin{aligned} \iint_D 2xe^y \, dx \, dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 2xe^y \, dy \right) dx = \int_0^2 [2xe^y]_0^1 dx = \int_0^2 2x(e - 1) \, dx = \\ &= [x^2(e - 1)]_0^2 = 4e - 4. \end{aligned}$$

V případech, kdy integrovaná funkce je součinem funkce proměnné x a funkce proměnné y (a integrujeme přes obdélník), jako v předchozím případě, lze s výhodou použít následující větu. Tu také budeme mnohdy v dalším používat.

Věta 10.7:

Nechť funkce $f(x, y) = g(x)h(y)$, kde $g(x)$ je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, $h(y)$ je funkce spojitá na intervalu $\langle c, d \rangle$. Potom pro dvojný integrál funkce $f(x, y)$ přes množinu $D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ platí

$$\iint_D g(x)h(y) \, dx \, dy = \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \left(\int_c^d h(y) \, dy \right). \quad (10.13)$$

Důkaz:

Podle věty 10.4 dostáváme

$$\begin{aligned} \iint_D g(x)h(y) \, dx \, dy &= \int_c^d \left(\int_a^b g(x)h(y) \, dx \right) dy = \int_c^d h(y) \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) dy \\ &= \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \left(\int_c^d h(y) \, dy \right). \end{aligned}$$

■

Pomocí věty 10.7 lze příklad 10.6 řešit následovně:

$$\iint_D 2x e^y \, dx \, dy = \left(\int_0^2 2x \, dx \right) \left(\int_0^1 e^y \, dy \right) = [x^2]_0^2 [e^y]_0^1 = 4(e - 1) .$$

Cvičení 10.8: Vypočítejte dvojný integrál funkce

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1 + y^2}$$

přes množinu $D = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

• **Poznámka 10.9:** Podle vztahu (10.12) lze provádět sled jednorozměrných integrací v obou pořadích. Při praktických výpočtech se někdy setkáme s případy, kdy některá z integrací bude obtížná či neproveditelná. Tak např. pro funkci $f(x, y) = x^y$ přes integrační obor $D = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$ je

$$\iint_D x^y \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 x^y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_1^2 dx = \int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x} dx .$$

Tento určitý integrál však neumíme vypočítat, neboť elementárními metodami neumíme určit primitivní funkci k funkci $(x^2 - x)/\ln x$. Při opačném pořadí integrací tyto potíže nenastanou.

Cvičení 10.10: Vypočtěte dvojný integrál z předchozí poznámky při následujícím pořadí integrací:

$$\iint_D x^y \, dx \, dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^y \, dx \right) dy .$$

Cvičení 10.11: Vypočtěte dvojný integrál funkce

$$f(x, y) = \frac{y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

přes množinu $D = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

10.3 Dvojný integrál a jeho vlastnosti

Dříve než zavedeme dvojný integrál přes obecnou podmnožinu \mathbb{R}^2 , uveďme zobecnění věty 10.3, které zaručuje existenci dvojného integrálu i pro funkce, které nejsou nutně spojité na integračním oboru.

Věta 10.12:

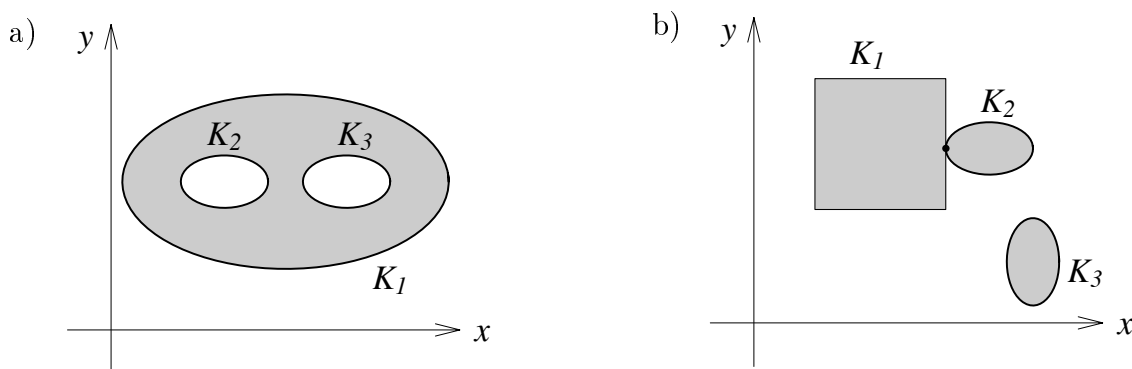
Nechť funkce $f(x, y)$ je omezená na množině $D = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ a dále nechť je spojitá na D s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů nebo bodů konečně mnoha oblouků. Potom existuje dvojný integrál funkce f přes množinu D .

• **Poznámka 10.13:** Body nespojitosti funkce f v předchozí větě mohou být např. body hranice množiny D . Budeme uvažovat i případy, kdy např. na hranici množiny D není funkce f vůbec definována. V těchto případech formálně dodefinujeme funkci f v těchto bodech libovolnou konstantou, např. 0.

Věty 10.12 využijeme nyní k zavedení dvojného integrálu i přes jiné množiny než obdélník. Budeme uvažovat množiny $D \subset \mathbb{R}^2$ s vlastnostmi:

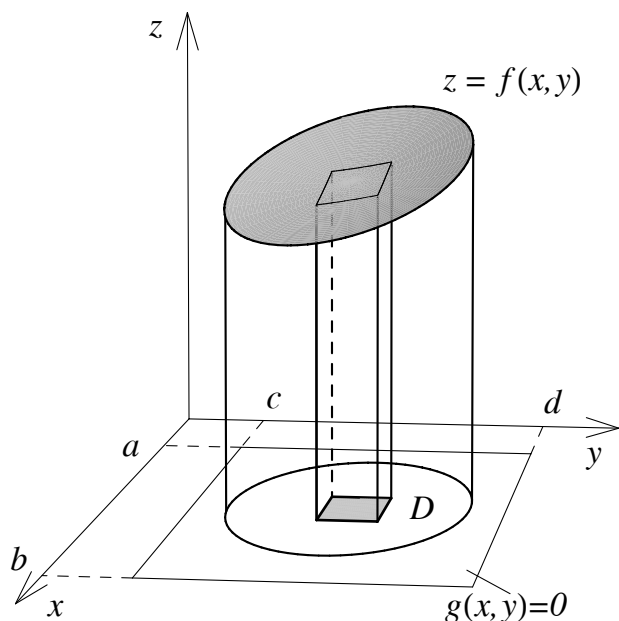
- 1) množina D je omezená,
- 2) hranice množiny D je tvořena konečným počtem jednoduchých uzavřených křivek a bodů.

Pro takovéto množiny neexistuje obecně žádný běžný název. My je, pouze pro potřebu těchto skript, budeme nazývat **standardními množinami**.



Obrázek 10.4:

Na obr. 10.4 jsou nakresleny dvě takovéto množiny. V obou případech je jejich hranice tvořena křivkami K_1, K_2 a K_3 . V případě b) mají křivky K_1 a K_2 společný bod.



Obrázek 10.5:

Přikročíme nyní k zavedení dvojného integrálu. Nechť je dána spojitá, omezená a nezáporná funkce $f(x, y)$ na standardní množině D . Zkusme vypočítat objem tělesa T , nakresleného na obr. 10.5, jehož podstavou je množina D a které je shora ohraničené grafem funkce f , tedy

$$T = \{(x, y, z) ; (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\} .$$

Sestrojme obdélník $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ tak, aby $D \subset \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$.

Na tomto obdélníku definujeme funkci g předpisem

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{pro } (x, y) \in \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \setminus D. \end{cases}$$

Graf takto definované funkce $g(x, y)$ ohraničuje nad obdélníkem $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ těleso, jehož objem je roven objemu tělesa T . Jelikož body nespojitosti funkce $g(x, y)$ jsou body hranice standardní množiny D , existuje podle věty 10.12 dvojný integrál

$$\iint_{\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle} g(x, y) \, dx \, dy,$$

jehož hodnota je rovna objemu tělesa T . Tuto hodnotu označujeme symbolem

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

a nazýváme ji dvojným integrálem funkce f přes množinu D . (Nezápornost funkce f jsme předpokládali pouze kvůli jasnější geometrické představě. Analogicky zavádíme dvojný integrál i bez tohoto předpokladu.)

Definice 10.14: Nechť f je omezená funkce na standardní množině $D \subset \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$.

Položme

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{pro } (x, y) \in \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \setminus D. \end{cases}$$

Pak **dvojným integrálem** funkce f přes množinu D rozumíme číslo

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle} g(x, y) \, dx \, dy,$$

pokud integrál vpravo existuje. Množinu D nazýváme **integračním oborem**.

Věta 10.15:

Nechť D je standardní množina a množina $K \subset D$ je tvořena konečně mnoha body a oblouky. Nechť funkce f a g jsou omezené na D a spojitě a sobě rovné na $D \setminus K$. Potom existují dvojné integrály funkcí f a g přes množinu D a jsou si rovny, tj.

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D g(x, y) \, dx \, dy.$$

• **Poznámka 10.16:** Věta 10.15 rozšiřuje podmínky existence dvojného integrálu. Zároveň ukazuje, že existence a hodnota dvojného integrálu nezávisí na hodnotách funkce $f(x, y)$ v konečně mnoha bodech a v bodech konečně mnoha oblouků. Tam dokonce nemusí být integrovaná funkce vůbec definována, její hodnoty si zde totiž můžeme libovolně

zvolit, aniž by to ovlivnilo existenci a hodnotu integrálu. Speciálně se týká hodnot funkce f na hranici množiny D . Je-li funkce f spojitá a omezená na vnitřku D° množiny D , pak

$$\iint_{D^\circ} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy .$$

Proto budeme v dalším obvykle psát $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ i tehdy, bude-li funkce f definována pouze na vnitřku množiny D .

Věta 10.17: Vlastnosti dvojného integrálu

1. Necht' existují dvojné integrály funkcí f a g přes standardní množinu D a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dx \, dy = \alpha \iint_D f(x, y) \, dx \, dy + \beta \iint_D g(x, y) \, dx \, dy . \quad (10.14)$$

2. Necht' existuje dvojný integrál funkce f přes konečný počet standardních množin D_i ($i = 1, \dots, n$) a necht' tyto množiny mají společné nejvýše hraniční body. Označme $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$. Pak

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \sum_{i=1}^n \left(\iint_{D_i} f(x, y) \, dx \, dy \right) . \quad (10.15)$$

3. Necht' existuje dvojný integrál z nezáporné funkce f přes standardní množinu D . Pak

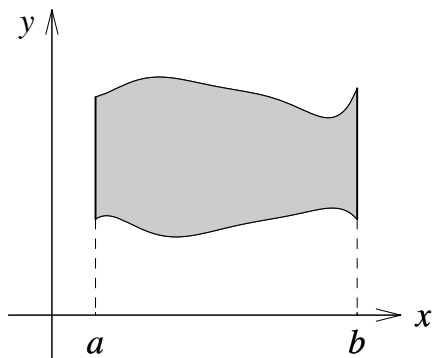
$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \geq 0 .$$

Vztahy (10.14) a (10.15) usnadňují výpočet dvojných integrálů. Vlastnost dvojného integrálu popsaná vztahem (10.15) se nazývá **aditivita** integrálu vzhledem k integračnímu oboru.

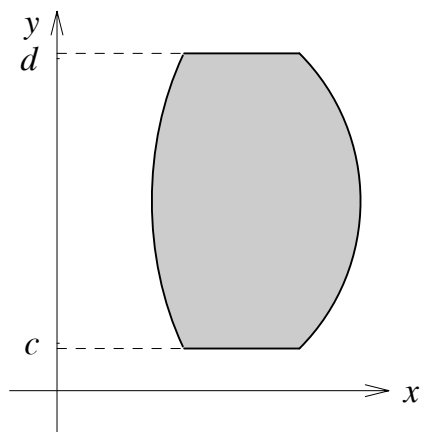
10.4 Výpočet dvojného integrálu

V tomto odstavci se naučíme počítat dvojný integrál přes standardní množiny. Základním prostředkem bude Fubiniova věta, která umožní (podobně jako při integraci přes obdélník) převést výpočet dvojného integrálu na dvojnásobnou integraci.

Budeme-li počítat dvojný integrál přes “jednoduché” standardní množiny (budeme jim říkat množiny 1. a 2. typu), budeme moci použít Fubiniovu větu přímo. Pokud bude standardní množina složitější, využijeme aditivity dvojného integrálu vzhledem k integračnímu oboru a integrační obor vhodným způsobem rozdělíme na několik podoborů, přes které již budeme umět jednotlivé integrály počítat.



Obrázek 10.6:



Obrázek 10.7:

Definice 10.18: Říkáme, že standardní množina D je **1. typu**, jestliže

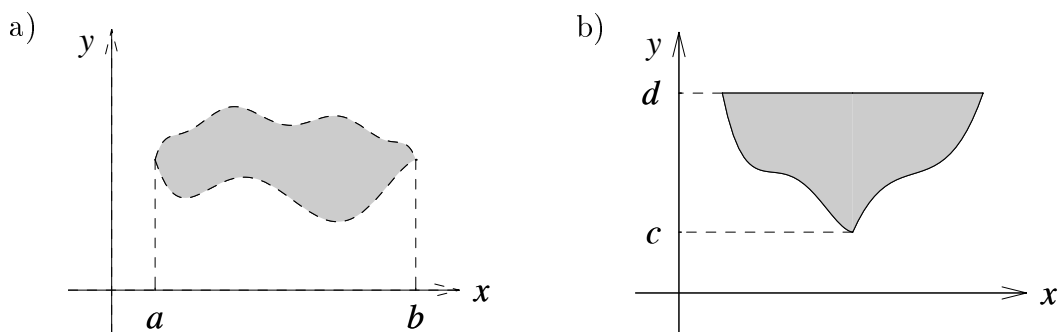
$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \langle a, b \rangle, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \} , \quad (10.16)$$

kde $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ splňující podmínku $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. (Tedy množina 1. typu je množina ohraničená grafy funkcí $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, viz obr. 10.6.

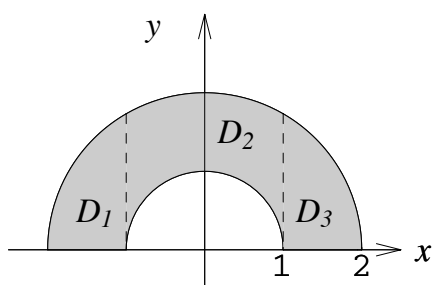
Obdobně říkáme, že standardní množina D je **2. typu**, jestliže

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \in \langle c, d \rangle, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \} , \quad (10.17)$$

kde $\psi_1(y)$ a $\psi_2(y)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle c, d \rangle$ splňující podmínku $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pro každé $y \in \langle c, d \rangle$. (Tedy množina 2. typu je množina ohraničená grafy funkcí $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ a přímkami $y = c$, $y = d$, viz obr. 10.7.



Obrázek 10.8:



Obrázek 10.9:

• **Poznámka 10.19:** Množinou 1. typu je i množina na obr. 10.8a, množinou 2. typu je množina na obr. 10.8b. Některé standardní množiny jsou množinami jak 1. tak i 2. typu, např. obdélník nebo kruh. Množina na obr. 10.9 je množina 1. typu, ale není množinou 2. typu. Mezikruží není množinou ani 1. ani 2. typu.

Věta 10.20: Fubiniova věta

I. Nechť existuje dvojný integrál funkce $f(x, y)$ přes standardní množinu D 1. typu,

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \langle a, b \rangle, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \} ,$$

kde $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$ splňující podmínku $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx . \quad (10.18)$$

II. Nechť existuje dvojný integrál funkce $f(x, y)$ přes standardní množinu D 2. typu,

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \in \langle c, d \rangle, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \} ,$$

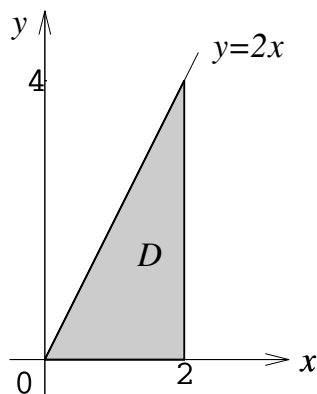
kde $\psi_1(y)$ a $\psi_2(y)$ jsou spojité funkce na intervalu $\langle c, d \rangle$ splňující podmínku $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pro každé $y \in \langle c, d \rangle$. Pak

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy . \quad (10.19)$$

Povšimněme si, že v předchozí větě jsou meze vnějšího integrálu na pravé straně (u obou formulí) **konstantní**, zatímco meze vnitřního integrálu jsou **funkcemi** té proměnné, podle které provádíme vnější integraci. Tedy při dvojnásobné integraci je pořadí integrací podstatné a závisí na něm meze vnějšího a vnitřního integrálu. Naproti tomu ve dvojném integrálu $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ symboly dx a dy naznačují pouze proměnné, podle kterých integrujeme.

• **Poznámka 10.21:** Podmínky věty 10.20 jsou splněny např. tehdy, je-li funkce f spojitá na integračním oboru D , kde D je uzavřená ohraničená množina. Dále se budeme ale setkávat i s integračními obory, které budou otevřenými množinami nebo budou obsahovat pouze část své hranice (srovnej s poznámkou 10.16). Vztahy (10.18) a (10.19) však zůstanou v platnosti i pro tyto integrační obory. Příslušné jednorozměrné integrály pak ale uvažujeme, tam kde je to nutné, jako nevlastní.

- **Příklad 10.22:** Vypočítejte dvojný integrál funkce $f(x, y) = xy$ přes trojúhelník D , který je ohraničen osou x a přímkami $x = 2$, $y = 2x$.



Obrázek 10.10:

Řešení: Integrační obor $D = \{(x, y); x \in \langle 0, 2 \rangle, 0 \leq y \leq 2x\}$ je množina 1. typu ($\varphi_1(x) = 0$ a $\varphi_2(x) = 2x$). Funkce f je na D spojitá, tedy podle věty 10.15 uvažovaný dvojný integrál existuje. Podle vztahu (10.18) dostáváme:

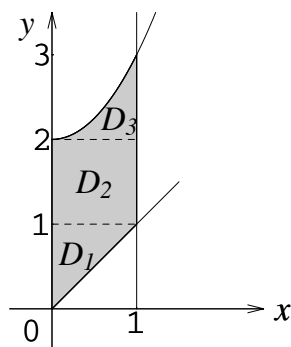
$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{2x} xy \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2}xy^2 \right]_0^{2x} dx = \int_0^2 2x^3 \, dx = 2 \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = 8. \end{aligned}$$

Jelikož množina D v předchozím případě je zároveň množinou 2. typu ($D = \{(x, y); y \in \langle 0, 4 \rangle, \frac{y}{2} \leq x \leq 2\}$), můžeme pro výpočet daného integrálu použít i vztah (10.19) s opačným pořadím integrace. Dostáváme:

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^4 \left(\int_{y/2}^2 xy \, dx \right) dy = \int_0^4 \left[\frac{1}{2}yx^2 \right]_{y/2}^2 dy = \int_0^4 \left(2y - \frac{y^3}{8} \right) dy = \left[y^2 - \frac{y^4}{32} \right]_0^4 = 8.$$

- **Příklad 10.23:** Zaměňme pořadí integrace ve dvojnásobném integrálu

$$\int_0^1 \left(\int_x^{x^2+2} f(x, y) \, dy \right) dx, \text{ kde } f \in C(\mathcal{R}^2).$$



Obrázek 10.11:

Řešení: Integračním oborem je množina $D = \{(x, y); x \in \langle 0, 1 \rangle, x \leq y \leq x^2 + 2\}$ (viz obr. 10.11) a podle 1. části věty 10.20 je

$$\int_0^1 \left(\int_x^{x^2+2} f(x, y) \, dy \right) dx = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

Množina D je množinou 1. typu, ale též množinou 2. typu. (Zde $c = 0$, $d = 3$, $\psi_1(y) = 0$ pro $y \in \langle 0, 2 \rangle$, $\psi_1(y) = \sqrt{y-2}$ pro $y \in \langle 2, 3 \rangle$, $\psi_2(y) = y$ pro $y \in \langle 0, 1 \rangle$, $\psi_2(y) = 1$ pro $y \in \langle 1, 3 \rangle$.)

Z obr. 10.11 je zřejmé, že je účelné rozdělit množinu D na 3 části D_1 , D_2 , D_3 , kde

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) ; 0 \leq x \leq y, y \in \langle 0, 1 \rangle\}, \\ D_2 &= \{(x, y) ; 0 \leq x \leq 1, y \in \langle 1, 2 \rangle\}, \\ D_3 &= \{(x, y) ; \sqrt{y-2} \leq x \leq 1, y \in \langle 2, 3 \rangle\}. \end{aligned}$$

Potom podle 2. části věty 10.20 vyjádříme dvojný integrál, s využitím jeho aditivity, jako tři dvojnásobné integrály. Dostaneme

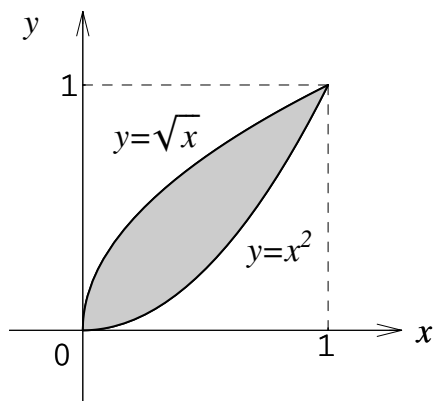
$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{D_3} f(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^y f(x, y) \, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_{\sqrt{y-2}}^1 f(x, y) \, dx \right) dy. \end{aligned}$$

• **Poznámka 10.24:** Dvojného integrálu lze využít k výpočtu plošných obsahů množin. Plošný obsah P standardní množiny D je číselně roven objemu tělesa o výšce 1 nad množinou D . Místo o plošném obsahu množiny D mluvíme často o **míře množiny** D , kterou obvykle označujeme symbolem $\mu(D)$. Tedy

$$P = \mu(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy. \quad (10.20)$$

Množiny jejichž plošný obsah je nulový, nazýváme **množinami míry nula**. Jsou to např. množiny skládající se z konečně mnoha bodů nebo z bodů konečně mnoha křivek. Hodnota integrálu tedy ve smyslu poznámky 10.16 nezávisí na hodnotách funkce na množině míry nula.

• **Příklad 10.25:** Pomocí dvojného integrálu vypočteme plošný obsah obrazce na obr. 10.12 ohraničeného grafy funkcí $y = \sqrt{x}$ a $y = x^2$.



Obrázek 10.12:

Řešení: Integrační obor je množina $D = \{(x, y) ; x \in \langle 0, 1 \rangle, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Použitím vztahu (10.20) je

$$\begin{aligned} P &= \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \right) dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^{\sqrt{x}} \, dx = \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Jak je patrné z vyčíslení vnějšního integrálu, mohli jsme plošný obsah daného obrazce vypočítat přímo použitím věty 8.5 ze skript [MI], kdy

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx .$$

Výhoda počítání pomocí plošného obsahu pomocí dvojného integrálu se může projevit při využití substituce ve dvojném integrálu, viz následující odstavec.

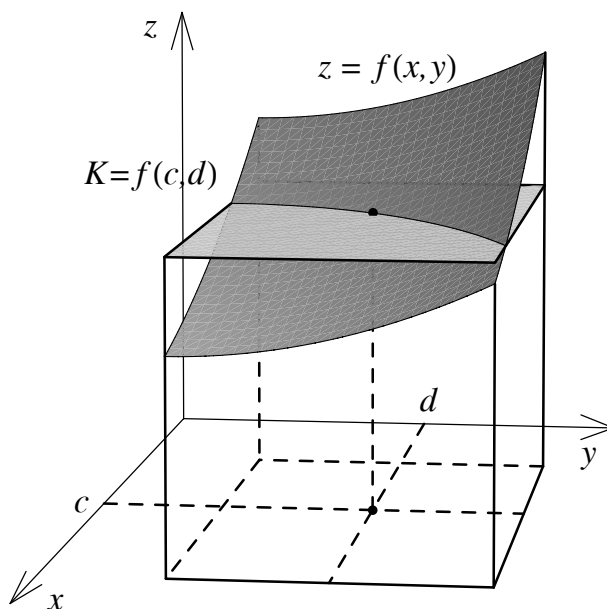
Cvičení 10.26: Pomocí dvojného integrálu vypočtete plošný obsah trojúhelníka o vrcholech $A = (1, 1)$, $B = (3, 1)$ a $C = (2, 5)$.

Podobně jako jsme ve skriptech [MI] zavedli střední hodnotu spojitě funkce na intervalu, lze zavést i střední (průměrnou) hodnotu funkce dvou proměnných na standardní množině.

Definice 10.27: Je-li $f(x, y)$ spojitá funkce na standardní množině $D \subset \mathbb{R}^2$, pak **střední hodnotou** funkce f na D rozumíme číslo

$$\text{prn}\{f(x, y) ; (x, y) \in D\} = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\mu(D)} = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{\iint_D 1 dx dy} .$$

Pro takto zavedenou střední hodnotu pak platí analogická věta k větě o střední hodnotě integrálního počtu.



Obrázek 10.13:

Věta 10.28:

Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá na standardní uzavřené množině D , pak existuje bod $(c, d) \in D$ tak, že $\text{prn}\{f(x, y) ; (x, y) \in D\} = f(c, d)$.

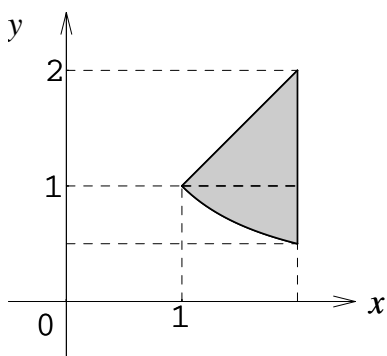
Geometrický význam předchozí věty lze vyjádřit pro nezápornou funkci f následovně: Pro spojitou nezápornou funkci f na D existuje bod $(c, d) \in D$ takový, že objem tělesa nad množinou D shora ohraničeného grafem funkce $f(x, y)$ je stejný jako objem tělesa nad množinou D shora ohraničeného grafem konstantní funkce $K = f(c, d)$, viz obr. 10.13.

V následujícím příkladu si ukážeme jak může vhodná volba pořadí jednorozměrných integrací ovlivnit složitost výpočtu.

• **Příklad 10.29:** Vypočítejme dvojný integrál funkce $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$ přes množinu D (viz obr. 10.14), která je ohraničena přímkami $x = 2$, $y = x$ a hyperbolou $x \cdot y = 1$.

Řešení: Integrační obor je množina $D = \{(x, y) ; x \in \langle 1, 2 \rangle, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$, která je 1. typu. Dosazením do vztahu (10.18) dostáváme:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \int_1^2 x^2 \left(\int_{1/x}^x \frac{1}{y^2} dy \right) dx = \\ &= \int_1^2 x^2 \cdot \left[\frac{-1}{y} \right]_{1/x}^x dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$



Obrázek 10.14:

Nyní vypočteme tento dvojný integrál znovu při opačném pořadí jednorozměrných integrací. Množinu D rozdělíme přímkou $y = 1$ (viz obr. 10.14) na množiny

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) ; y \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \frac{1}{y} \leq x \leq 2\}, \\ D_2 &= \{(x, y) ; y \in \langle 1, 2 \rangle, y \leq x \leq 2\}. \end{aligned}$$

Protože $D = D_1 \cup D_2$, je podle věty 10.20

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy &= \iint_{D_1} \frac{x^2}{y^2} dx dy + \iint_{D_2} \frac{x^2}{y^2} dx dy = \\ &= \int_{1/2}^1 \left(\int_{1/y}^2 \frac{x^2}{y^2} dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx \right) dy = \\ &= \int_{1/2}^1 \left[\frac{x^3}{3y^2} \right]_{1/y}^2 dy + \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3y^2} \right]_y^2 dy = \end{aligned}$$

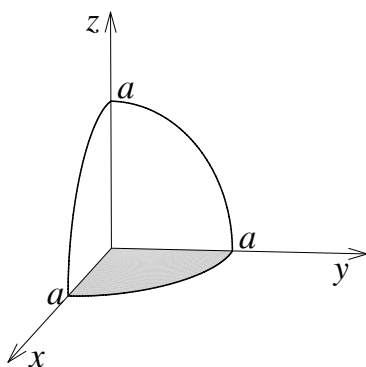
$$= \int_{1/2}^1 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5} \right) dy + \int_1^2 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5} \right) dy = \frac{9}{4}.$$

Cvičení 10.30: Vypočítejte dvojný integrál funkce $f(x, y) = x^2 + y$ přes množinu D , ohraničenou přímkami $y = x - 1$, $y = 3 - x$ a $2y - x = 3$.

Na závěr tohoto odstavce odvoďme ještě, pomocí dvojného integrálu, vzorec pro objem koule. (Tuto úlohu jsme již řešili ve skriptech [MI] a v dalším ukážeme jiný, snadnější postup.)

• **Příklad 10.31:** Pomocí dvojného integrálu vypočtěme objem koule o poloměru a .

Řešení: Kouli umístíme tak, aby její střed ležel v bodě $(0, 0, 0)$. Budeme počítat objem pouze části koule v 1. oktantu (viz obr. 10.15), neboť souřadnicové roviny rozdělí kouli na osm stejných částí. Rovnice kulové plochy o poloměru a je $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, tedy její část ležící v 1. oktantu je grafem funkce $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.



Obrázek 10.15:

Tedy objem jedné osminy dané koule je roven $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, kde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

je čtvrtkruh ležící v 1. kvadrantu roviny (x, y) (na obr. 10.15 je vystínován). Objem celé koule pak vypočteme následovně:

$$V = 8 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 8 \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy \right) dx.$$

Nejprve vypočtěme vnitřní integrál pomocí substituce.

$$\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{a^2 - x^2} \sin t \\ dy = \sqrt{a^2 - x^2} \cos t dt \\ y = 0 \Rightarrow t = 0 \\ y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow t = \pi/2 \end{array} \right| = \\ = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(a^2 - x^2) - (a^2 - x^2) \sin^2 t} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cos t dt = (a^2 - x^2) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ = (a^2 - x^2) \left[\frac{t + \cos t \sin t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} (a^2 - x^2).$$

Po dosazení do vnějšího integrálu dostáváme

$$V = 8 \int_0^a \frac{\pi}{4} (a^2 - x^2) dx = 2\pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

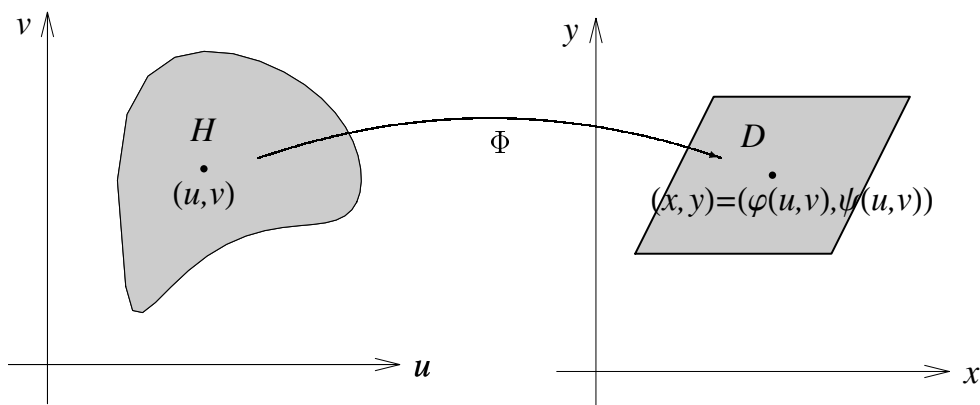
10.5 Substituční metoda pro dvojný integrál

V kapitole 10 skript [MI] jsme uvedli substituční metodu pro určité integrály ve tvaru

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx ,$$

kde funkce φ zobrazuje interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ na interval $\langle a, b \rangle$, $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$.

Podobná metoda existuje i pro dvojný integrály. Při jejím užití není naší snahou pouze zjednodušit integrovanou funkci, jako tomu bylo v jednorozměrném případě, ale zejména zjednodušit integrační obor.



Obrázek 10.16:

Nechť $\Phi = (\varphi, \psi)$ je zobrazení, které zobrazuje množinu $H \subset \mathbb{R}^2$ ležící v rovině (u, v) na množinu $D \subset \mathbb{R}^2$ ležící v rovině (x, y) , kde D a H jsou standardní množiny. Tedy Φ lze zapsat jako

$$(u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v)) = (x, y)$$

a vztahy

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

nazýváme **transformačními rovnicemi**, viz obr. 10.16.

O zobrazení Φ budeme předpokládat:

1. Zobrazení Φ je na H prosté, tj. pro všechna $(u_1, v_1) \in H$ a $(u_2, v_2) \in H$ taková, že $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ je $\Phi(u_1, v_1) \neq \Phi(u_2, v_2)$.
2. Funkce Φ je na množině H spojitě diferencovatelná, tj. funkce φ a ψ mají na H spojitě parciální derivace 1. řádu.
3. Jacobián (determinant Jacobiho matice) zobrazení Φ je pro všechna $(u, v) \in H$ různý od nuly, tj.

$$J(u, v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (10.22)$$

Zobrazení Φ splňující podmínky 1. - 3. nazýváme **regulární zobrazení**. Za těchto předpokladů platí následující věta:

Věta 10.32: (Substituce ve dvojném integrálu)

Nechť existuje dvojný integrál funkce $f(x, y)$ přes standardní množinu D a nechť $\Phi = (\varphi, \psi)$ je regulární zobrazení, které zobrazuje standardní množinu H na standardní množinu D . Pak

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_H f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |J(u, v)| \, du \, dv . \quad (10.23)$$

Užití věty o substituci si ilustrujeme na příkladech. Nalézt vhodnou substituci je obvykle obtížné, proto se omezíme většinou na **substituci do polárních souřadnic**.

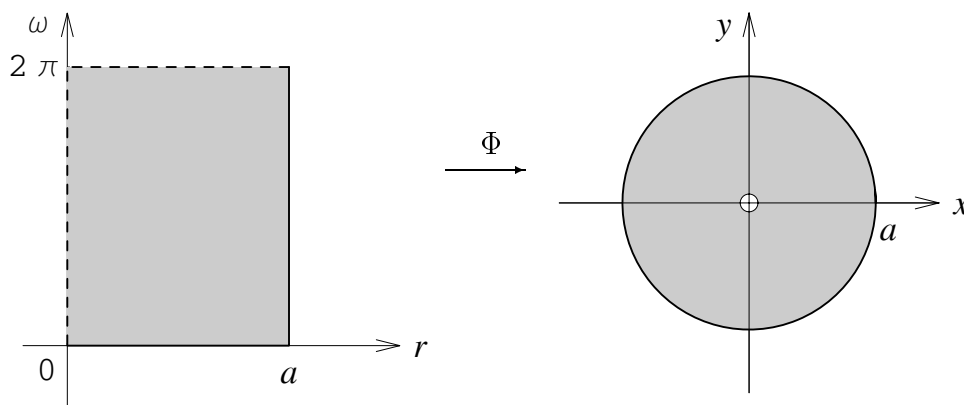
Nechť K je množina, která je kruhem o poloměru a bez svého středu a která je v kartézských souřadnicích popsána vztahem

$$K = \{(x, y) ; 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\} .$$

Transformační rovnice pro polární souřadnice

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \omega \\ y &= r \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

definují zobrazení Φ , $\Phi(r, \omega) = (\varphi(r, \omega), \psi(r, \omega)) = (r \cos \omega, r \sin \omega)$, které zobrazuje množinu $H = \{(r, \omega) ; r \in (0, a), \omega \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ na množinu K , viz obr. 10.17.



Obrázek 10.17:

(Zde r je polární poloměr a ω polární úhel na rozdíl od skript [MI], kde jsme polární úhel značili symbolem φ .)

Ze zavedení polárních souřadnic plyne, že zobrazení Φ je na množině H prosté. Parciální derivace

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \cos \omega , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = -r \sin \omega , \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \sin \omega , \quad \frac{\partial \psi}{\partial \omega} = r \cos \omega$$

jsou zřejmě spojitými funkcemi na množině H . Podmínka (10.22) je splněna, neboť

$$J(r, \omega) = \det \begin{bmatrix} \cos \omega & -r \sin \omega \\ \sin \omega & r \cos \omega \end{bmatrix} = r \neq 0$$

pro všechna $(r, \omega) \in H$.

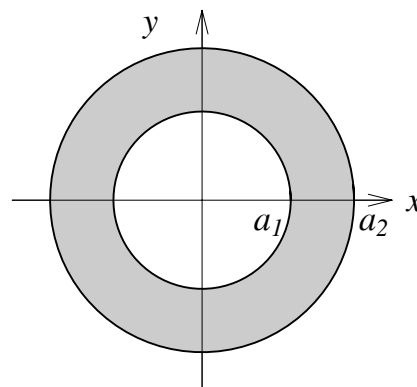
Zřejmě bude snazší integrovat přes množinu H (jedná se o obdélník), než přes množinu K . **Substituci do polárních souřadnic** volíme tehdy, jestliže integrační obor je **kruh, kruhová výseč, mezikruží**, apod. Ve všech těchto případech splňuje zobrazení Φ předpoklady 1. až 3. a navíc množina H , přes kterou budeme po substituci integrovat, je obdélník.

• **Příklad 10.33:** Pomocí substituční metody pro dvojný integrál vypočítejte objem koule o poloměru a .

Řešení: Tuto úlohu jsme již řešili v příkladu 10.31. Zde pouze vyčíslíme sestavený dvojný integrál pomocí substituce do polárních souřadnic. Integračním oborem v příkladě 10.31 byl čtvrtkruh $D = \{(x, y) ; x \in \langle 0, a \rangle, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$. Při transformaci do polárních souřadnic je $D \setminus \{(0, 0)\}$ obrazem množiny $H = \{(r, \omega) ; r \in (0, a), \omega \in \langle 0, \pi/2 \rangle\}$. Dosazením do vztahu (10.23) a použitím substituce $t = a^2 - r^2$ postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} V &= 8 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = 8 \iint_H \sqrt{a^2 - r^2 \cos^2 \omega - r^2 \sin^2 \omega} \, r \, dr \, d\omega \\ &= 8 \int_0^a \left(\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, d\omega \right) dr = 4\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \, r \, dr = 4\pi \int_{a^2}^0 -\frac{1}{2} \sqrt{t} \, dt = \frac{4}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

Cvičení 10.34: Pomocí substituční metody pro dvojný integrál vypočítejte plošný obsah mezikruží (obr. 10.18), kde vnitřní kružnice má poloměr a_1 a vnější poloměr a_2 .



Obrázek 10.18:

• **Příklad 10.35:** Vypočítejte dvojný integrál funkce $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ přes kruh se středem v počátku o poloměru a .

Řešení: Integračním oborem je množina $D = \{(x, y) ; x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Při přímém

použití Fubiniovy věty dostáváme

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_{-a}^a \left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy \right) dx .$$

Zde ovšem nelze určit primitivní funkci k funkci $e^{x^2+y^2}$ a tento výpočet nevede k cíli. Při substituci do polárních souřadnic je množina $D \setminus \{(0,0)\}$ obrazem množiny $H = \{(r, \omega) ; r \in (0, a), \omega \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$. Potom

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy &= \iint_H e^{r^2} r dr d\omega = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} e^{r^2} r d\omega \right) dr \\ &= \left(\int_0^a e^{r^2} r dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 d\omega \right) = \pi \int_0^{a^2} e^t dt = \pi(e^{a^2} - 1) , \end{aligned}$$

kdy jsme při výpočtu ještě použili substituci $t = r^2$.

Vedle substituce do polárních souřadnic se též používají substituce do tzv. zobecněných polárních souřadnic (např. při integraci přes vnitřek elipsy).

• **Příklad 10.36:** Vypočítejme dvojný integrál funkce $f(x, y) = xy$ přes množinu D ležící v 1. kvadrantu, která je ohraničena souřadnicovými osami a elipsou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 , \quad a > 0 , \quad b > 0 .$$

Řešení: Využijeme substituci do zobecněných polárních souřadnic. Transformační rovnice (10.21) jsou

$$\left. \begin{aligned} x &= ar \cos \omega \\ y &= br \sin \omega . \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Při této transformaci je množina $D \setminus \{(0,0)\}$ obrazem množiny $H = \{(r, \omega) ; r \in (0, 1), \omega \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle\}$. Zobrazení Φ , definované vztahem (10.25) vyhovuje předpokladům věty 10.32 a pro jeho Jacobián platí

$$J(r, \omega) = \det \begin{bmatrix} a \cos \omega & -ar \sin \omega \\ b \sin \omega & br \cos \omega \end{bmatrix} = abr$$

je různý od nuly na množině H . Substitucí dostáváme

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \iint_H (ar \cos \omega)(br \sin \omega)abr dr d\omega = \\ &= a^2b^2 \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \cos \omega \sin \omega d\omega \right) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\omega d\omega = \frac{1}{8}a^2b^2 . \end{aligned}$$

10.6 Nevlastní integrály. Laplaceův integrál

V předchozích odstavcích této kapitoly jsme uvažovali integrační obory, které byly omezenými množinami v \mathbb{R}^2 . V tomto odstavci rozšíříme pojem dvojného integrálu i na množiny neomezené. Integrál, kde buď integrand nebo integrační obor je neomezený, nazýváme **nevlastním integrálem**. My se budeme dále zabývat pouze případem neomezených integračních oborů.

Omezíme se pouze na množiny $D \subset \mathbb{R}^2$ splňující:

1. Množina D je neomezená.
2. Hranice množiny D je tvořena konečným počtem úseček a polopřímek.

Definice 10.37: Necht' je dána množina D s vlastnostmi 1. a 2. uvedenými výše. Uvažujme posloupnost množin D_n , $n = 1, 2, \dots$, které vzniknou průnikem množiny D a kruhu se středem v počátku o poloměru n . (Každá z těchto množin je standardní množina.) Necht' dále funkce $f(x, y)$ je omezená funkce na množině D a necht' pro každé n existuje dvojný integrál

$$\iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy . \quad (10.26)$$

Potom limitu (pokud existuje a je vlastní) posloupnosti (10.26) nazveme **nevlastním dvojným integrálem** funkce $f(x, y)$ přes množinu D , tj.

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy . \quad (10.27)$$

Podle této definice však výpočty provádět nebudeme. Při výpočtech se omezíme na integrační obory, které vzniknou jako kartézský součin dvou intervalů, z nichž alespoň jeden bude neomezený. Pro takovéto obory platí analogie Fubiniovy věty 10.4 pro obdélníkový obor.

Věta 10.38:

Je-li funkce $f(x, y)$ spojitá a omezená na množině $D = \langle a, +\infty \rangle \times \langle c, +\infty \rangle$ je

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx \right) dy , \quad (10.28)$$

pokud existují oba nevlastní jednorozměrné integrály na pravé straně. Pro množiny D tvaru $\langle a, b \rangle \times \langle c, +\infty \rangle$ nebo $\langle -\infty, +\infty \rangle \times \langle c, d \rangle$, apod., platí obdobné vztahy k (10.28).

• **Příklad 10.39:** Vypočítejme dvojný integrál funkce $f(x, y) = ((x^2 + 1)(y^2 + 1))^{-1}$ přes množinu $D = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle$.

Řešení: Podle věty 10.38 dostáváme

$$\iint_D \frac{1}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \, dx \, dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \, dx \right) dy =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2 + 1} dy \right) = [\arctg x]_0^1 \cdot [\arctg y]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \arctg y = \frac{\pi^2}{8} .$$

• **Příklad 10.40:** Vypočítejme dvojný integrál funkce $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$ přes množinu $D = \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle$.

Řešení: Vypočítejme nejprve dvojný integrál přes množinu D_n , která je průnikem množiny D a kruhu o poloměru n , $n \in \mathbb{N}$. Množina $D_n = \{(x, y) ; x^2 + y^2 \leq n^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ je čtvrtkruh a tedy uijeme substituci do polárních souřadnic. Dostáváme:

$$\begin{aligned} \iint_{D_n} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy &= \int_0^n \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{r^2 \cos^2 \omega + r^2 \sin^2 \omega + 1} r d\omega \right) dr = \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} 1 d\omega \right) \cdot \left(\int_0^n \frac{r}{r^2 + 1} dr \right) = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(r^2 + 1) \right]_0^n = \frac{\pi}{4} \ln(n^2 + 1) . \end{aligned}$$

Nyní

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \ln(n^2 + 1) = +\infty ,$$

tedy integrál diverguje.

Substituční metodu lze ale použít přímo a vyhnout se tak počítání limity integrálů přes množiny D_n . Dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy &= \iint_H \frac{r}{r^2 + 1} dr d\omega = \left(\int_0^{\pi/2} 1 d\omega \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} \frac{r}{r^2 + 1} dr \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \ln(r^2 + 1) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \lim_{r \rightarrow \infty} \ln(r^2 + 1) = +\infty , \end{aligned}$$

kde $H = \{(r, \omega) ; r \in (0, +\infty), \omega \in \langle 0, \pi/2 \rangle\}$.

• **Příklad 10.41:** Vypočítejme dvojný integrál funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

přes množinu $D = \langle 0, +\infty \rangle \times \langle -\infty, 0 \rangle$.

Řešení: Při substituci do polárních souřadnic, kde

$$H = \{(r, \omega) ; r \in (0, +\infty), \omega \in \langle 3\pi/2, 2\pi \rangle\},$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy &= \iint_H \frac{r}{(r^2 + 1)r} dr d\omega = \\ &= \left(\int_{3\pi/2}^{2\pi} 1 d\omega \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{r^2 + 1} dr \right) = \frac{\pi}{2} [\arctg r]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \arctg r = \frac{\pi^2}{4} . \end{aligned}$$

Na závěr tohoto odstavce si ještě ukážeme použití substituce ve dvojném integrálu k výpočtu jistého nevlastního integrálu funkce jedné proměnné. Jedná se o integrál

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx, \quad a > 0 \quad (\text{tzv. Laplaceův integrál}) \quad (10.29)$$

Výpočet tohoto integrálu pomocí primitivní funkce není možný, protože primitivní funkci k e^{-ax^2} nelze spočítat. Přitom hodnota tohoto integrálu (který konverguje, jak lze ukázat pomocí srovnávacího kritéria) je důležitá v mnoha technických oborech, např. ve statistice a fyzikální chemii.

• **Příklad 10.42:** Vypočtěme integrál

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad (10.30)$$

Řešení: Uvažujme množinu $D = \langle 0, +\infty \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle$. Pro dvojný integrál funkce $e^{-(x^2+y^2)}$ přes množinu D platí:

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = I^2. \quad (10.31)$$

Tento dvojný integrál vypočítáme substitucí do polárních souřadnic. Označme $H = \{(r, \omega) ; r \in (0, +\infty), \omega \in \langle 0, \pi/2 \rangle\}$. Potom

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_H e^{-r^2} r dr d\omega = \left(\int_0^{\pi/2} 1 d\omega \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) + \frac{1}{2} e^0 \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (10.32)$$

Porovnáním pravých stran vztahů (10.31) a (10.32) pro dvojný integrál dostáváme hledanou hodnotu Laplaceova integrálu

$$I^2 = \frac{\pi}{4}, \text{ tj. } I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}. \quad (10.33)$$

Cvičení 10.43: Analogickým postupem jako v předchozím příkladu vypočtěte Laplaceův integrál (10.29).

• **Poznámka 10.44:** Integrál (10.29) lze ovšem vypočítat, s použitím výsledku příkladu 10.42, přímo. Dokonce pro $a > 0$ a $b > 1$ máme

$$\int_0^{+\infty} b^{-ax^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2 \ln b} dx = \frac{1}{\sqrt{a \ln b}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a \ln b}},$$

kdy při výpočtu jsme použili substituci $\sqrt{a \ln b} x = t$ a vztahu (10.33).

10.7 Trojný integrál

Na závěr této kapitoly se ještě stručně seznámíme s **trojným integrálem**. Protože teorie a způsoby výpočtu trojného integrálu jsou velmi podobné teorii a způsobům výpočtu dvojného integrálu, nebudeme je podrobně rozebírat, ale omezíme se na vysvětlení na příkladech. Ukážeme si jak počítat trojný integrál funkce $f(x, y, z)$ přes množinu $D \subset \mathbb{R}^3$, který značíme

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (10.34)$$

• **Poznámka 10.45:** Interpretujeme-li hodnoty nezáporné funkce $f(x, y, z)$ jako hustotu v bodě (x, y, z) tělesa $D \subset \mathbb{R}^3$, je možno **fyzikálně** interpretovat hodnotu trojného integrálu (10.34) jako **hmotnost tělesa D** . (Tato interpretace vyplývá ze zavedení trojného integrálu jako limity jistých součtů, které odpovídají součtu hmotností malých kvádrů, na které přibližně rozdělíme těleso T , kdy hustota f je na každém z kvádrů již přibližně konstantní funkcí.)

Poznamenejme, že pro trojný integrál platí analogie Fubiniovy věty 10.20, která převádí výpočet trojného integrálu na trojnásobnou integraci. Je-li D kvádr $\langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \langle a_3, b_3 \rangle$ (analogie obdélníku u dvojného integrálu), jsou integrační meze u jednotlivých integrálů v trojnásobné integraci konstantní. V obecném případě jsou konstantní pouze meze vnějšího integrálu.

• **Příklad 10.46:** Vypočtěme $\iiint_D (x + 2y + 3z) \, dx \, dy \, dz$, kde $D \subset \mathbb{R}^3$ je krychle $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Řešení:

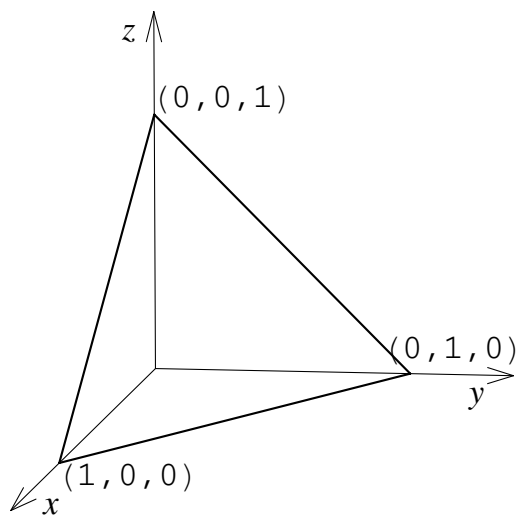
$$\begin{aligned} \iiint_D (x + 2y + 3z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x + 2y + 3z) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[xz + 2yz + \frac{3}{2}z^2 \right]_0^1 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(x + 2y + \frac{3}{2} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[xy + y^2 + \frac{3}{2}y \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x + \frac{5}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x \right]_0^1 = 3. \end{aligned}$$

Výsledek předchozího příkladu je možno podle poznámky 10.45 fyzikálně interpretovat následovně: Představuje-li funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ hustotu materiálu v bodě (x, y, z) krychle D , je hodnota $\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 3$ rovna hmotnosti celé krychle.

• **Příklad 10.47:** Vypočtěme $\iiint_D x \, dx \, dy \, dz$, kde D je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, viz obr. 10.19.

Řešení: Daný čtyřstěn je zřejmě ohraničen souřadnicovými rovinami a rovinou $x + y + z = 1$. Daný trojný integrál převedeme na trojnásobnou integraci. Zvolme pořadí integrací dz , dy , dx (tedy integrace podle x je vnější). Protože průnik roviny $x + y + z = 1$ s rovinou $z = 0$ je přímka $x + y = 1$, je pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $y \in \langle 0, 1 - x \rangle$ a $z \in \langle 0, 1 - x - y \rangle$, tedy

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 - x \rangle, z \in \langle 0, 1 - x - y \rangle \} .$$



Obrázek 10.19:

Tedy

$$\begin{aligned}
 \iiint_D x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} x \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} [xz]_0^{1-x-y} dy \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x - x^2 - xy) dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy - x^2y - \frac{xy^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\
 &= \int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3 - \frac{x(1-x)^2}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 \right) dx = \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

Na závěr tohoto odstavce zavedme ještě střední (průměrnou) hodnotu funkce tří proměnných definované na ohraničené množině $D \subset \mathbb{R}^3$. Definice a následující věta o nabývání střední hodnoty jsou zcela analogické definici 10.27 a větě 10.28 pro funkci dvou proměnných.

Definice 10.48: Je-li $f(x, y, z)$ spojitá funkce na “standardní” množině $D \subset \mathbb{R}^3$, pak **střední hodnotou** funkce f na D rozumíme číslo

$$\text{prm} \{ f(x, y, z) ; (x, y, z) \in D \} = \frac{\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_D dx \, dy \, dz}$$

Věta 10.49:

Je-li funkce $f(x, y, z)$ spojitá na “standardní” uzavřené množině D , pak existuje bod $(c_1, c_2, c_3) \in D$ takový, že $\text{prm}\{f(x, y, z) ; (x, y, z) \in D\} = f(c_1, c_2, c_3)$.

Fyzikální význam předchozí věty lze vyjádřit následovně: V tělese D existuje bod (c_1, c_2, c_3) takový, že hustota v tomto bodě je rovna průměrné hustotě tělesa D .

• **Příklad 10.50:** Vypočtěme střední hodnotu funkce $f(x, y, z) = x$ na čtyřřtěnu D s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Řešení: Podle výsledku příkladu 10.47 je $\iiint_D x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{24}$.

Hodnota $\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz$ je objem daného čtyřřtěnu D , tedy $\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{6}$. Tedy

$$\text{prm}\{f(x, y, z) ; (x, y, z) \in D\} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

10.8 Substituční metoda pro trojný integrál

Analogicky odstavci 10.5 lze i při výpočtu trojného integrálu použít substituční metodu.

Nechť $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3,)$ je zobrazení, které zobrazuje body (u, v, w) množiny $H \subset \mathbb{R}^3$ na body (x, y, z) množiny $D \subset \mathbb{R}^3$, tj. $\Phi(H) = D$. (O množinách D a H budeme předpokládat, že jsou omezené a jejich hranice má vlastnosti obdobné vlastnostem pro standardní množiny v \mathbb{R}^2 .)

Píšeme $(x, y, z) = \Phi(u, v, w)$, a tedy ve složkách

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(u, v, w) \\ y &= \varphi_2(u, v, w) \\ z &= \varphi_3(u, v, w) \end{aligned} \right\} \quad (10.35)$$

Analogicky, jako v odstavci 10.5 nazýváme tyto vztahy transformačními rovnicemi. Příkladem zobrazení Φ mohou sloužit vztahy C.2 a C.5, které definují cylindrické a sférické souřadnice.

O zobrazení Φ budeme předpokládat:

1. Zobrazení Φ je na H prosté, tj. pro všechna $(u_1, v_1, w_1) \in H$ a $(u_2, v_2, w_2) \in H$ taková, že $(u_1, v_1, w_1) \neq (u_2, v_2, w_2)$ je $\Phi(u_1, v_1, w_1) \neq \Phi(u_2, v_2, w_2)$.
2. Funkce Φ je na množině H spojitě diferencovatelná, tj. funkce φ_1 , φ_2 a φ_3 mají na H spojitě parciální derivace 1. řádu.
3. Jacobián (determinant Jacobiho matice) zobrazení Φ je pro všechna $(u, v, w) \in H$ různý od nuly, tj.

$$J(u, v, w) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial w}(u, v, w) \end{bmatrix} \neq 0. \quad (10.36)$$

Opět zobrazení Φ splňující podmínky 1. - 3. nazýváme **regulární**.

Za těchto předpokladů platí věta analogická větě 10.32:

Věta 10.51: (Substituce ve trojném integrálu)

Nechť existuje trojný integrál funkce $f(x, y, z)$ přes množinu $D \subset \mathbb{R}^3$ a nechť zobrazení $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ je regulární a zobrazuje množinu H na množinu D . Pak

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ & = \iiint_H f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) \cdot |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw . \end{aligned} \quad (10.37)$$

Substituci ve trojném integrálu si objasníme na příkladech, ve kterých se omezíme pouze na substituci do cylindrických a sférických souřadnic, které jsme zavedli v dodatku C. Vypočteme nejprve Jacobián pro tyto substituce, který pak při řešení příkladů již nebudeme znovu počítat.

1. Cylindrické souřadnice

Cylindrické souřadnice jsou popsány transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

a zobrazení $\Phi(\rho, \varphi, z) = (x, y, z)$ je prosté na množině

$$\{(\rho, \varphi, z) ; \rho > 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, z \in \mathbb{R}\}$$

a zobrazuje tuto množinu na \mathbb{R}^3 s výjimkou bodů osy z . Pro Jacobián tohoto zobrazení platí podle vztahu (10.36):

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho .$$

Substituci do cylindrických souřadnic obvykle používáme pokud integrujeme přes válec nebo jeho část.

2. Sférické souřadnice

Sférické souřadnice jsou popsány transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

a zobrazení $\Phi(r, \varphi, \vartheta) = (x, y, z)$ je prosté na množině

$$\{(r, \varphi, \vartheta) ; r > 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle\}$$

a zobrazuje tuto množinu na \mathbb{R}^3 s výjimkou počátku. Pro Jacobián tohoto zobrazení platí podle vztahu (10.36):

$$J(r, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{vmatrix} = -r^2 \sin \vartheta .$$

Substituci do sférických souřadnic obvykle používáme pokud integrujeme přes kouli nebo její část.

• **Příklad 10.52:** VypočtĚme $\iiint_D (x^2 + y^2)z \, dx \, dy \, dz$, kde $D \subset \mathbb{R}^3$ je válec o poloměru podstavy $r = 2$ a výšce $v = 5$, osa válce je totožná s osou z , podstava leží v rovině $z = 0$ a $z \geq 0$.

Řešení: Daný válec

$$D = \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 \leq 4 , 0 \leq z \leq 5 \}$$

je při transformaci do cylindrických souřadnic obrazem množiny

$$H = \{(\rho, \varphi, z) ; \rho \in \langle 0, 2 \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, z \in \langle 0, 5 \rangle\} .$$

Množina H je (v cylindrických souřadnicích) kvádr, na rozdíl od množiny D , a při použití Fubiniovy věty budou meze u jednotlivých integrálů konstantní. Dosazením do vztahu (10.37) dostáváme:

$$\begin{aligned} \iiint_D (x^2 + y^2)z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_H (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)z \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \\ &= \iiint_H \rho^3 z \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^5 \rho^3 z \, dz \right) d\varphi \right) d\rho \\ &= \left(\int_0^2 \rho^3 \, d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^5 z \, dz \right) = 100\pi . \end{aligned}$$

• **Příklad 10.53:** Pomocí trojnĚho integrálu odvodĚme vzorec pro výpočet objemu koule o poloměru R .

Řešení: Uvažujme kouli

$$D = \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} .$$

Při transformaci do sférických souřadnic je tato koule obrazem kvádru

$$H = \{(r, \varphi, \vartheta) ; r \in \langle 0, R \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle\} .$$

Pro objem koule pak dostáváme

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_H |r^2 \sin \vartheta| \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \left(\int_0^R r^2 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = \frac{4}{3} \pi R^3 . \end{aligned}$$

Cvičení 10.54: Pomocí substituce pro trojný integrál vypočtete objem rotačního válce z příkladu 10.52.

• **Příklad 10.55:** Vypočtete hmotnost polokoule D o poloměru R se středem v počátku ležící v polorovině $z \geq 0$, je-li její hustota v bodě (x, y, z) rovna $x^2 + y^2$.

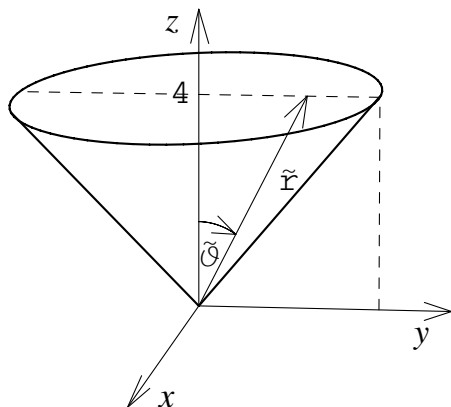
Řešení: Použijeme opět substituci do sférických souřadnic. Pro množinu H platí

$$H = \{(r, \varphi, \vartheta) ; r \in \langle 0, R \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \vartheta \in \langle 0, \pi/2 \rangle\} .$$

Tedy

$$\begin{aligned} m &= \iiint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_H (r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta) |r^2 \sin \vartheta| \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \iiint_H (r^4 \sin^3 \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \left(\int_0^R r^4 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \right) \\ &= 2\pi \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = 2\pi \frac{R^5}{5} \left[-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{15} \pi R^5 . \end{aligned}$$

• **Příklad 10.56:** Pomocí trojného integrálu vypočtete objem kužele D , znázorněného na obr. 10.20, jehož poloměr podstavy i výška jsou rovny 4.



Obrázek 10.20:

Řešení: Při transformaci do sférických souřadnic je množina D obrazem množiny

$$H = \{(r, \varphi, \vartheta) ; r \in \langle 0, \frac{4}{\cos \vartheta} \rangle,$$

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \vartheta \in \langle 0, \pi/4 \rangle\} .$$

(Pro úhel $\tilde{\vartheta}$ je totiž $\cos \tilde{\vartheta} = \frac{4}{r}$, viz obr. 10.20.)

Tedy

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_H |r^2 \sin \vartheta| \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{4/\cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\vartheta \right) d\varphi = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/4} \sin \vartheta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{4/\cos \vartheta} d\vartheta \right) = \\ &= 2\pi \frac{4^3}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \vartheta}{\cos^3 \vartheta} d\vartheta = 2\pi \frac{4^3}{3} \left[\frac{1}{2\cos^2 \vartheta} \right]_0^{\pi/4} = \frac{64}{3} \pi . \end{aligned}$$

Návody ke cvičením z kap. 10

- 10.8** Použijte větu 10.7, volte $g(x) = x^2$ a $h(y) = 1/(1 + y^2)$.
- 10.10** Využijte znalosti integrálů z elementárních funkcí uvedených v Tabulce III, skript [MI].
- 10.11** Ve dvojnásobné integraci volte vnitřní integraci podle y . Pro výpočet tohoto integrálu užíjte substituci $t = 1 + x^2 + y^2$. Pro výpočet vnějšího integrálu pak užíjte Tabulky IV, skript [MI].
- 10.26** Je výhodné uvažovat integrační obor jako množinu 2. typu. Úsečky AC a BC vyjádřete jako grafy funkcí $\psi_1(y)$ a $\psi_2(y)$.
- 10.30** Nakreslete si uvažovaný integrační obor, který není ani množinou 1. typu ani množinou 2. typu. Rozdělte jej na dvě množiny 1. typu např. přímkou $x = 2$.
- 10.34** Využijte substituce do polárních souřadnic, která převede integraci přes dané mezikruží na integraci přes obdélník.
- 10.43** Postupujte jako při řešení příkladu 10.42.
- 10.54** Volte substituci do cylindrických souřadnic.

Kapitola 11

Křivkový integrál skalárního pole

Úmluva: V této a následující kapitole budeme používat toto označení. Množinu \mathbb{R}^3 , interpretovanou jako množinu bodů, budeme značit E^3 a tutéž množinu \mathbb{R}^3 , interpretovanou jako množinu geometrických vektorů (orientovaných úseček), budeme značit V^3 .

11.1 Definice prostorové křivky

Pojem prostorové křivky, tj. křivky v E^3 , je přirozeným zobecněním pojmu rovinné křivky zavedené v Kap. 7, [MI].

Definice 11.1: Hladkou křivkou v E^3 nazýváme takovou množinu bodů $\mathcal{K} \subset E^3$, jejichž kartézské souřadnice x, y, z jsou dány rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I, \quad (11.1)$$

tj.

$$P \in \mathcal{K} \iff P(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (11.2)$$

přičemž o funkcích $x(t), y(t), z(t)$ argumentu t předpokládáme, že:

1. jsou spojité na nějakém intervalu I (nejčastěji $I = \langle a, b \rangle$),
2. mají spojité derivace na I ,
3. $[x'(t), y'(t), z'(t)] \neq [0, 0, 0]$ pro všechna $t \in I$.

Úmluva: V dalším textu (zejména v příkladech) budeme křivku v E^2 chápat jako speciální případ křivky v E^3 , kde v (11.1) klademe $z(t) = 0$ pro všechna $t \in I$.

Jestliže požadavky 2. a 3. v předchozí definici jsou splněny s výjimkou konečně mnoha bodů intervalu I , mluvíme o křivce **po částech hladké**.

Tři funkce $x(t), y(t), z(t), t \in I$ z (11.1) definují **zobrazení**

$$\mathbf{r} : I \rightarrow E^3,$$

kde

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

tj.

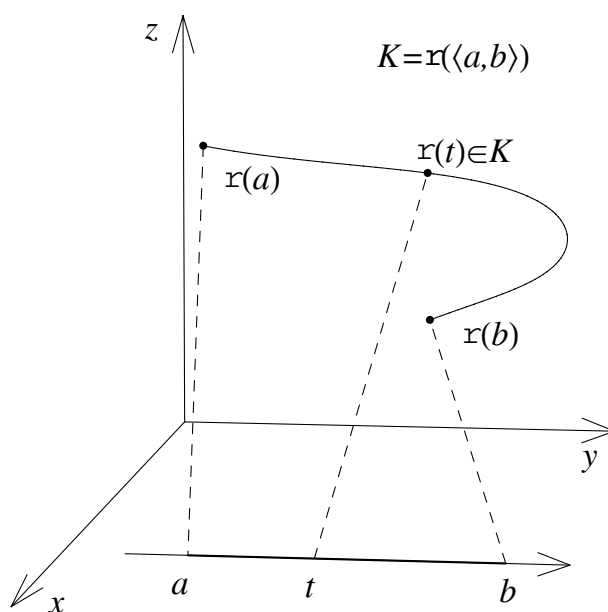
$$P = \mathbf{r}(t).$$

Zobrazení $\mathbf{r} : I \rightarrow E^3$ nazýváme **parametrizací** křivky \mathcal{K} a rovnice (11.1) **parametrickými rovnicemi** křivky \mathcal{K} .

Křivka \mathcal{K} je tudíž obrazem intervalu I při zobrazení $\mathbf{r} : I \rightarrow E^3$, tj.

$$\mathcal{K} = \mathbf{r}(I),$$

viz obr.11.1. Funkce $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ jsou souřadnicovými funkcemi zobrazení $\mathbf{r} : I \rightarrow E^3$.



Obrázek 11.1:

Je-li parametrizace $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$ hladké křivky \mathcal{K} **prosté zobrazení**, tzn. že pro každé $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$, nazýváme křivku \mathcal{K} **hladkým obloukem** nebo krátce **obloukem**. Body $\mathbf{r}(a)$, $\mathbf{r}(b)$ nazýváme **krajními body** oblouku \mathcal{K} . Bod $\mathbf{r}(a)$ nazýváme **počátečním bodem** a bod $\mathbf{r}(b)$ **koncovým bodem** oblouku \mathcal{K} . Krátce píšeme $p.b.\mathcal{K}$ a $k.b.\mathcal{K}$.

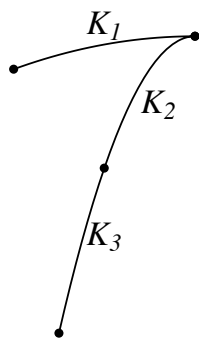
Křivka \mathcal{K} se nazývá **jednoduchá uzavřená** jestliže její parametrizace

$$\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$$

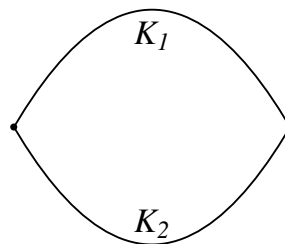
je prostá na otevřeném intervalu (a, b) a

$$\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b).$$

Je dobré si uvědomit, že každou jednoduchou po částech hladkou křivku \mathcal{K} lze vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha oblouků $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_n$ tak, že libovolné dva oblouky



Obrázek 11.2:



Obrázek 11.3:

$\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j, i \neq j$ mají společné nejvýše krajní body, viz obr. 11.2 nebo 11.3. Pak

$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i.$$

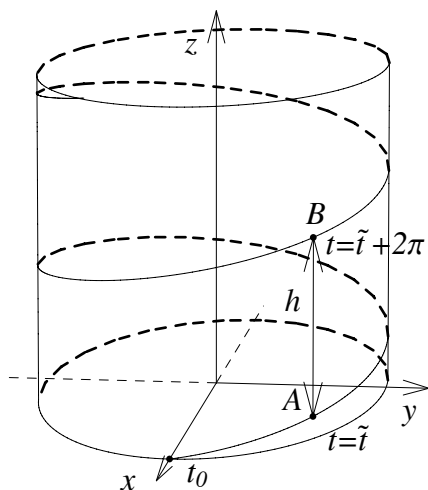
• **Poznámka 11.2:** Tím, že jsme na oblouku určili jeho počáteční a koncový bod, jsme oblouk tak zvaně **orientovali**. (Podrobněji o tom viz dále.)

• **Příklad 11.3:** Prostorová křivka daná parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= a \sin t \\ z &= bt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{11.3}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b \neq 0$, se nazývá **šroubovice**, viz obr. 11.4. Tato křivka leží na válcové ploše o poloměru a , neboť eliminací parametru t z prvních dvou rovnic dostáváme

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{11.4}$$



Obrázek 11.4:

Osou válcové plochy je osa z . “Rychlost stoupání” závitů šroubovice udává číslo b . Pokud $b = 0$, jsou rovnice (11.3) parametrickými rovnicemi kružnice ležící v rovině $z = 0$. Budiž bod

$$A = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$$

bodem šroubovice pro hodnotu parametru t_0 a bod

$$B = (x(t_0 + 2\pi), y(t_0 + 2\pi), z(t_0 + 2\pi))$$

bodem křivky pro hodnotu parametru $t_0 + 2\pi$. Z prvních dvou rovnic (11.3) plyne, že

$$x(t_0) = x(t_0 + 2\pi), \quad y(t_0) = y(t_0 + 2\pi).$$

To znamená, že bod B bude ležet pro $b > 0$ nad bodem A (viz obr. 11.4) a pro $b < 0$ by

bod B ležel pod bodem A . Říkáme, že za čas $t = 2\pi$ oběhne bod křivky právě jeden závit šroubovice. Výška závitu je rovna

$$h = z(t_0 + 2\pi) - z(t_0) = b(t_0 + 2\pi) - b t_0 = 2\pi b.$$

Šroubovice není uzavřenou křivkou a jelikož

$$[x'(t), y'(t), z'(t)] = [-a \sin t, a \cos t, b] \neq [0, 0, 0]$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$, je křivkou hladkou.

11.2 Tečný vektor

Nechť

$$\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$$

je parametrizace hladké křivky \mathcal{K} a $P_0 \in \mathcal{K}$ je bod křivky, odpovídající hodnotě parametru $t = t_0$. To znamená, že $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$. Pak vektor

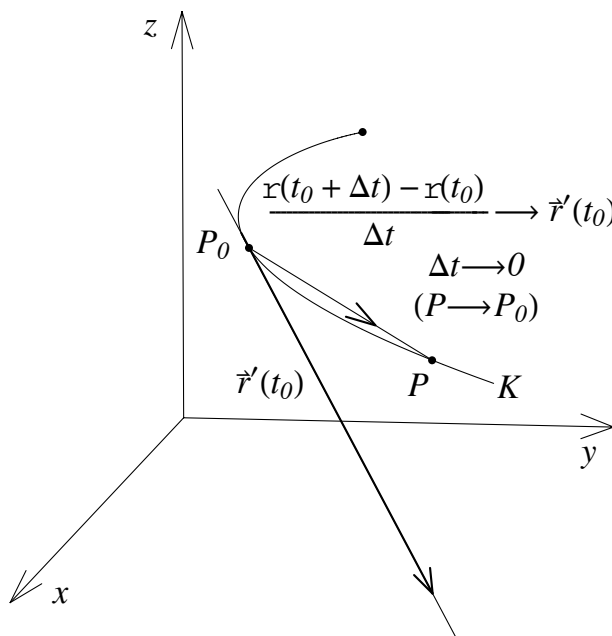
$$\vec{r}'(t_0) = [x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)] \tag{11.5}$$

je směrovým vektorem tečny ke křivce \mathcal{K} v bodě P_0 . Je-li t_0 jeden z krajních bodů intervalu $\langle a, b \rangle$, uvažujeme ve výrazu (11.5) příslušné jednostranné derivace funkcí $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Vektor

$$\vec{r}'(t_0)$$

nazýváme **tečným vektorem** křivky \mathcal{K} v bodě $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$. Srovnej s odstavcem 7.4 v [MI], str. 147-151. Viz též obr.11.5.



Obrázek 11.5:

- **Příklad 11.4:** Určeme tečný vektor ke šroubovici

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 3t$$

v bodě $A = (-2, 0, 3\pi)$ šroubovice.

Řešení: Bod A odpovídá hodnotě parametru $t = \pi$. Pak

$$\vec{r}'(t) = [-2 \sin t, 2 \cos t, 3]$$

a

$$\vec{r}'(\pi) = [0, -2, 3].$$

Parametrické rovnice tečny ke šroubovici v bodě A jsou

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= -2u \\ z &= 3\pi + 3u, \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

• **Poznámka 11.5:** Pohlížíme-li na parametrické rovnice křivky \mathcal{K} jako na **pohybové rovnice** hmotného bodu, pohybujícího se po křivce \mathcal{K} , je tečný vektor $\vec{r}'(t)$ **vektorem okamžité rychlosti** (viz [MI], § 7.4.).

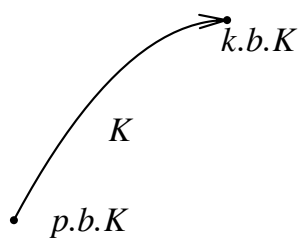
• **Poznámka 11.6:** Hladká křivka má v každém svém bodě $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$ tečnu, jejíž směrový vektor je roven tečnému vektoru $\vec{r}'(t_0) = [x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)]$. Jednoduchá křivka po částech hladká nemusí mít tečnu v konečně mnoha bodech $\mathbf{r}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Tyto body odpovídají hodnotám parametru t_1, t_2, \dots, t_k , v nichž buď $\vec{r}'(t)$ není spojitá nebo $\vec{r}'(t) = \vec{0}$. Takové body mohou být body “lomu” křivky nebo body “zvratu”.

11.2.1 Orientace křivky

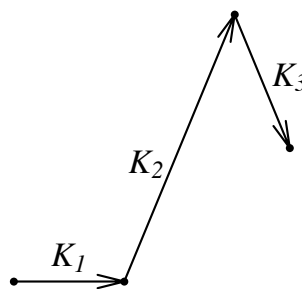
Nejprve ukážeme, jak orientujeme **oblouk**. Oblouk je orientovaný, jestliže jeden z jeho krajních bodů je určen jako počáteční bod oblouku a druhý jako koncový bod oblouku, viz obr. 11.6a (Srovnej s orientovanou úsečkou!).

Touto volbou je určen **směr probíhání** bodu po oblouku \mathcal{K} směrem od počátečního ke

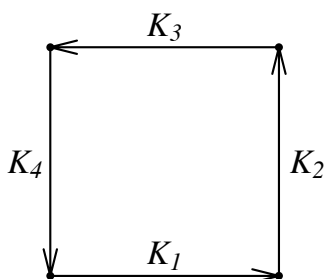
a)



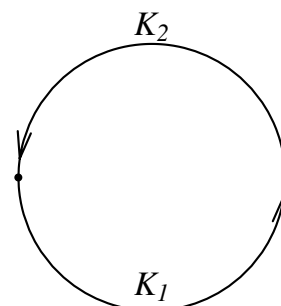
b)



c)



d)



Obrázek 11.6:

koncovému bodu. Na obrázcích znázorňujeme směr probíhání křivky **šipkou**. Je vidět, že na oblouku existují právě dvě možné navzájem opačné orientace. Je-li \mathcal{K} orientovaný oblouk, pak $-\mathcal{K}$ značíme oblouk **opačně orientovaný**. Zřejmě

$$p.b.\mathcal{K} = k.b.(-\mathcal{K}) \quad a \quad k.b.\mathcal{K} = p.b.(-\mathcal{K}).$$

Budiž C hladká, resp. po částech hladká křivka a

$$C = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i$$

její rozklad na konečný počet oblouků. Orientujme oblouky \mathcal{K}_i , $i = 1, 2, \dots, n$ tak, aby

$$p.b.\mathcal{K}_{i+1} = k.b.\mathcal{K}_i.$$

Pak je křivka C orientována tak, že

$$p.b.C = p.b.\mathcal{K}_1 \quad a \quad k.b.C = k.b.\mathcal{K}_n,$$

viz obr. 11.6b)c)d). V tomto případě se pak místo zápisu $C = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{K}_i$ používá zápis ve tvaru

$$C = \mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \dots \dot{+} \mathcal{K}_n$$

a říkáme, že křivka C je **orientovaným součtem** oblouků $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$.

Pomocí parametrizace lze na křivce definovat orientaci takto: Nechtě

$$\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$$

je parametrizace křivky \mathcal{K} . Zvolíme-li

$$\mathbf{r}(a) = p.b.\mathcal{K} \quad a \quad \mathbf{r}(b) = k.b.\mathcal{K},$$

pak probíhá-li parametr t interval $\langle a, b \rangle$ od a do b , probíhá bod $\mathbf{r}(t)$ křivku \mathcal{K} od jejího počátečního bodu ke koncovému.

Říkáme, že křivka je v tomto případě orientována pomocí parametrizace \mathbf{r} ve směru rostoucího parametru, krátce že křivka \mathcal{K} je **orientována souhlasně s parametrizací** $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$.

11.3 Přípustné změny parametrizace

Každou křivku lze parametrizovat nekonečně mnoha způsoby. Mějme danu hladkou křivku \mathcal{K} a nechtě

$$\mathbf{r}_1 : I_1 \rightarrow E^3$$

je její nějaká parametrizace. Pak zřejmě $\mathbf{r}_1(I_1) = \mathcal{K}$.

Dále budiž dán interval I_2 a prosté zobrazení

$$\varphi : I_2 \rightarrow I_1 \tag{11.6}$$

intervalu I_2 na interval I_1 takové, že funkce

$$t = \varphi(s), \quad s \in I_2, \quad t \in I_1,$$

má na intervalu I_2 všude spojitou nenulovou derivaci, tj.

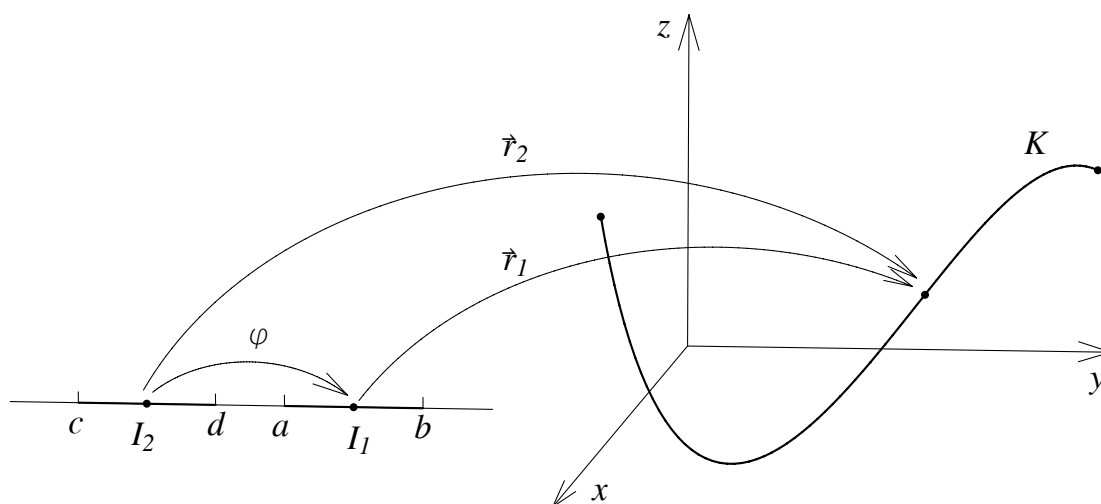
$$\varphi'(s) \neq 0 \tag{11.7}$$

pro všechna $s \in I_2$. Pak zobrazení $\mathbf{r}_2 : I_2 \rightarrow E^3$, které dostaneme složením zobrazení \mathbf{r}_1 a φ , tj.

$$\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(\varphi(s)) \tag{11.8}$$

je opět parametrizací křivky \mathcal{K} a veličina s je novým parametrem křivky \mathcal{K} .

Popsaný postup změny parametrizace je znázorněn na obr. 11.7.



Obrázek 11.7:

Funkce $t = \varphi(s)$ s vlastnostmi (11.6) a (11.7) definuje tzv. **přípustnou změnu parametrizace**. Splňuje-li totiž parametrizace $\mathbf{r}_1 : I_1 \rightarrow E^3$ podmínky 1., 2., 3. z definice 23.1, pak nová parametrizace $\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(\varphi(s))$ splňuje rovněž tyto podmínky. (Přesvědčte se o tom sami.)

• **Příklad 11.7:** Úsečka \overline{AB} , kde $A = (1, 2, 3)$, $B = (-1, 5, 1)$ má parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 3 - 2t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Položme $t = \varphi(s) = s - 2$. Pak

$$\varphi : \langle 2, 3 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

je přípustná změna parametru a parametrizace úsečky \overline{AB} pomocí nového parametru s má tvar

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2(s - 2) = 5 - 2s \\ y &= 2 + 3(s - 2) = -4 + 3s \\ z &= 3 - 2(s - 2) = 7 - 2s, \quad s \in \langle 2, 3 \rangle. \end{aligned}$$

Označíme-li

$$\mathbf{r}_1(t) = [1 - 2t, 2 + 3t, 3 - 2t]$$

a $t = \varphi(s) = s - 2$, pak

$$\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(s - 2) = [5 - 2s, -4 + 3s, 7 - 2s].$$

Cvičení 11.8: Hladká křivka \mathcal{K} na obr. 11.8 má parametrizaci

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t, \quad t \in \langle -1, 1 \rangle. \end{aligned}$$

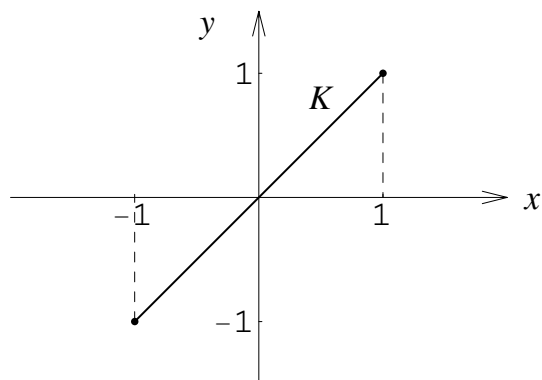
Položme

$$t = \varphi(s) = s^3, \quad s \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Dostaneme novou parametrizaci křivky \mathcal{K} ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= s^3 \\ y &= s^3, \quad s \in \langle -1, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Jedná se o přípustnou změnu parametrizace?



Obrázek 11.8:

• **Poznámka 11.9:** Vzhledem k podmínce (11.7) se množina všech přípustných změn parametrizace křivky \mathcal{K} rozpadá na dvě disjunktní podmnožiny. Do jedné z nich, označme ji

$$O^+(\mathcal{K}),$$

patří rostoucí přípustné změny parametrizace, tj. $\varphi' > 0$, a do druhé, $O^-(\mathcal{K})$ patří klesající přípustné změny parametrizace, tj. $\varphi' < 0$.

11.4 Závislost tečného vektoru na parametrizaci

Nechť

$$\mathbf{r}_1 : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$$

je parametrizace hladké křivky \mathcal{K} . Pak $\mathbf{r}'(t_0)$ je tečný vektor ke křivce \mathcal{K} v bodě $P_0 = \mathbf{r}_1(t_0) \in \mathcal{K}$ pro $t_0 \in \langle a, b \rangle$.

Položme

$$\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(\varphi(s)),$$

kde $\varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ je přípustná změna parametrizace, $t_0 = \varphi(s_0)$.

Pak tečný vektor ke křivce \mathcal{K} v bodě P_0 , určený pomocí parametrizace \mathbf{r}_2 má tvar :

$$\begin{aligned} \vec{r}'_2(s_0) &= \frac{d\mathbf{r}_2(s_0)}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_1(\varphi(s))}{ds} \Big|_{s=s_0} = \\ &= \left[\frac{d\mathbf{r}_1(\varphi(s_0))}{dt} \right] \varphi'(s_0) = \vec{r}'_1(t_0)\varphi'(s_0), \end{aligned}$$

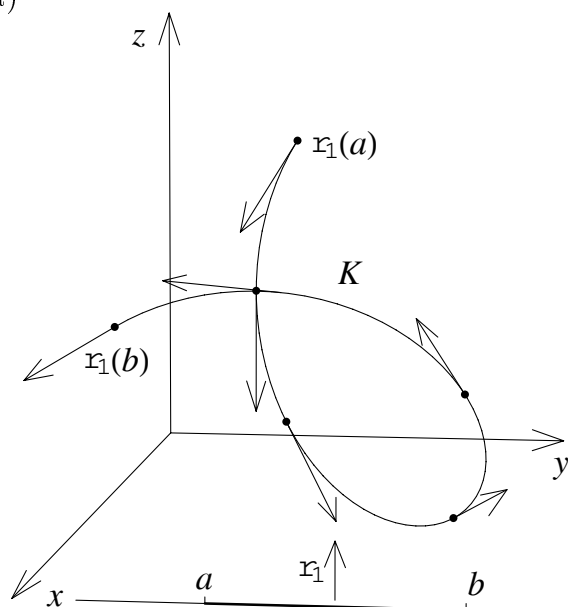
tj.

$$\vec{r}'_2(s_0) = \varphi'(s_0)\vec{r}'_1(t_0). \quad (11.9)$$

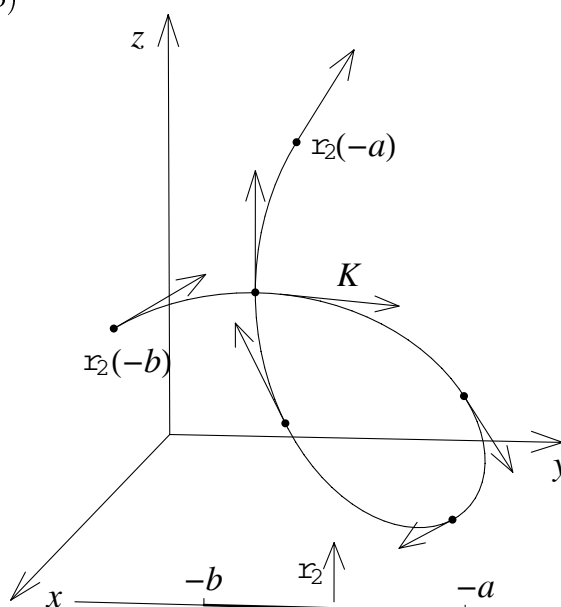
Z tohoto vztahu plyne, že tečný vektor ke křivce \mathcal{K} v bodě P_0 , určený parametrizací \mathbf{r}_2 je roven násobku tečného vektoru určeného parametrizací \mathbf{r}_1 .

Tudíž tečné vektory $\vec{r}'_1(t_0)$ a $\vec{r}'_2(s_0)$ jsou rovnoběžné a je-li $\varphi'(s_0) > 0$, jsou **souhlasně orientované** a je-li $\varphi'(s_0) < 0$, jsou **nesouhlasně orientované**.

a)



b)



Obrázek 11.9:

Závěr: Přípustnou změnou parametrizace se nemění směr tečných vektorů, může se měnit pouze jejich velikost, popřípadě orientace.

Na obr. 11.9a jsou nakresleny tečné vektory ke křivce \mathcal{K} , určené pomocí parametrizace $\mathbf{r}_1 : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$ a na obr. 11.9b jsou nakresleny tečné vektory k téže křivce, avšak určené pomocí parametrizace

$$\mathbf{r}_2 : \langle -b, -a \rangle \rightarrow E^3, \quad \text{kde} \quad \mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(-s).$$

To znamená, že parametrizace \mathbf{r}_2 vznikla z parametrizace \mathbf{r}_1 pomocí přípustné změny parametrizace $t = \varphi(s) = -s$. Vztah (11.9) má v našem případě tvar

$$\vec{r}'_2(s_0) = -\vec{r}'_1(t_0),$$

neboť $\varphi'(s_0) = -1$.

Z obr. 11.9 také vidíme, že směr tečných vektorů určuje směr probíhání křivky \mathcal{K} v souhlasu s danou parametrizací.

11.5 Funkce definované na křivkách

Nechť je dána křivka \mathcal{K} parametrizací

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

tj. parametrické rovnice jsou

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= t^3. \end{aligned} \tag{11.10}$$

Dále uvažujme funkci

$$u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \tag{11.11}$$

s definičním oborem E^3 . Jestli omezíme definiční obor funkce f pouze na křivku \mathcal{K} , dostaneme novou funkci, kterou označíme

$$f|_{\mathcal{K}}$$

Pak $D(f|_{\mathcal{K}}) = \mathcal{K}$ a funkci $f|_{\mathcal{K}}$ nazýváme **restrikcí funkce f** na množinu \mathcal{K} .

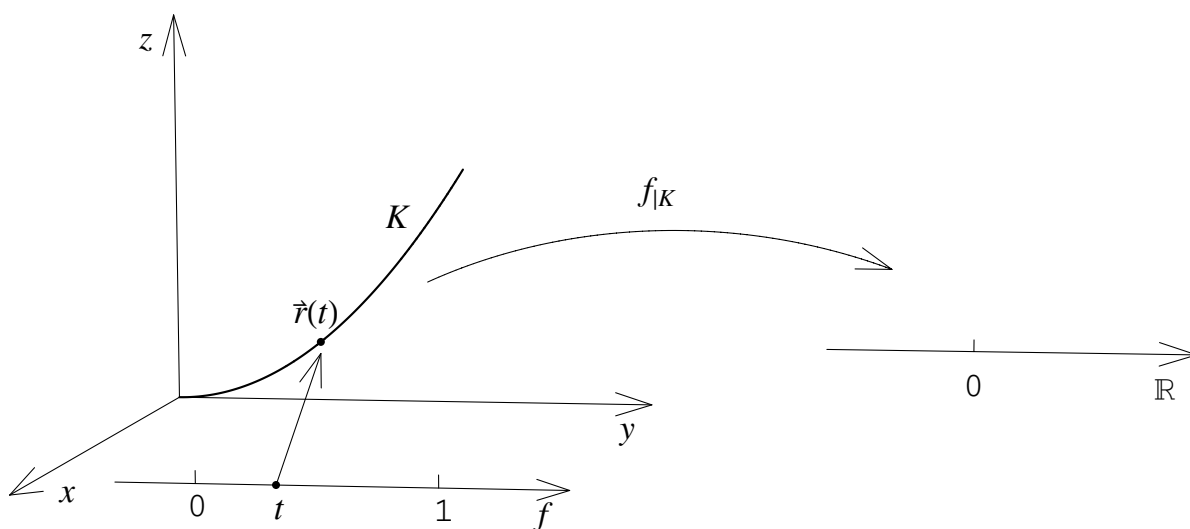
K určení funkčních hodnot funkce $f|_{\mathcal{K}}$ stačí dosadit do funkčního předpisu (11.11) parametrizaci (11.10). Pak dostáváme

$$f|_{\mathcal{K}}(x, y, z) = f(\mathbf{r}_1(t)) = f(t, t^2, t^3) = t^2 + t^4 + t^6 = \tilde{f}_1(t). \tag{11.12}$$

Například hodnotě parametru $t = \frac{3}{4}$ odpovídá bod P křivky \mathcal{K} , $P = (\frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64})$ a tomuto bodu přiřazuje funkce $f|_{\mathcal{K}}$ hodnotu (číslo)

$$f|_{\mathcal{K}}(P) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{16}\right)^2 + \left(\frac{27}{64}\right)^2.$$

• **Poznámka 11.10:** Restrikci $f|_{\mathcal{K}}$ jsme pomocí parametrizace \mathbf{r}_1 přiřadili “pomocnou” funkci $\tilde{f}_1(t)$ jedné proměnné - parametru t . Toto přiřazení je znázorněno na obr. 11.10.



Obrázek 11.10:

Zvolíme-li jinou parametrizaci křivky \mathcal{K} (zadané parametrizací (11.10)), tj. $\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(\varphi(s))$, pak funkce

$$\tilde{f}_2(s) = f(\mathbf{r}_2(s))$$

bude mít jiný tvar a jiný definiční obor než funkce $\tilde{f}_1(t)$, bude mít však stejný obor hodnot!!

Položíme-li v (11.10)

$$t = \varphi(s) = \ln s, \quad s \in \langle 1, e \rangle,$$

pak

$$\mathbf{r}_2(s) = [\ln s, \ln^2 s, \ln^3 s]$$

a

$$\tilde{f}_2(s) = f(\mathbf{r}_2(s)) = \ln^2 s + \ln^4 s + \ln^6 s.$$

• **Příklad 11.11:** Funkce na křivce může být zadána přímo, bez použití restrikce nějaké funkce více proměnných. Například, interpretujeme-li křivku \mathcal{K} jako kovový drát, lze každému bodu $P \in \mathcal{K}$ přiřadit teplotu drátu v bodě P . Dostáváme funkci, jejímž přirozeným definičním oborem je křivka \mathcal{K} . Nebo můžeme každému bodu $P \in \mathcal{K}$ přiřadit **lineární hustotu** $\rho(P)$ látky, z níž je drát zhotoven. Lineární hustotou rozumíme podíl hmotnosti a délky. V jednotkách SI soustavy má tedy rozměr [kg/m]. Dostáváme funkci

$$\rho : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$$

s přirozeným definičním oborem $D(\rho) = \mathcal{K}$.

11.6 Křivkový integrál skalárního pole

Uvažujme reálnou funkci f , definovanou a spojitou na křivce \mathcal{K} , tj.

$$f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Taková funkce se často v aplikacích nazývá **skalárním polem** na křivce \mathcal{K} .

Naším úkolem je zavést integrál funkce f po křivce \mathcal{K} , tj. **křivkový integrál skalárního pole**.

Připomeňme stručně, jak jsme postupovali v kap. 9 při zavedení Riemannova určitého integrálu

$$(R) \int_a^b f(x) dx.$$

Funkce f byla spojitá na intervalu $I = \langle a, b \rangle$, (který nyní můžeme chápat jako speciální případ křivky!). Interval I jsme rozdělili na n menších podintervalů $I_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$, zvolili jsme $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a sestrojili Riemannův integrální součet

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

a položili

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = (R) \int_a^b f(x) dx.$$

Dále jsme v kap. 9 odvodili vzorec pro délku rovinné křivky zadané parametrickými rovnicemi. Tento vzorec lze bezprostředně zobecnit na případ prostorové křivky, což nyní učiníme.

Nechť je oblouk \mathcal{K} parametrizován rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t), \quad t \in \langle a, b \rangle, \end{aligned} \tag{11.13}$$

tj.

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)].$$

Délka l oblouku \mathcal{K} je dána vztahem

$$l = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \tag{11.14}$$

Protože

$$\vec{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)],$$

pak

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

a vztah (11.14) lze psát krátce

$$l = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

Vztah (11.14) lze vysvětlit následovně: Jsou-li rovnice (11.13) pohybovými rovnicemi hmotného bodu v prostoru, pak

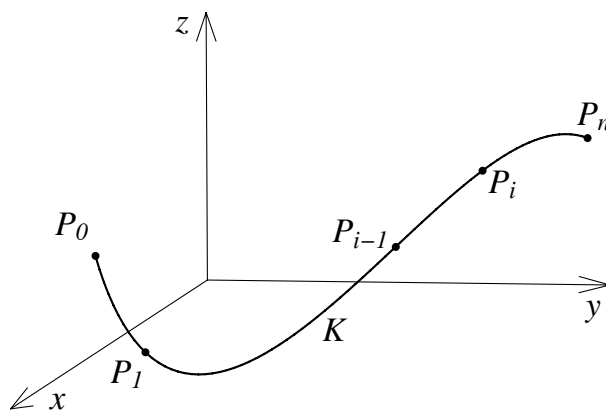
$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

je velikost okamžité rychlosti a tedy

$$l = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

je dráha, kterou bod urazil v čase od $t = a$ do $t = b$.

• **Poznámka 11.12:** Křivku, která není obloukem, rozdělíme na oblouky, jejichž délku stanovíme podle (11.14). Křivku, jejíž délka je konečná, nazýváme **konečnou křivkou**. V dalším budeme pracovat jen s konečnými křivkami.



Obrázek 11.11:

Přístupme k definici integrálu funkce f po křivce \mathcal{K} . Křivku rozdělíme body

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

na n malých oblouků $\widehat{P_{i-1}P_i}$, viz obr. 11.11. Délku i -tého oblouku označme Δs_i . Oblouk $\widehat{P_{i-1}P_i}$ předpokládáme tak malý, že se funkční hodnoty podél tohoto malého oblouku téměř nemění. Můžeme tedy na oblouku $\widehat{P_{i-1}P_i}$ nahradit funkci f konstantou $f(P_{i-1})$, tj. funkční hodnotou funkce f v krajním bodě P_{i-1} našeho oblouku.

Sestrojíme Riemannův integrální součet

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(P_{i-1})\Delta s_i. \quad (11.15)$$

Jestliže dělíme křivku \mathcal{K} na stále větší počet malých oblouků, tj. $n \rightarrow \infty$, přičemž délka každého z nich konverguje k nule, dostaneme posloupnost Riemannových součtů

$$S_n(f), \quad n = 1, 2, \dots$$

Definice 11.13: Následující limitu (o které se dá dokázat, že existuje)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_{i-1})\Delta s_i \quad (11.16)$$

nazýváme **integrálem funkce f po křivce \mathcal{K}** a značíme

$$\int_{\mathcal{K}} f \, ds. \quad (11.17)$$

• **Poznámka 11.14:** Interpretujeme-li funkci f definovanou na křivce \mathcal{K} jako lineární hustotu hmotné křivky (drátu), pak číslo

$$\int_{\mathcal{K}} f \, ds$$

má význam celkové hmotnosti křivky \mathcal{K} , neboť v tomto případě představuje součin $f(P_{i-1})\Delta s_i$ hmotnost oblouku $\widehat{P_{i-1}P_i}$ a Riemannův součet představuje přibližnou hmotnost celé křivky.

• **Poznámka 11.15:** Při zavedení $\int_{\mathcal{K}} f ds$ jsme nikde nepotřebovali použít orientaci křivky \mathcal{K} . Integrál $\int_{\mathcal{K}} f ds$ nezávisí na orientaci křivky. Speciálně, je-li křivka \mathcal{K} orientovaná, pak platí

$$\int_{\mathcal{K}} f ds = \int_{-\mathcal{K}} f ds. \quad (11.18)$$

Věta 11.16:

Za předpokladu, že existují všechny uvedené integrály, platí:

$$\int_{\mathcal{K}} (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_{\mathcal{K}} f ds + \beta \int_{\mathcal{K}} g ds, \quad (11.19)$$

kde α, β jsou reálná čísla a f, g jsou funkce spojitě na křivce \mathcal{K} .

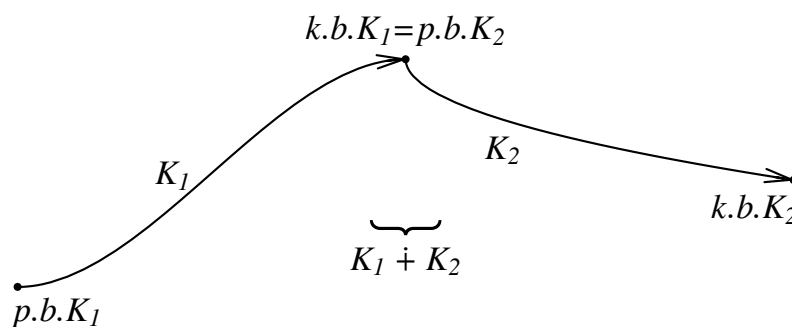
$$\int_{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2} f ds = \int_{\mathcal{K}_1} f ds + \int_{\mathcal{K}_2} f ds, \quad (11.20)$$

kde f je spojitá funkce na křivkách \mathcal{K}_1 a \mathcal{K}_2 .

Vzorec (11.20) lze zobecnit na libovolný konečný počet sčítanců, tj.

$$\int_{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \dots + \mathcal{K}_n} f ds = \int_{\mathcal{K}_1} f ds + \int_{\mathcal{K}_2} f ds + \dots + \int_{\mathcal{K}_n} f ds. \quad (11.21)$$

Připomeňme, že symbolem $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$ značíme **orientovaný součet křivek**, viz obr. 11.12.



Obrázek 11.12:

11.7 Výpočet křivkového integrálu skalárního pole

Při praktických výpočtech používáme vztahů (11.20) popř. (11.21), kdy křivku \mathcal{K} rozkládáme na konečný počet oblouků a počítáme křivkové integrály po jednotlivých obloucích.

Budiž tedy \mathcal{K} oblouk, zadaný některou svojí parametrizací $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$.
Vyjádřeme Riemannův integrální součet

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(P_{i-1}) \Delta s_i$$

pomocí parametrizace \mathbf{r} . Dělicím bodům

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

na křivce \mathcal{K} odpovídají v intervalu $\langle a, b \rangle$ hodnoty parametru

$$t_0, t_1, \dots, t_n$$

tak, že $P_i = \mathbf{r}(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Pak

$$f(P_{i-1}) = f(\mathbf{r}(t_{i-1}))$$

a

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\vec{r}'(t)\| dt \doteq \|\vec{r}'(t_{i-1})\| \Delta t_i, \quad (11.22)$$

kde

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Ve vztahu (11.22) jsme opět předpokládali, že oblouk $\widehat{P_{i-1}P_i}$ je tak malý, že norma tečného vektoru je podél tohoto oblouku “přibližně” konstantní a rovna číslu $\|\vec{r}'(t_{i-1})\|$.

Po dosazení příslušných výrazů do Riemannova integrálního součtu dostáváme

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(P_{i-1}) \Delta s_i \doteq \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(t_{i-1})) \|\vec{r}'(t_{i-1})\| \Delta t_i. \quad (11.23)$$

Na pravé straně tohoto vztahu stojí Riemannův integrální součet spojitě funkce

$$h(t) = f(\mathbf{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| \quad (11.24)$$

reálné proměnné $t \in \langle a, b \rangle$, takže (viz kap.11 v MI)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(t_{i-1})) \|\vec{r}'(t_{i-1})\| \Delta t_i = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

Formulujme získaný výsledek ve formě věty.

Věta 11.17:

Nechť $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$ je parametrizace křivky \mathcal{K} . Dále budiž dáno spojitě skalární pole f na křivce \mathcal{K} . Pak platí

$$\int_{\mathcal{K}} f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt. \quad (11.25)$$

Vzorec (11.25) převádí výpočet $\int_{\mathcal{K}} f \, ds$ na výpočet určitého integrálu funkce $h(t) = f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|$, přičemž lze použít všech výpočetních metod z kapitol 8 - 10 v MI.

• **Příklad 11.18:** Vypočítejme $\int_{\mathcal{K}} f \, ds$, kde \mathcal{K} je jeden závit šroubovice s parametrizací

$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

a funkce f je definována na E^3 vztahem

$$f(x, y, z) = z^2.$$

Úlohu lze formulovat i takto: Určeme hmotnost jednoho závitu šroubovice, jestliže je její lineární hustota rovna čtverci vzdálenosti od roviny x, y .

Řešení: Máme

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}(t)) &= (4t)^2 = 16t^2, \\ \mathbf{r}'(t) &= [-3 \sin t, 3 \cos t, 4] \end{aligned}$$

a tudíž

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

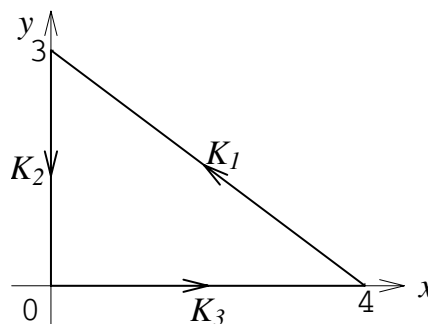
Po dosazení do vzorce (11.25) dostáváme

$$\int_{\mathcal{K}} f \, ds = \int_{\mathcal{K}} z^2 \, ds = \int_0^{2\pi} 16t^2 5 \, dt = \frac{640}{3} \pi^3.$$

• **Příklad 11.19:** Vypočítejme

$$\int_{\mathcal{K}} (x^2 + y) \, ds,$$

kde křivka $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \dot{+} \mathcal{K}_2 \dot{+} \mathcal{K}_3$ je nakreslena na obr. 11.13.



Obrázek 11.13:

Řešení: Křivka \mathcal{K}_1 je orientovaná úsečka mezi body $(4, 0)$ a $(0, 3)$. Má tedy parametrizaci

$$\mathbf{r}_1(t) = [4 - 4t, 3t], \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

a tudíž

$$\mathbf{r}_1'(t) = [-4, 3].$$

Dosazením do vztahu (11.25) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_1} (x^2 + y) \, ds &= \int_0^1 ((4 - 4t)^2 + 3t) \sqrt{(-4)^2 + 3^2} \, dt = \\ &= \int_0^1 (16 - 32t + 16t^2 + 3t) 5 \, dt = 34 \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Analogicky pro křivku \mathcal{K}_2 , která je orientovanou úsečkou mezi body $(0, 3)$ a $(0, 0)$ máme parametrizaci

$$\mathbf{r}_2(t) = (0, 3 - 3t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

a pro křivku \mathcal{K}_3 , která je orientovanou úsečkou mezi body $(0, 0)$ a $(4, 0)$ máme parametrizaci

$$\mathbf{r}_3(t) = (4t, 0), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dosazením do vztahu (11.25) dostáváme

$$\int_{\mathcal{K}_2} (x^2 + y) \, ds = \int_0^1 (0^2 + 3 - 3t) \sqrt{0^2 + (-3)^2} \, dt = 4 \frac{1}{2},$$

$$\int_{\mathcal{K}_3} (x^2 + y) \, ds = \int_0^1 ((4t)^2 + 0) \sqrt{4^2 + 0^2} \, dt = 21 \frac{1}{3}.$$

Podle vztahu (11.21) dostáváme

$$\int_{\mathcal{K}} (x^2 + y) \, ds = \int_{\mathcal{K}_1} (x^2 + y) \, ds + \int_{\mathcal{K}_2} (x^2 + y) \, ds + \int_{\mathcal{K}_3} (x^2 + y) \, ds = 60.$$

11.7.1 Nezávislost křivkového integrálu na parametrizaci

Aby byla naše úvaha před Větou 11.17 zcela korektní, je třeba ukázat, že integrál na pravé straně vztahu (11.25) **nezávisí** na výběru parametrizace.

Buďte

$$\mathbf{r}_1 : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$$

$$\mathbf{r}_2 : \langle c, d \rangle \rightarrow E^3$$

dvě parametrizace křivky \mathcal{K} takové, že

$$\mathbf{r}_2(u) = \mathbf{r}_1(\varphi(u)), \tag{11.26}$$

kde $t = \varphi(u)$ je přípustná změna parametrizace, $u \in \langle c, d \rangle$, $t \in \langle a, b \rangle$. Máme ukázat, že platí

$$\int_c^d f(\mathbf{r}_2(u)) \|\mathbf{r}_2'(u)\| \, du = \int_a^b f(\mathbf{r}_1(t)) \|\mathbf{r}_1'(t)\| \, dt. \tag{11.27}$$

Důkaz tohoto vztahu je založen na použití substituční metody pro výpočet určitého integrálu.

Položme

$$h(t) = f(\mathbf{r}_1(t)) \|\dot{\mathbf{r}}_1'(t)\|. \quad (11.28)$$

Pak vzhledem ke vztahům (11.26) a (11.9) máme

$$f(\mathbf{r}_2(u)) \|\dot{\mathbf{r}}_2'(u)\| = f(\mathbf{r}_1(\varphi(u))) \|\dot{\mathbf{r}}_1'(\varphi(u))\varphi'(u)\| = f(\mathbf{r}_1(\varphi(u))) \|\dot{\mathbf{r}}_1'(\varphi(u))\| |\varphi'(u)|. \quad (11.29)$$

Rovnost (11.27) lze pomocí funkce $h(t)$ z (11.28) a vztahu (11.29) napsat ve tvaru

$$\int_c^d h(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du = \int_a^b h(t) dt. \quad (11.30)$$

Je-li přípustná změna parametrizace $\varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ **rostoucí**, tj. $\varphi'(u) > 0$, pak platnost (11.30) plyne přímo z *věty o substituční metodě* pro výpočet určitého integrálu, viz kap. 9 v MI.

Je-li přípustná změna parametrizace $\varphi : \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ **klesající**, tj. $\varphi'(u) < 0$, pak platnost (11.30) dostaneme analogicky.

Cvičení 11.20: Vypočítejte hmotnost části šroubovice zadané parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, 2\pi \right\rangle,$$

je-li lineární hustota šroubovice rovna $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$.

• **Příklad 11.21:** Vypočítejme křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}} ye^{-x} ds,$$

kde křivka \mathcal{K} je zadána parametrickými rovnicemi

$$x = \ln(1 + t^2), \quad y = 3 - t + 2\arctg t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Řešení: Derivováním dostáváme

$$x'(t) = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad y'(t) = \frac{2}{1 + t^2} - 1.$$

Pak

$$\|\dot{\mathbf{r}}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{\frac{4t^2}{(1 + t^2)^2} + \frac{(1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2}} = 1.$$

Dosazením do (11.25) dostaneme

$$\int_{\mathcal{K}} ye^{-x} ds = \int_0^1 (3 - t + 2\arctg t) e^{-\ln(1+t^2)} 1 dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \frac{3-t+2\operatorname{arctg} t}{1+t^2} dt = \left[3\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \operatorname{arctg}^2 t \right]_0^1 = \\
 &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3\pi}{4} \doteq 2.626.
 \end{aligned}$$

• **Příklad 11.22:** Vypočítejme hmotnost křivky $y = e^x$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, když lineární hustota je v každém bodě křivky rovna čtverci vzdálenosti od osy x .

Řešení: Křivku označíme \mathcal{K} a parametrizujeme rovnicemi

$$x = t, \quad y = e^t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Lineární hustota je $f(x, y) = y^2$. Pak

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{K}} y^2 ds &= \int_0^1 e^{2t} \sqrt{1+e^{2t}} dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{2t} \\ \frac{du}{2} = e^{2t} dt \end{array} \right| = \int_1^{e^2} \frac{1}{2} \sqrt{1+u} du = \\
 &= \left[\frac{1}{3} (1+u)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{e^2} = \frac{1}{3} ((1+e^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{8}) \doteq 7.157.
 \end{aligned}$$

• **Příklad 11.23:** Vypočítejme křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}} xyz ds,$$

kde křivka \mathcal{K} je dána parametrickými rovnicemi

$$x = t, \quad y = \frac{1}{3} \sqrt{8t^3}, \quad z = \frac{1}{2} t^2, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Řešení:

$$\int_{\mathcal{K}} xyz ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{3} t^{\frac{9}{2}} (1+t) dt = \frac{16\sqrt{2}}{143} \doteq 0.158.$$

• **Příklad 11.24:** Vypočítejme křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{y^3}{xz^2} ds,$$

kde křivka \mathcal{K} má parametrické rovnice

$$\begin{aligned}
 x &= 2 \sin^2 t \\
 y &= 2 \sin t \cos t \\
 z &= 2 \cos t, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.
 \end{aligned}$$

Řešení: Máme

$$x'(t) = 4 \sin t \cos t, \quad y'(t) = 2(\cos^2 t - \sin^2 t), \quad z'(t) = -2 \sin t,$$

tudíž

$$\|\vec{r}'(t)\| = 2\sqrt{1 + \sin^2 t}.$$

Restrikcí funkce $f(x, y, z) = \frac{y^3}{xz^2}$ na křivku \mathcal{K} dostáváme

$$f(x(t), y(t), z(t)) = \sin t \cos t.$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \frac{y^3}{xz^2} ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t) 2\sqrt{1 + \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t) \sqrt{1 + \frac{1 - \cos 2t}{2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2t \sqrt{3 - \cos 2t} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \cos 2t \\ du = -2 \sin 2t dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^{-1} \sqrt{3 - u} du = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(3 - u)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \right]_1^{-1} = \frac{1}{3\sqrt{2}} (8 - \sqrt{8}) \doteq 1.219. \end{aligned}$$

Návody ke cvičením z kap. 11

11.8 Ověřte, zdali zobrazení $\varphi(s) = s^3$ je prosté a má pro všechna $s \in \langle -1, 1 \rangle$ spojitou a nenulovou derivaci.

11.20 Restrikcí funkce $f(x, y, z)$ na křivku \mathcal{K} dostáváme

$$f(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t, \quad t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, 2\pi \right\rangle.$$

Potom

$$\int_{\mathcal{K}} f ds = \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t) dt,$$

neboť $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2}$.

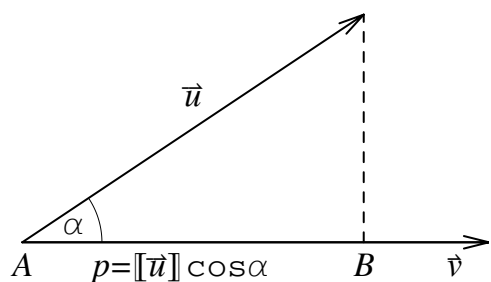
Kapitola 12

Křivkový integrál vektorového pole. Práce.

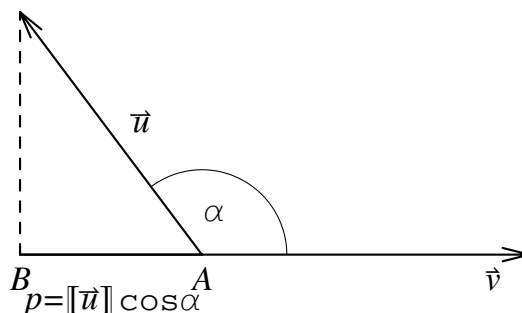
Definice křivkového integrálu vektorového pole vyžaduje několik přípravných úvah jak motivačního tak technického rázu.

12.1 Pravoúhlý průmět vektoru

Mějme dány dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, viz obr. 12.1.



Obrázek 12.1:



Obrázek 12.2:

Definice 12.1: Pravoúhlým průmětem vektoru \vec{u} do vektoru \vec{v} nazýváme veličinu

$$p = \|\vec{u}\| \cos \alpha, \quad (12.1)$$

kde α je velikost úhlu mezi vektory \vec{u} a \vec{v} .

Je nutné si uvědomit, že číslo p může být i **záporné**, viz obr. 12.2. To znamená, že číslo p nelze chápat jako délku úsečky AB . Délka úsečky AB je dána absolutní hodnotou $|p|$ a $\text{sgn } p$, tj. **znaménko** čísla p , udává vzájemnou orientaci vektoru \overrightarrow{AB} vůči vektoru \vec{v} .

Vektor \overrightarrow{AB} jsme v odstavci 13.2.3 ve skriptech [MI] nazývali **pravoúhlou složkou** vektoru \vec{u} ve směru vektoru \vec{v} a značili \vec{p} .

Pro skalární součin vektorů \vec{u} a \vec{v} platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha,$$

odkud pro nenulové vektory \vec{u} a \vec{v} dostáváme

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Dosadíme-li do vztahu (12.1) za $\cos \alpha$, dostaneme

$$p = \|\vec{u}\| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{u} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{u} \cdot \vec{v}_0,$$

kde vektor \vec{v}_0 je jednotkový vektor ($\|\vec{v}_0\| = 1$) ve směru vektoru \vec{v} .

Závěr: Pravoúhlý průmět vektoru \vec{u} do vektoru \vec{v} je roven skalárnímu součinu vektoru \vec{u} s jednotkovým vektorem

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|},$$

tj.

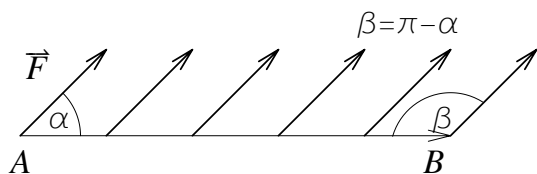
$$p = \vec{u} \cdot \vec{v}_0. \quad (12.2)$$

12.2 Práce síly

Ze střední školy připomeňme vzorec pro práci konstantní síly \vec{F} , která působí po orientované úsečce \vec{AB} , tj. po dráze od bodu A k bodu B . Situace je znázorněna na obr. 12.3.

Síla \vec{F} vykoná práci W danou vzorcem

$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB} = \|\vec{F}\| \|\vec{AB}\| \cos \alpha. \quad (12.3)$$



Položme

$$F_{AB} = \|\vec{F}\| \cos \alpha.$$

Obrázek 12.3:

Pak F_{AB} je pravoúhlý průmět síly \vec{F} do směru dráhy \vec{AB} a vzorec (12.3) má tvar

$$W = F_{AB} \|\vec{AB}\|.$$

Práce W síly \vec{F} je dána součinem jejího pravoúhlého průmětu do směru dráhy a délkou dráhy.

POZOR! Počítáme-li práci \overline{W} síly \vec{F} po orientované úsečce \vec{BA} , tj. síla působí po úsečce od bodu B k bodu A , dostaneme práci s opačným znaménkem

$$\overline{W} = \vec{F} \cdot \vec{BA} = \|\vec{F}\| \|\vec{BA}\| \cos \beta = \|\vec{F}\| \|\vec{AB}\| (-\cos \alpha) = -W.$$

Vzorec (12.3) dovoluje stanovit práci konstantní síly, která působí po přímočaré dráze. Jestliže síla \vec{F} není konstantní a dráha, po níž síla koná práci, je **křivočará**, nelze vzorec (12.3) použít.

Ke stanovení práce síly v takovém případě je nutné použít křivkový integrál vektorového pole, který zavedeme v odstavci 12.5.

12.3 Vektorové pole

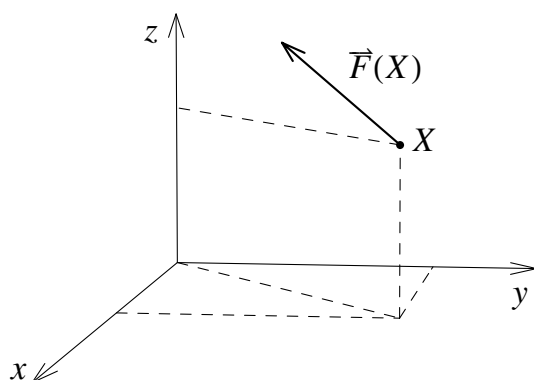
Definice 12.2: Vektorovým polem na množině $G \subseteq E^3$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F} : G \rightarrow V^3, \quad (12.4)$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor

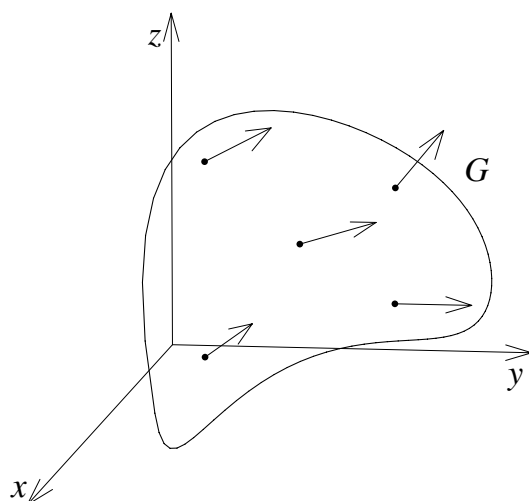
$$\vec{F}(X),$$

který “vychází” z bodu X , tj. bod X je počátečním bodem vektoru $\vec{F}(X)$.



Obrázek 12.4:

Situace z definice je znázorněna na obr. 12.4. Můžeme také říci, že na množině G je zadáno vektorové pole \vec{F} , jestliže z každého bodu $X \in G$ “vychází” vektor $\vec{F}(X)$, viz obr. 12.5.



Obrázek 12.5:

• **Poznámka 12.3:**

Vektorové pole můžeme vhodným způsobem charakterizovat pomocí grafu zobrazení. Grafem zobrazení (12.4) rozumíme množinu uspořádaných dvojic

$$\text{graf}(\vec{F}) = \{(X, \vec{F}(X)), X \in G\}. \quad (12.5)$$

Na prvním místě každé dvojice

$$(X, \vec{F}(X)) \in \text{graf}(\vec{F})$$

stojí bod X , z něhož vychází vektor $\vec{F}(X)$.

Ve fyzice se dvojice $(X, \vec{F}(X))$ interpretuje jako síla $\vec{F}(X)$ působící v bodě X . V této souvislosti pak hovoříme o **silovém poli**. Silové pole podle své podstaty může být například gravitační, elektromagnetické, tlakové apod.

12.3.1 Rovinná vektorová pole

Jestliže v definici 12.2 nahradíme prostor E^3 rovinou E^2 a vektorový prostor V^3 prostorem V^2 dostaneme definici tzv. **rovinného vektorového pole**, tj. vektorového pole v rovině.

Definice 12.4: Rovinným vektorovým polem na množině $G \subseteq E^2$ rozumíme zobrazení

$$\vec{F}: G \rightarrow V^2,$$

které každému bodu $X \in G$ přiřazuje vektor

$$\vec{F}(X),$$

který “vychází” z bodu X , tj. bod X je počátečním bodem vektoru $\vec{F}(X)$.

S rovinnými vektorovými poli se často pracuje ve fyzikální chemii a proto jsme jeho definici zvláště zdůraznili, i když, jak ukážeme za chvíli, rovinná vektorová pole jsou speciálním případem prostorových vektorových polí.

12.3.2 Zadávání vektorových polí

Začněme s příkladem rovinného vektorového pole. Pole se zadávají pomocí příslušných kartézských souřadnic bodů a vektorů. Nechť bod $X \in E^2$ má souřadnice (x, y) , tj.

$$X = (x, y).$$

Pak vektor $\vec{F}(X)$ má souřadnice

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

Tedy: Rovinné vektorové pole je zadáno dvojicí funkcí dvou proměnných.

- **Příklad 12.5:** Zadejme vektorové pole v rovině vztahem

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

tj.

$$F_1(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$F_2(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Toto pole je definováno na celé rovině, kromě počátku $O = (0, 0)$. Nakresleme několik typických vektorů tohoto vektorového pole.

Řešení: Například, vezměme bod $P=(1,1)$. Pak

$$F_1(1, 1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad a \quad F_2(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tedy z bodu $P = (1, 1)$ vychází vektor $\vec{F}(1, 1)$ o souřadnicích

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Zřejmě koncovým bodem tohoto vektoru je bod Q o souřadnicích

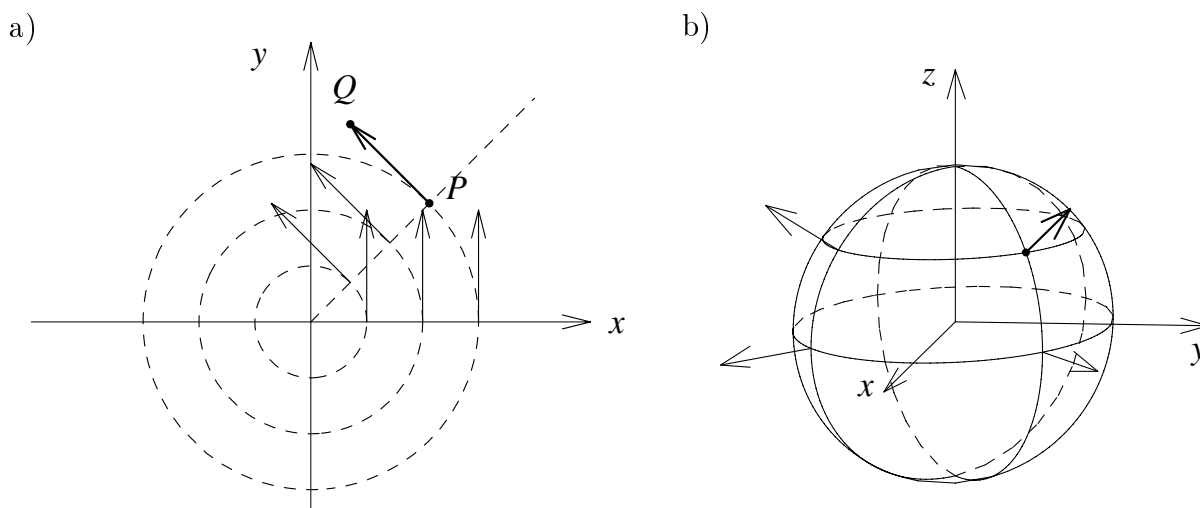
$$Q = P + \vec{F}(P) = (1, 1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Vektor je nakreslen na obr. 12.6a, kde jsou nakresleny ještě další vektory daného vektorového pole.

Všimněme si ještě, že všechny vektory mají délku rovnou 1, neboť

$$\|\vec{F}(x, y)\| = \sqrt{\left[\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]^2 + \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]^2} = 1$$

a jsou kolmé na přímky procházející počátkem. Odůvodněte toto poslední tvrzení sami!



Obrázek 12.6:

Zadání vektorového pole v prostoru E^3 je zcela analogické zadání rovinných polí. Bod $X \in E^3$ nechť má souřadnice

$$X = (x, y, z)$$

a je mu přiřazen vektor $\vec{F}(X)$, který má souřadnice

$$\vec{F}(X) = \vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Tedy: Prostorové vektorové pole je zadáno **trojicí funkcí tří proměnných**.

- **Příklad 12.6:** Zadejme vektorové pole v prostoru vztahem

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right),$$

tj.

$$F_1(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Toto pole je definováno na celém prostoru, kromě počátku $O = (0, 0, 0)$. Nakresleme několik typických vektorů tohoto vektorového pole.

Řešení: Například, vezměme bod $P = (1, 1, 1)$. Pak

$$F_1(1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad F_2(1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad F_3(1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Tedy z bodu $P = (1, 1, 1)$ vychází vektor $\vec{F}(1, 1, 1)$ o souřadnicích

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Zřejmě koncovým bodem tohoto vektoru je bod Q o souřadnicích

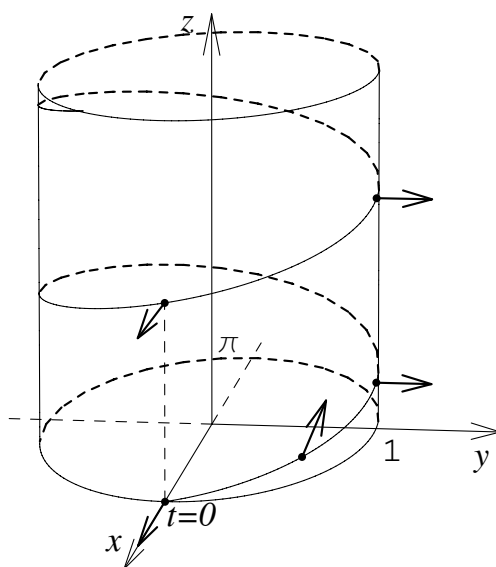
$$Q = P + \vec{F}(P) = (1, 1, 1) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Vektor je nakreslen na obr. 12.6b, kde jsou nakresleny ještě další vektory daného vektorového pole.

Délky všech vektorů jsou rovny 1 a vektory leží na přímkách, které procházejí počátkem.

- **Poznámka 12.7:** Každé rovinné vektorové pole $\vec{G} = (G_1(x, y), G_2(x, y))$ lze uvažovat jako prostorové pole $(\tilde{G}_1(x, y, 0), \tilde{G}_2(x, y, 0), 0)$, kde $\tilde{G}_1(x, y, 0) = G_1(x, y)$ a $\tilde{G}_2(x, y, 0) = G_2(x, y)$

12.3.3 Vektorová pole na křivkách



Vektorové pole lze na křivce zadat obdobným způsobem jako skalární pole, viz odstavec 11.5. Necht

$$\vec{F} : G \rightarrow V^3$$

je vektorové pole na množině G a křivka \mathcal{K} leží v množině G . Pak restrikce

$$\vec{F}|_{\mathcal{K}}$$

zadá vektorové pole na křivce \mathcal{K} a k jejímu vyjádření používáme parametrizaci křivky \mathcal{K} .

Obrázek 12.7:

- **Příklad 12.8:** Mějme zadané vektorové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = \left[\frac{x}{2+y}, \frac{y}{3+x}, \frac{xy}{1+z^2} \right]$$

a křivku \mathcal{K} parametrizací

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in \mathcal{R}.$$

Pak pro $P \in \mathcal{K}$, $P = \mathbf{r}(t)$ máme

$$\vec{F}|_{\mathcal{K}}(\mathbf{r}(t)) = \vec{F}(\mathbf{r}(t)) = \left[\frac{\cos t}{2 + \sin t}, \frac{\sin t}{3 + \cos t}, \frac{\cos t \sin t}{1 + t^2} \right].$$

Na obr. 12.7 je vektorové pole $\vec{F}|_{\mathcal{K}}$ znázorněno v bodech odpovídajících hodnotám parametru $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$.

12.3.4 Vektorové pole jednotkových tečných vektorů na křivce

Budiž \mathcal{K} hladká křivka v E^3 a $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$ její parametrizace. Jak víme z kapitoly 11, lze pomocí této parametrizace každému bodu $P = \mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ křivky \mathcal{K} přiřadit tečný vektor $\vec{r}'(t)$ s počátečním bodem P . Délka tohoto tečného vektoru závisí na parametrizaci, viz odstavec 11.4.

Jestliže každému bodu $P \in \mathcal{K}$, $P = \mathbf{r}(t)$ přiřadíme jednotkový vektor

$$\vec{\tau}(P) = \vec{\tau}(\mathbf{r}(t)) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}, \quad (12.6)$$

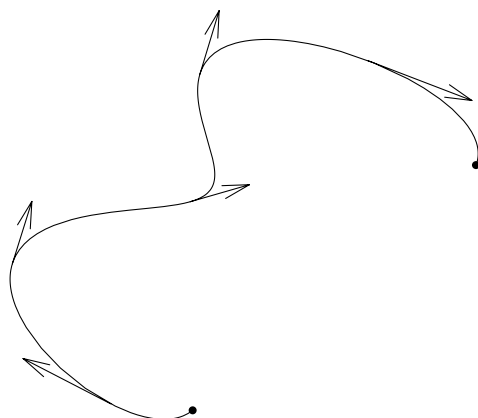
pak obdržíme vektorové pole na křivce \mathcal{K} , tj. zobrazení

$$\vec{\tau} : \mathcal{K} \rightarrow V^3.$$

Vektorové pole definované vztahem (12.6) nazýváme **polem jednotkových tečných vektorů** na křivce \mathcal{K} .

• **Poznámka 12.9:** Je třeba si uvědomit, že na křivce \mathcal{K} mohou existovat pouze dvě různá pole jednotkových tečných vektorů. Označíme-li jedno z nich jako $\vec{\tau}$, pak druhé pole je $-\vec{\tau}$. Smysl označení vyplývá z obr. 12.8.

a)



b)



Obrázek 12.8: a) pole $\vec{\tau}$ b) pole $-\vec{\tau}$

Každá parametrizace křivky \mathcal{K} určuje pomocí vztahu (12.6) jedno ze dvou polí jednotkových tečných vektorů, buď pole $\vec{\tau}$, nebo pole $-\vec{\tau}$ na křivce \mathcal{K} . Tak je množina všech parametrizací křivky \mathcal{K} rozdělena na dvě disjunktní podmnožiny.

Všechny parametrizace z jedné podmnožiny určují pole $\vec{\tau}$ a tím i **směr probíhání** křivky \mathcal{K} a parametrizace z druhé podmnožiny určují pole $-\vec{\tau}$ a tím **opačnou orientaci** křivky \mathcal{K} , srovnej s odstavcem 11.3.

12.4 Diferenciál zobrazení $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$

Budiž

$$\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$$

zobrazení, jehož souřadnicové funkce jsou

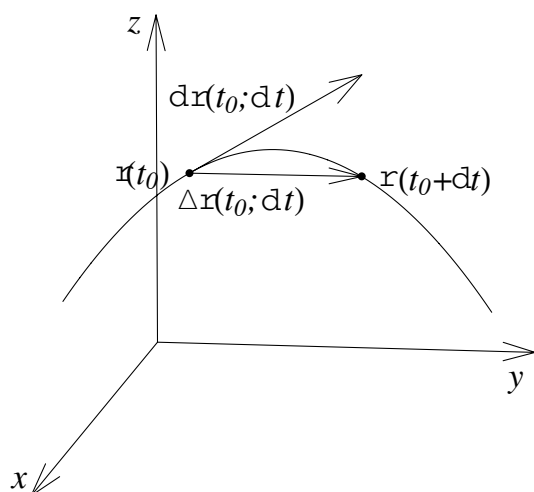
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in \langle a, b \rangle.$$

Pak **diferenciálem zobrazení \mathbf{r}** v bodě t_0 rozumíme vektorovou funkci proměnné dt

$$d\mathbf{r}(t_0; dt) = [x'(t_0)dt, y'(t_0)dt, z'(t_0)dt], \quad (12.7)$$

tj. diferenciál zobrazení $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$ je uspořádaná trojice diferenciálů souřadnicových funkcí, což stručně zapisujeme ve tvaru

$$d\mathbf{r} = [dx, dy, dz].$$



Obrázek 12.9:

Vztah (12.7) lze po vytknutí dt za závorku psát ve tvaru

$$d\mathbf{r}(t_0; dt) = \vec{r}'(t_0) dt.$$

Diferenciál zobrazení \mathbf{r} aproximuje diferenci

$$\Delta\mathbf{r}(t_0; dt) = \mathbf{r}(t_0 + dt) - \mathbf{r}(t_0) \doteq \vec{r}'(t_0) dt.$$

Vztah mezi diferenciálem a diferencí je znázorněn na obr. 12.9.

Dále platí

$$d\mathbf{r}(t_0; dt) = \vec{r}'(t_0) dt = \frac{\vec{r}'(t_0)}{\|\vec{r}'(t_0)\|} \|\vec{r}'(t_0)\| dt = \vec{r}(\mathbf{r}(t_0)) ds, \quad (12.8)$$

kde

$$ds = \|\vec{r}'(t)\| dt$$

je diferenciál délky oblouku, srovnej s odstavcem 11.6.

Označíme-li $s(t)$ **délku** části křivky, která odpovídá hodnotám parametru z intervalu

$$\langle a, t \rangle \subset \langle a, b \rangle,$$

pak

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du,$$

z čehož plyne

$$s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$$

a tudíž

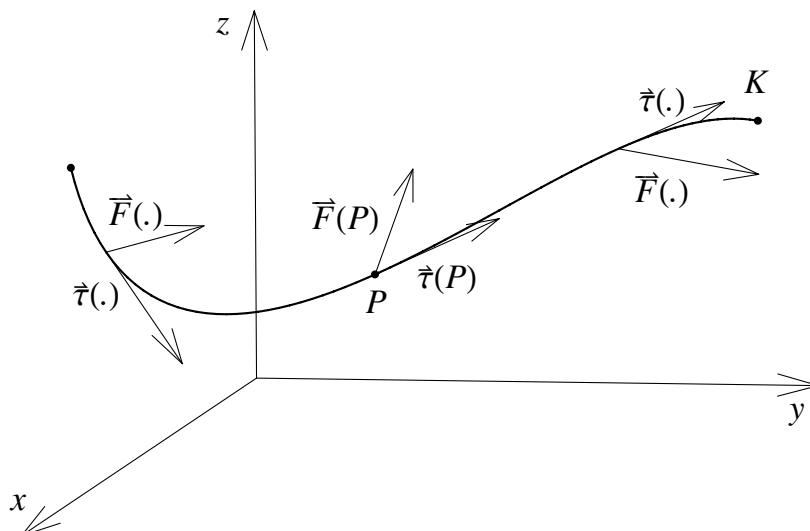
$$ds = s'(t) dt = \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

12.5 Definice křivkového integrálu vektorového pole

Mějme dānu hladkou orientovanou křivku \mathcal{K} , jejíž orientace je určena polem jednotkových tečných vektorů $\vec{\tau}(P)$ na křivce. Dále budiž na křivce \mathcal{K} definováno spojitě vektorové pole

$$\vec{F} : \mathcal{K} \rightarrow V^3.$$

Situace je znázorněna na obr. 12.10.



Obrázek 12.10:

V každém bodě $P \in \mathcal{K}$ jsou definovány dva vektory a to $\vec{F}(P)$ a $\vec{\tau}(P)$. Jejich skalární součin

$$\vec{F}(P) \cdot \vec{\tau}(P)$$

je roven pravoúhlému průmětu vektoru $\vec{F}(P)$ do směru tečného vektoru $\vec{\tau}(P)$ ke křivce \mathcal{K} v bodě P , viz odstavec 12.1.

Pro každý bod $P \in \mathcal{K}$ polořme

$$f(P) = \vec{F}(P) \cdot \vec{\tau}(P). \tag{12.9}$$

Tímto vztahem je na křivce \mathcal{K} definována skalární funkce

$$f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{R},$$

kteřou již umíme po křivce \mathcal{K} integrovat.

Definice 12.10: Křivkovým integrálem vektorového pole \vec{F} po křivce \mathcal{K} , který značíme symbolem

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

rozumíme číslo

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{K}} \vec{F}(P) \cdot \vec{\tau}(P) ds. \tag{12.10}$$

Křivku \mathcal{K} nazýváme **integrační cestou**.

• **Poznámka 12.11:** Integrovat vektorové pole \vec{F} po orientované křivce \mathcal{K} znamená integrovat skalární pole $f(P) = \vec{F}(P) \cdot \vec{\tau}(P)$ po téže křivce.

• **Poznámka 12.12:** V případě, že pole \vec{F} interpretujeme jako **silové pole**, pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

je roven **práci**, kterou vykoná síla \vec{F} podél křivky \mathcal{K} , viz následující oddíl 12.6.1.

12.6 Výpočet a vlastnosti křivkového integrálu vektorového pole

Výpočet

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

převedeme pomocí parametrizace křivky \mathcal{K} na výpočet příslušného určitého integrálu funkce jedné proměnné.

Nechť

$$\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$$

je parametrizace křivky \mathcal{K} . Protože

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{K}} f \, ds, \quad (12.11)$$

kde f je skalární pole definované vztahem (12.9), lze integrál na pravé straně (12.11) převést na integrál funkce jedné proměnné pomocí Věty 2 z odstavce 11.7.

Tak dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\mathcal{K}} f \, ds = \int_{\mathcal{K}} \vec{F}(P) \cdot \vec{\tau}(P) \, ds = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \vec{\tau}(\mathbf{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| \, dt = \\ &= \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\| \, dt = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt. \end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy větu, která převádí výpočet křivkového integrálu na výpočet integrálu funkce jedné proměnné.

Věta 12.13:

Platí

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt. \quad (12.12)$$

• **Příklad 12.14:** Vypočítejme $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde křivka \mathcal{K} je zadána parametrizací

$$\mathbf{r}(t) = (2 - t^2, 1 + 2t, 2 + 3t^3), \quad t \in \langle -1, 1 \rangle, \quad (12.13)$$

a vektorové pole \vec{F} na E^3 je

$$\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, xy). \quad (12.14)$$

Řešení: K výpočtu našeho integrálu podle vztahu (12.12) potřebujeme znát $\vec{r}'(t)$ a $\vec{F}(\mathbf{r}(t))$. Z (12.13) plyne

$$\vec{r}'(t) = [-2t, 2, 9t^2].$$

Dále máme

$$\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = ((2 - t^2)(2 + 3t^3), (1 + 2t)(2 + 3t^3), (2 - t^2)(1 + 2t)).$$

Pak

$$\begin{aligned} \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) &= \\ &= -2t(4 - 2t^2 + 6t^3 - 3t^5) + 2(2 + 4t + 3t^3 + 6t^4) + 9t^2(2 + 4t - t^2 - 2t^3). \end{aligned}$$

Konečně po snadné úpravě dostaneme

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 (4 + 18t^2 + 46t^3 - 9t^4 - 18t^5 + 6t^6) dt = \frac{634}{35}.$$

12.6.1 Jiné odvození vztahu (11.12)

Uvažujme opět orientovanou křivku \mathcal{K} s parametrizací

$$\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3,$$

na níž je definováno spojité silové pole \vec{F} . Určeme práci, kterou síla \vec{F} vykoná po křivce \mathcal{K} .

Křivku \mathcal{K} rozdělme body

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \quad P_0 = p.b.\mathcal{K}, \quad P_n = k.b.\mathcal{K}$$

na n malých oblouků

$$\widehat{P_i P_{i+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Při dané parametrizaci \mathbf{r} odpovídají těmto bodům hodnoty parametru

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

tak, že

$$P_i = \mathbf{r}(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Určeme práci, kterou vykoná síla \vec{F} podél oblouku $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$. Jestliže je oblouk $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$ **dostatečně malý**, lze jej nahradit (aproximovat) orientovanou úsečkou $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$.

S použitím parametrizace \mathbf{r} dostáváme

$$\overrightarrow{P_i P_{i+1}} = \mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i) \doteq \vec{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Sílu \vec{F} lze na malém oblouku pokládat za konstantní a rovnou $\vec{F}(\mathbf{r}(t_i))$.

Tudíž práci W_i síly \vec{F} podél oblouku $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$ lze aproximovat prací konstantní síly $\vec{F}(\mathbf{r}(t_i))$ po úsečce $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$, tj. viz vzorec (12.3)

$$\begin{aligned} W_i &\doteq \vec{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \overrightarrow{P_i P_{i+1}} = \vec{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot [\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)] \doteq \\ &\doteq \vec{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Celkovou práci W síly \vec{F} podél křivky \mathcal{K} lze aproximovat součtem

$$\sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i),$$

tj. Riemannovým integrálním součtem funkce

$$S(t) = \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

definované na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Pak pro $n \rightarrow \infty$ máme

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\mathbf{r}(t_i)) \cdot \vec{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i) = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

12.6.2 Vlastnosti křivkového integrálu vektorového pole

Věta 12.15:

Nechť $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ a \vec{F}, \vec{G} jsou spojitá vektorová pole na křivce \mathcal{K} . Pak platí:

1. $\int_{\mathcal{K}} (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \cdot \vec{dr} = \alpha \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{dr} + \beta \int_{\mathcal{K}} \vec{G} \cdot \vec{dr},$
2. $\int_{\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \dots + \mathcal{K}_n} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \cdot \vec{dr} + \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \cdot \vec{dr} + \dots + \int_{\mathcal{K}_n} \vec{F} \cdot \vec{dr},$
3. $\int_{-\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{dr} = - \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{dr}.$

Vlastnosti 1. a 2. plynou přímo z obdobných vlastností integrálu skalárního pole a definičního vztahu (12.10).

Cvičení 12.16: Dokažte vlastnosti 1. a 2. z věty 12.15.

Vlastností 3. se integrál vektorového pole liší od integrálu skalárního pole, neboť integrál skalárního pole nezávisí na orientaci křivky \mathcal{K} , viz poznámku 11.14. Jestliže je orientace křivky \mathcal{K} , určená polem jednotkových tečných vektorů $\vec{\tau}(P)$ na \mathcal{K} , pak křivce opačně orientované, $\dot{\mathcal{K}}$, odpovídá pole $\dot{\vec{\tau}}(P)$.

V případě křivky \mathcal{K} promítáme pole \vec{F} do směru $\vec{\tau}(P)$ a v případě křivky $\dot{\mathcal{K}}$ promítáme pole \vec{F} do směru $\dot{\vec{\tau}}(P)$, takže **průměty mají opačné znaménko**, viz obr. 12.11.



Obrázek 12.11:

Tudíž

$$\int_{\dot{\mathcal{K}}} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot (-\vec{\tau}) ds = - \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{\tau} ds = - \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{dr}.$$

Cvičení 12.17: Bud'te $\mathbf{r}_1 : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$ a $\mathbf{r}_2 : \langle c, d \rangle \rightarrow E^3$ dvě parametrizace křivky \mathcal{K} , které určují na křivce \mathcal{K} **tutéž** orientaci. Dokažte, že

$$\int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1'(t) dt = \int_c^d \vec{F}(\mathbf{r}_2(u)) \cdot \vec{r}_2'(u) du.$$

• **Příklad 12.18:** Pro rovinné vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = [2xy, x]$$

vypočítejme integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{dr},$$

kde křivka \mathcal{K} je zadána parametrizací

$$\mathbf{r}_1(t) = [t, t^2], \quad t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Řešení: Jelikož

$$\vec{F}(\mathbf{r}_1(t)) = [2t^3, t] \quad \text{a} \quad \vec{r}_1'(t) = [1, 2t]$$

je

$$\vec{F}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1'(t) = 2t^3 + 2t^2.$$

Použití vztahu (12.12) nám dává

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 (2t^3 + 2t^2) dt = \left[\frac{t^4}{2} + \frac{2t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

12.7 Diferenciální formy příslušné k poli \vec{F}

Nechť

$$\vec{F}(x, y, z) = [F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)]$$

je vektorové pole na množině $G \subseteq E^3$ a

$$d\vec{r} = [dx, dy, dz].$$

Vyjádříme-li skalární součin $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ pomocí souřadnic, dostaneme

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz. \quad (12.15)$$

Výraz na pravé straně tohoto vztahu nazýváme **diferenciální formou** příslušnou vektorovému poli \vec{F} .

Každé vektorové pole $\vec{F} = [F_1, F_2, F_3]$ na množině G určuje diferenciální formu

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \quad (12.16)$$

na množině G , a **obráceně**, každá diferenciální forma (12.16) určuje na G vektorové pole $\vec{F} = [F_1, F_2, F_3]$.

Integrál $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ zapisujeme pomocí příslušné diferenciální formy ve tvaru

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{K}} F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz \quad (12.17)$$

a místo rčení, že integrujeme vektorové pole po křivce \mathcal{K} , používáme také rčení, že **integrujeme diferenciální formu po křivce \mathcal{K}** .

• **Příklad 12.19:** Vypočtěme

$$\int_{\mathcal{K}} x dx + xy dy + (z - x) dz \quad (12.18)$$

po křivce \mathcal{K} zadané parametrickými rovnicemi

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Řešení: V tomto případě, kdy je integrál zadán pomocí diferenciální formy, je postup

výpočtu snadnější než při přímém použití vztahu (12.12). Z parametrických rovnic křivky dostáváme

$$dx = -\sin t \, dt, \quad dy = \cos t \, dt, \quad dz = dt$$

a po dosazení do (12.18) máme

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} x \, dx + xy \, dy + (z - x) \, dz &= \int_0^{\pi} [\cos t (-\sin t) + \cos^2 t \sin t + (t - \cos t)] \, dt = \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} - \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{t^2}{2} - \sin t \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} + \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

12.7.1 Potenciální vektorová pole

Mějme funkci

$$w(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Totální diferenciál funkce w má tvar

$$dw = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} dy + \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} dz. \quad (12.19)$$

Vidíme, že totální diferenciál funkce je diferenciální forma.

Diferenciální forma (12.19) určuje vektorové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = \left[\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right].$$

Definice 12.20: Budiž funkce $U(x, y, z)$ spojitě diferencovatelná na otevřené množině $G \subseteq E^3$. Jestliže pro vektorové pole \vec{F} na množině G platí

$$\vec{F}(x, y, z) = \text{grad } U(x, y, z),$$

tj.

$$\vec{F}(x, y, z) = \left[\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \right], \quad (12.20)$$

pak takové vektorové pole nazýváme **potenciálním**. Funkci $U(x, y, z)$ nazýváme **potenciálem** pole \vec{F} .

Tedy: Stručně řečeno, vektorové pole je potenciální, je-li **gradientem** nějaké skalární funkce.

• **Poznámka 12.21:** Uvědomme si, že diferenciální forma, která je určena potenciálním vektorovým polem, je totálním diferenciálem potenciálu U , neboť

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU(x, y, z).$$

Výpočet integrálu

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

kde \vec{F} je **potenciální** vektorové pole, usnadňuje podstatným způsobem následující věta.

Věta 12.22:

Budiž \vec{F} spojitě **potenciální** pole na oblasti $G \subseteq E^3$, mající potenciál $U(x, y, z)$, tj. $\vec{F} = \text{grad } U$. Nechť křivka $\mathcal{K} \subset G$. Pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(k.b.\mathcal{K}) - U(p.b.\mathcal{K}). \quad (12.21)$$

Důkaz:

Nechť $\mathbf{r} : \langle a, b \rangle \rightarrow E^3$ je parametrizace křivky \mathcal{K} . Pak podle předpokladu je

$$\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = \left[\frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial x}, \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial y}, \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial z} \right].$$

Tudíž

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial U(x(t), y(t), z(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U(x(t), y(t), z(t))}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial U(x(t), y(t), z(t))}{\partial z} z'(t) \right] dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [U(x(t), y(t), z(t))] dt = \int_a^b \tilde{U}'(t) dt = \tilde{U}(b) - \tilde{U}(a) = U(k.b.\mathcal{K}) - U(p.b.\mathcal{K}), \end{aligned}$$

kde jsme označili $\tilde{U}(t) = U(x(t), y(t), z(t))$. ■

• **Příklad 12.23:** Ověřme, zda funkce

$$U(x, y) = -\text{arctg} \frac{x}{y}$$

může být potenciálem vektorového pole

$$\vec{F}(x, y) = \left[-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right]$$

na horní polorovině $G = \{(x, y); y > 0\}$.

Pak vypočtěme $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde \mathcal{K} je libovolná křivka spojující body $A = (1, 1)$, $B = (2\sqrt{3}, 2)$ a ležící celá v G .

Řešení: Funkce $U(x, y)$ je definována ve všech bodech roviny s výjimkou bodů ležících

na ose x .

Derivováním obdržíme

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{-1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \frac{1}{y} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = F_1(x, y),$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{-1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = F_2(x, y).$$

Tudíž funkce $U(x, y)$ je potenciálem našeho vektorového pole na množině $E^2 \setminus \{\text{osa } x\}$. V horní polorovině $G = \{(x, y); y > 0\}$ splňuje pole \vec{F} předpoklady věty 12.22, tudíž dostáváme

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{dr} = U(2\sqrt{3}, 2) - U(1, 1) = -\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}.$$

Cvičení 12.24: Vypočtěte hodnotu křivkového integrálu vektorového pole z předchozího příkladu po úsečce spojující body $A = (1, 1)$ a $B = (2\sqrt{3}, 2)$. Výpočet proveďte pomocí vztahu (12.12).

12.7.2 Nezávislost křivkového integrálu na cestě

Věta 12.22 má tento důležitý důsledek: Integrál potenciálního vektorového pole \vec{F} po křivce \mathcal{K} závisí pouze na počátečním a koncovém bodě křivky \mathcal{K} a nezávisí vůbec na křivce \mathcal{K} , tj. nezávisí na integrační cestě.

Tento poznatek je formalizován následující definicí.

Definice 12.25: Budiž \vec{F} spojitě vektorové pole v oblasti $G \subseteq E^3$. Říkáme, že

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

nezávisí v množině G na integrační cestě, jestliže pro každé dvě křivky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subset G$, pro něž

$$p.b.\mathcal{K}_1 = p.b.\mathcal{K}_2 \quad a \quad k.b.\mathcal{K}_1 = k.b.\mathcal{K}_2,$$

viz obr. 12.12, platí

$$\int_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}.$$

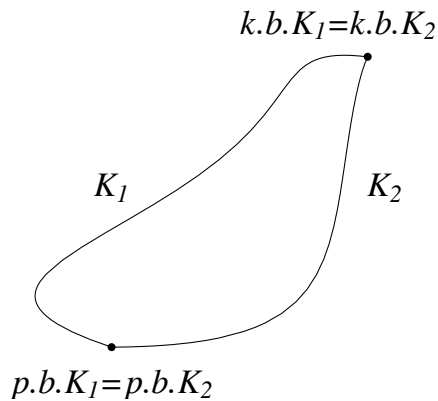
Větu 12.22 lze nyní formulovat takto:

Věta 12.26:

Je-li \vec{F} potenciální vektorové pole na oblasti $G \subseteq E^3$, pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

nezávisí na integrační cestě v oblasti G .



Obrázek 12.12:

Snadno nahlédneme, že platí věta:

Věta 12.27:

Nechť $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ nezávisí na integrační cestě v oblasti G . Pak

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

pro každou **uzavřenou** křivku $\mathcal{K} \subset G$.

Cvičení 12.28: Dokažte větu 12.27.

Cvičení 12.29: Pro vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = [2xy, x]$$

vypočtete hodnotu křivkového integrálu po kružnici se středem v bodě $S = (2, 3)$ a poloměrem $r = 1$. Výpočet proveďte pomocí vztahu (12.12). Proveďte diskusi výsledku vzhledem k větě 12.27.

Nyní dokážeme, že platí i obrácená věta k větě 12.26 .

Věta 12.30:

Nechť \vec{F} je spojitě vektorové pole v oblasti $G \subseteq E^3$ takové, že $\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ nezávisí na integrační cestě v oblasti G . Pak je pole \vec{F} potenciální.

Důkaz:

Zvolme bod $A \in G$ a definujme funkci $U(x, y, z)$ následujícím předpisem. Pro každý bod $X = (x, y, z) \in G$ položme

$$U(x, y, z) = \int_A^X \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (12.22)$$

kde integrálem na pravé straně rozumíme integrál podél libovolné křivky $\mathcal{K} \subset G$, pro kterou je $A = p.b.\mathcal{K}$ a $X = k.b.\mathcal{K}$.

Funkce $U(x, y, z)$ je vztahem (12.22) dobře definována, neboť integrál nezávisí na cestě, závisí pouze na počátečním a koncovém bodu křivky. Koncový bod X je proměnným bodem a probíhá celou množinu G .

Zbývá dokázat, že funkce $U(x, y, z)$, definovaná vztahem (12.22) je potenciálem pole \vec{F} , tj. že platí

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = F_1(x, y, z), \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} = F_2(x, y, z), \quad \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} = F_3(x, y, z).$$

Dokážeme pouze první rovnost, důkaz zbývajících dvou je zcela analogický.

Podle definice parciálních derivací máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_A^{(x+h, y, z)} \vec{F} \cdot \vec{dr} - \int_A^{(x, y, z)} \vec{F} \cdot \vec{dr}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{(x, y, z)}^{(x+h, y, z)} \vec{F} \cdot \vec{dr}}{h}. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Nakreslete si obrázek, tj. křivku na které leží po řadě body $A = (x_0, y_0, z_0)$, $X = (x, y, z)$, $X_h = (x+h, y, z)$. Pro výpočet integrálu

$$\int_{(x, y, z)}^{(x+h, y, z)} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

spojíme body X a X_h úsečkou, jejíž parametrizace je

$$\mathbf{r}(t) = [x+t, y, z], \quad t \in \langle 0, h \rangle.$$

Pozor, zde x, y, z jsou pro tuto chvíli konstanty! Dále pak máme

$$\vec{dr} = [dt, 0, 0],$$

takže

$$\int_{(x, y, z)}^{(x+h, y, z)} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^h F_1(x+t, y, z) dt.$$

Dosazením do (12.23) dostáváme

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h F_1(x+t, y, z) dt}{h}.$$

Protože limity čitatele i jmenovatele jsou pro $h \rightarrow 0$ rovny nule, použijeme L'Hospitalovo

pravidlo: Pozor, derivujeme podle proměnné h , takže derivace jmenovatele je rovna 1 a můžeme psát

$$\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dh} \left[\int_0^h F_1(x+t, y, z) dt \right] \right) = \lim_{h \rightarrow 0} F_1(x+h, y, z) = F_1(x, y, z),$$

což jsme chtěli dokázat. ■

• **Poznámka 12.31:** Podobně jako je primitivní funkce $\int f(x) dx$ určena jednoznačně až na aditivní konstantu, je rovněž potenciál $U(x, y, z)$ vektorového pole \vec{F} určen jednoznačně až na aditivní konstantu. Aditivní konstanta je ve (12.22) “schována” ve volbě hodnoty $U(A)$ v počátečním bodě A , jak uvidíme na příkladech v dalších odstavcích.

12.8 Integrace totálního diferenciálu

V následujícím textu se naučíme řešit následující dvě úlohy:

1. Umět určit, zda je pole \vec{F} potenciální.
2. Nalézt potenciál U pole \vec{F} .

“Mluvou diferenciálních forem” lze tyto úlohy formulovat takto:

1. Umět poznat, kdy je daná diferenciální forma $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ **totálním diferenciálem** nějaké funkce.
2. Tuto funkci nalézt.

Úmluva: Úlohu nalézt k danému totálnímu diferenciálu

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

funkci $U(x, y, z)$ nazýváme integrací totálního diferenciálu.

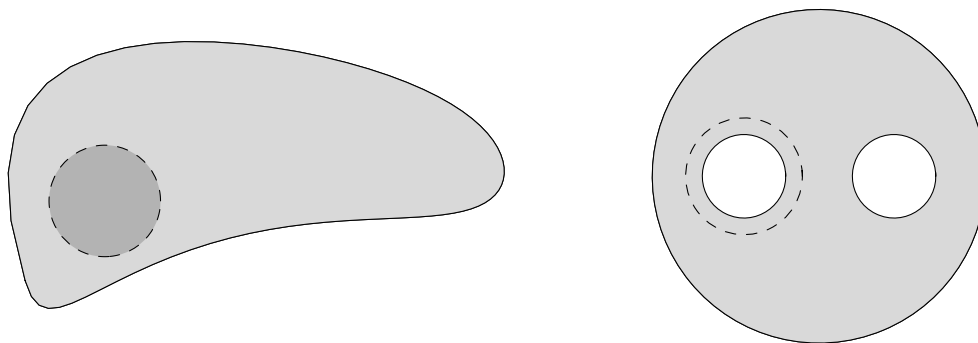
Řešení úlohy ad 1. rozdělíme z pedagogických důvodů na rovinný a prostorový případ.

12.8.1 Rovinný případ

V dalším budeme potřebovat pojem jednoduše souvislé oblasti.

Definice 12.32: Rovinnou oblast $G \subseteq E^2$ nazýváme **jednoduše souvislou**, jestliže má následující vlastnost: Pro každou jednoduchou uzavřenou křivku $\mathcal{K} \subset G$ leží celý vnitřek křivky \mathcal{K} v množině G .

Tedy jednoduše souvislá množina v rovině “nesmí mít díry”. Na obr. 12.13 je množina znázorněná v případě a) jednoduše souvislá a v případě b) není jednoduše souvislá. Kružnice, která je na obrázku nakreslena čárkovaně, nesplňuje podmínku z definice 12.32.



Obrázek 12.13:

Typickým příkladem množiny v **rovině**, která není jednoduše souvislá, je množina kterou obdržíme, když z roviny odstraníme jeden bod. Tedy například množina

$$G = E^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

není jednoduše souvislou množinou.

Věta 12.33:

Budiž $\vec{F}(x, y) = [F_1(x, y), F_2(x, y)]$ rovinné vektorové pole, spojitě diferencovatelné na **jednoduše souvislé** oblasti $G \subseteq E^2$. Pak je \vec{F} **potenciální** právě tehdy, když na G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}. \quad (12.24)$$

Parafrázujme větu 12.33 mluvou diferenciálních forem.

Věta 12.34:

Diferenciální forma

$$F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy,$$

kde $F_1(x, y), F_2(x, y)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na **jednoduše souvislé** oblasti $G \subseteq E^2$, je **totálním diferenciálem** nějaké funkce právě tehdy, je-li na G splněna podmínka (12.24).

Důkaz:

Věta 12.33 má tvar ekvivalence. My zde dokážeme pouze jednu ze dvou implikací, z nichž se ekvivalence skládá. Dokážeme, že z existence potenciálu U pole \vec{F} plyne rovnost (12.24).

Podle předpokladu máme

$$F_1(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \quad a \quad F_2(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}.$$

Pak podle věty 1 z kap. 21 v MI máme

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y \partial x},$$

tudíž dostáváme rovnost

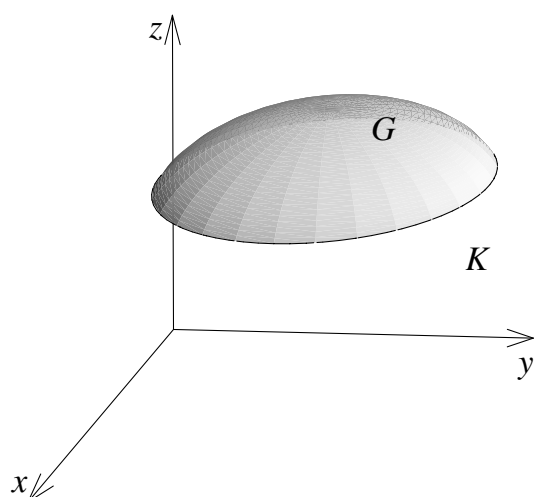
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

kterou jsme chtěli dokázat. ■

12.8.2 Prostorový případ

Jednoduše souvislou oblast v prostoru definujeme obdobným způsobem jako v rovinném případě.

Definice 12.35: Prostorovou oblast $G \subseteq E^3$ nazýváme **jednoduše souvislou**, jestliže má následující vlastnost: Pro každou jednoduchou uzavřenou křivku $\mathcal{K} \subset G$ existuje plocha S , ležící celá v G a mající křivku \mathcal{K} za svoji hranici, viz obr. 12.14.



Obrázek 12.14:

Například množina, která vznikne tak, že z prostoru E^3 odstraníme přímku, **není** jednoduše souvislá, neboť kružnice se středem na této přímce, (např. ležící v rovině kolmé k přímce) nemají vlastnost požadovanou v definici 12.35. ALE! Množina, která vznikne tak, že z prostoru E^3 odstraníme **bod**, je jednoduše souvislá.

Věta 12.36:

Budiž $\vec{F}(x, y, z) = [F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)]$ prostorové vektorové pole, spojitě diferencovatelné na **jednoduše souvislé** oblasti $G \subseteq E^3$. Pak je \vec{F} **potenciální** právě tehdy, když na G platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad (12.25)$$

Parafrázujeme větu 12.36 mluvou diferenciálních forem.

Věta 12.37:

Diferenciální forma

$$F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz$$

kde $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$, $F_3(x, y, z)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na **jednoduše souvislé** oblasti $G \subseteq E^3$, je **totálním diferenciálem** nějaké funkce právě tehdy, jsou-li na G splněny podmínky (12.25).

Důkaz toho, že podmínky (12.25) jsou nutné, je zcela analogický důkazu věty 12.34.

• **Příklad 12.38:** Vypočtěme práci, potřebnou k přemístění hmotného bodu po čtvrtině závitu šroubovice (viz příklad 12.8) z bodu $A = (1, 0, 0)$ do bodu $B = (0, 1, \frac{\pi}{2})$ v silovém poli

$$\vec{F}(x, y, z) = [x, y, z].$$

Řešení: Vektorové pole \vec{F} je definováno na celém E^3 , což je jednoduše souvislá množina a splňuje podmínky (12.25). To znamená, že podle věty 12.36 je křivkový integrál tohoto pole nezávislý na cestě. Kdybychom znali potenciál tohoto pole, vypočítali bychom hledanou práci podle vzorce (12.21) z věty 12.22. Protože potenciál zatím neznáme, vypočtěme hodnotu křivkového integrálu s použitím parametrizace a vztahu (12.12).

Parametrické rovnice uvažované části šroubovice jsou

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

takže dále máme

$$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt, \quad dz = dt.$$

Pak dostaneme

$$\int_{\kappa} x dx + y dy + z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t \cos t + \sin t \cos t + t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Snadno nahlédneme, že potenciál našeho pole je roven

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Použijeme-li vzorce (12.21) z věty 12.22 dostáváme

$$\int_{\kappa} x dx + y dy + z dz = U(0, 1, \frac{\pi}{2}) - U(1, 0, 0) = \frac{1}{2}(0^2 + 1^2 + (\frac{\pi}{2})^2) - \frac{1}{2}(1^2 + 0^2 + 0^2) = \frac{\pi^2}{8}.$$

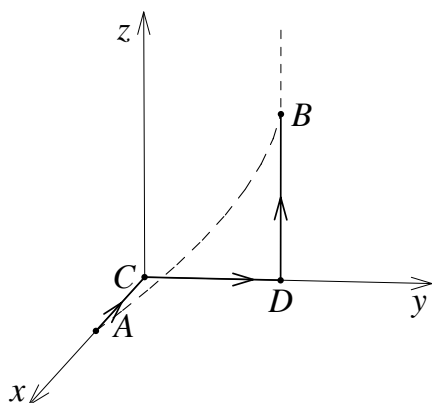
• **Poznámka 12.39:** Jestliže integrál

$$\int_{\kappa} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

nezávisí na integrační cestě, pak nejvhodnější křivkou pro výpočet tohoto integrálu - pokud neznáme potenciál - bývá křivka složená z **úseček rovnoběžných s osami souřadnic**.

Proberme tento postup podrobněji, protože ho budeme podstatným způsobem používat v následujícím odstavci při výpočtu potenciálu.

Vraťme se k předchozímu příkladu 12.38 a vypočítejme znovu hodnotu křivkového integrálu avšak nyní po křivce složené z úseček, jak je znázorněna na obr. 12.15 silnou čarou.



Obrázek 12.15:

Čtvrtina závitu šroubovice z příkladu 12.38 je na obr. 12.15 znázorněna přerušovaně. Lomená křivka L se skládá po řadě z orientovaných úseček \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DB} . Označme po řadě L_1 , L_2 , L_3 uvažované úsečky a tyto parametrizujeme.

$$\text{parametrizace } L_1 : \quad x = 1 - t, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \text{tedy} \\ dx = -dt, \quad dy = 0, \quad dz = 0.$$

$$\text{parametrizace } L_2 : \quad x = 0, \quad y = t, \quad z = 0, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \text{tedy} \\ dx = 0, \quad dy = dt, \quad dz = 0.$$

$$\text{parametrizace } L_3 : \quad x = 0, \quad y = 1, \quad z = t, \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \text{tedy} \\ dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = dt.$$

Křivkový integrál po lomené čáře spočteme jako součet integrálů přes jednotlivé úsečky L_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{L_1} x \, dx + y \, dy + z \, dz + \int_{L_2} x \, dx + y \, dy + z \, dz + \int_{L_3} x \, dx + y \, dy + z \, dz = \\ = - \int_0^1 (1-t) \, dt + \int_0^1 t \, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Cvičení 12.40: Ověřte, že vektorové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = \left[\frac{z}{x^2 y} - \frac{z}{x^2 + z^2}, \frac{z}{xy^2}, \frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right],$$

je potenciální v oblasti

$$G = \{(x, y, z) \in E^3; x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

12.9 Výpočet potenciálu

Při znalosti potenciálu U pole \vec{F} jsme výpočet $\int_{\kappa} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ prováděli jednoduše a snadno pomocí vztahu (12.21). Pokud ale potenciál U neznáme, musíme použít vztah (12.12). Jak jsme viděli v předchozím příkladu, je výpočet pomocí potenciálu daleko jednodušší. Dále se naučíme stanovit potenciál vektorového pole (pokud existuje).

Začneme rovinným případem.

- **Příklad 12.41:** Uvažujme vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = [x^2 - y^2, 5 - 2xy]$$

definované na celé rovině E^2 . Dokažme, že je potenciální a najděme jeho potenciál $U(x, y)$.

Řešení: E^2 je jednoduše souvislá a protože

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -2y = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

je vektorové pole $\vec{F}(x, y)$ potenciální a diferenciální forma

$$(x^2 - y^2) dx + (5 - 2xy) dy$$

je totálním diferenciálem nějaké funkce, přesněji: **je totálním diferenciálem potenciálu $U(x, y)$.**

Výpočet potenciálu provedeme dvěma způsoby.

1. způsob:

Tento způsob používáme obvykle v případě rovinných vektorových polí. Pro hledaný potenciál platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} &= x^2 - y^2, \\ \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} &= 5 - 2xy. \end{aligned} \tag{12.26}$$

Soustava těchto dvou rovnic je soustavou **parciálních diferenciálních rovnic**. (To jsou takové rovnice, ve kterých se vyskytují parciální derivace neznámé funkce.) Vyřešit tuto soustavu znamená nalézt funkci $U(x, y)$, která soustavě vyhovuje.

Vezměme nejprve první z obou rovnic (12.26) a zintegrujme levou i pravou stranu této rovnice podle proměnné x . Na proměnnou y se budeme pro tuto chvíli dívat jako na konstantu (stejně jako při parciálním derivování). Takže dostáváme

$$\int \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx = \int (x^2 - y^2) dx,$$

tudíž

$$U(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + \varphi(y). \tag{12.27}$$

Funkce $\varphi(y)$ na pravé straně této rovnice je integrační konstantou vzhledem k proměnné x , ale může záviset na y ! Určením funkce $\varphi(y)$ dostaneme hledanou funkci $U(x, y)$. K tomu, abychom funkci $\varphi(y)$ určili, zderivujeme obě strany rovnice (12.27) a dostaneme

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = -2xy + \varphi'(y). \quad (12.28)$$

Nyní porovnáním pravých a levých stran této rovnice s druhou rovnicí v (12.26) dostáváme

$$-2xy + \varphi'(y) = 5 - 2xy, \quad (12.29)$$

a po úpravě dostaneme jednoduchou diferenciální rovnici 1. řádu pro hledanou funkci $\varphi(y)$

$$\varphi'(y) = 5,$$

jejíž řešení získáme integrací podle y , tj.

$$\varphi(y) = 5y + C.$$

Dosazením za $\varphi(y)$ do (12.27) dostaneme

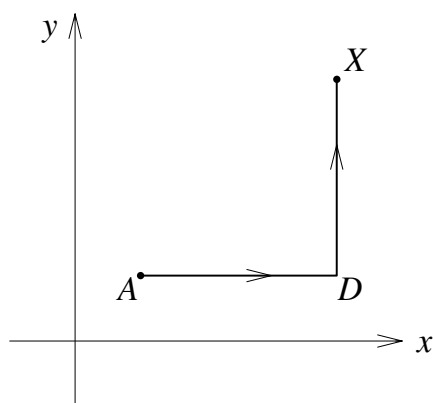
$$U(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + 5y + C, \quad (12.30)$$

kde C je integrační konstanta.

2. způsob:

Zvolme pevný bod A , například $A = (1, 1)$ a označme libovolný bod $X = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in E^2$. Potom

$$U(\tilde{x}, \tilde{y}) - U(1, 1) = \int_A^X \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_A^X (x^2 - y^2) dx + (5 - 2xy) dy. \quad (12.31)$$



Obrázek 12.16:

Jak víme, je naše pole potenciální a tudíž křivkový integrál (12.31) nezávisí na cestě. Tedy podobně jako v poznámce 12.39 volíme křivku, po které budeme integrovat, složenou s úsečkami rovnoběžnými se souřadnicovými osami, viz obr. 12.16.

Napišme parametrické rovnice úseček AD a DX .

$$AD: \quad x(t) = t, \quad y(t) = 1, \quad t \in \langle 1, \tilde{x} \rangle, \quad dx = dt, \quad dy = 0.$$

$$DX : \quad x(t) = \tilde{x}, \quad y(t) = t, \quad t \in \langle 1, \tilde{y} \rangle, \quad dx = 0, \quad dy = dt.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}, \tilde{y}) - U(1, 1) &= \int_A^X (x^2 - y^2) dx + (5 - 2xy) dy = \\ &= \int_A^D (x^2 - y^2) dx + (5 - 2xy) dy + \int_D^X (x^2 - y^2) dx + (5 - 2xy) dy = \\ &= \int_1^{\tilde{x}} (t^2 - 1) dt + \int_1^{\tilde{y}} (5 - 2\tilde{x}t) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^{\tilde{x}} + \left[5t - \tilde{x}t^2 \right]_1^{\tilde{y}} = \\ &= \frac{\tilde{x}^3}{3} - \tilde{x}\tilde{y}^2 + 5\tilde{y} - \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

Jelikož jsme bod $X = (\tilde{x}, \tilde{y})$ uvažovali jako libovolný bod dané oblasti, lze vynecháním vlnovek dostat

$$U(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + 5y - \frac{13}{3} + U(1, 1),$$

což je stejný výsledek jako při použití 1. způsobu, kde integrační konstanta je ve tvaru $C = -\frac{13}{3} + U(1, 1)$.

• **Poznámka 12.42:** 1. způsob výpočtu potenciálu je pro třírozměrný případ složitější a proto jej nebudeme používat.

• **Příklad 12.43:** Zjistěme, zda diferenciální forma

$$(y^2 + 2xz^2 - 1) dx + 2xy dy + (2x^2z + z^3) dz$$

je totálním diferenciálem. V kladném případě vypočtěte potenciál $U(x, y, z)$.

Řešení: Vektorové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = [y^2 + 2xz^2 - 1, 2xy, 2x^2z + z^3]$$

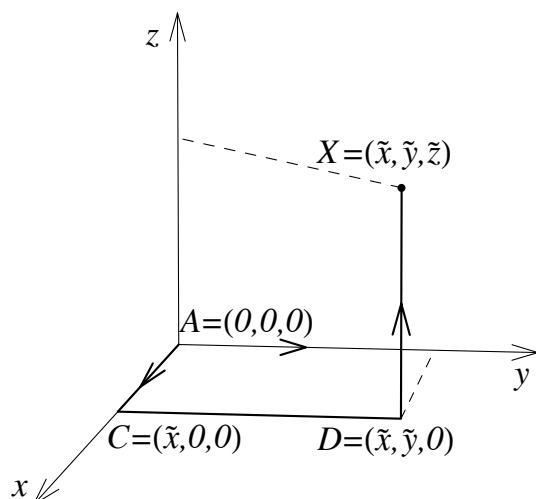
je spojitě diferencovatelné na E^3 , tj. na jednoduše souvislé množině. Protože dále platí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 4xz = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y},$$

je podle věty 12.37 daná diferenciální forma totálním diferenciálem potenciálu $U(x, y, z)$.

Potenciál nyní vypočteme 2. způsobem, tj. pomocí křivkového integrálu. Zvolíme pevný bod $A = (0, 0, 0)$ a proměnný bod $X = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Pak

$$U(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - U(0, 0, 0) = \int_A^X (y^2 + 2xz^2 - 1) dx + 2xy dy + (2x^2z + z^3) dz. \quad (12.32)$$



Zvolme opět křivku složenou z orientovaných úseček rovnoběžných s osami souřadnic, viz obr. 12.17.

Obrázek 12.17:

Napišme parametrické rovnice úseček AC , CD , DX (příslušné diferenciály již vynecháme):

$$AC : \quad x(t) = t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 0, \quad t \in \langle 0, \tilde{x} \rangle,$$

$$CD : \quad x(t) = \tilde{x}, \quad y(t) = t, \quad z(t) = 0, \quad t \in \langle 0, \tilde{y} \rangle,$$

$$DX : \quad x(t) = \tilde{x}, \quad y(t) = \tilde{y}, \quad z(t) = t, \quad t \in \langle 0, \tilde{z} \rangle.$$

Nyní už známým způsobem dostáváme

$$\begin{aligned} U(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - U(0, 0, 0) &= \int_0^{\tilde{x}} (-1) dt + \int_0^{\tilde{y}} 2\tilde{x}t dt + \int_0^{\tilde{z}} (2\tilde{x}^2t + t^3) dt = \\ &= [-t]_0^{\tilde{x}} + [\tilde{x}t^2]_0^{\tilde{y}} + \left[\tilde{x}^2t^2 + \frac{t^4}{4} \right]_0^{\tilde{z}} = \\ &= -\tilde{x} + \tilde{x}\tilde{y}^2 + \tilde{x}^2\tilde{z}^2 + \frac{\tilde{z}^4}{4}. \end{aligned}$$

Tedy konečně

$$U(x, y, z) = -x + xy^2 + x^2z^2 + \frac{z^4}{4} + C$$

je hledaný potenciál našeho vektorového pole. O správnosti výsledku se můžete sami přesvědčit zkouškou, tak že vypočítáte příslušné parciální derivace funkce $U(x, y, z)$.

• **Příklad 12.44:** Uvažujme vektorové pole

$$\vec{F}(x, y) = \left[-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right],$$

které je spojitě diferencovatelné na množině

$$G = E^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

která není jednoduše souvislá. Spočítejme

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

kde křivka \mathcal{K} je jednotková kružnice se středem v počátku.

Řešení: Parametrizace kružnice je

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad dx = -\sin t, \quad dy = \cos t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Po dosazení dostáváme

$$\int_{\mathcal{K}} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

Závěr: Protože integrál přes uzavřenou křivku je nenulový, pak podle věty 12.27 není pole \vec{F} potenciální na G , resp. příslušná diferenciální forma není totálním diferenciálem nějaké funkce na množině G , i když na této množině jsou splněny podmínky (12.24) z věty 12.33. Závěr věty neplatí proto, protože množina G **není** jednoduše souvislá. Tedy předpoklad o jednoduše souvislé množině je ve větě 12.33 podstatný!

Cvičení 12.45: Vypočtěte potenciál vektorového pole

$$\vec{F}(x, y) = \left[-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right].$$

Za jednoduše souvislou množinu vezměte 1. kvadrant, tj. $G = \{(x, y); x > 0, y > 0\}$. Výsledek porovnejte s funkcí $U(x, y)$ z příkladu 12.23.

Cvičení 12.46: Vypočtěte potenciál vektorového pole $\vec{F}(x, y, z)$ zadaného ve cvičení 12.40.

Návody ke cvičením z kap. 12

- 12.16** Využijte vztahu (12.10) z definice 12.10 a vlastností integrálu skalárního pole, věta 11.16. Vlastnosti lze rovněž dokázat pomocí vztahu (12.12) a vlastností skalárního součinu.
- 12.17** Obě dvě parametrizace určují na křivce \mathcal{K} stejné pole jednotkových tečných vektorů, viz odstavec 12.4. Z definičního vztahu (12.10) pak plyne platnost dokazovaného tvrzení.
- 12.24** Úsečka AB je parametrizována rovnicemi $x = 1 + (2\sqrt{3} - 1)t$, $y = 1 + t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Dále postupujte jako v příkladu 12.14 .
- 12.28** Důkaz vyplývá ze vztahu (12.21).
- 12.29** Kružnice je parametrizována rovnicemi $x = 2 + \cos t$, $y = 3 + \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
- 12.40** G je jednoduše souvislá oblast. Ověřte platnost podmínek (12.25).
- 12.45** Při 2. způsobu výpočtu potenciálu lze s výhodou použít identity $\operatorname{arctg} \frac{1}{a} + \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2}$ platné pro $a > 0$.
- 12.46** Postupujte shodně s příkladem 12.43. Volte $A = (1, 1, 1)$.

Dodatek A

Supremum a infimum číselných množin

Než zavedeme nové pojmy supremum a infimum a ukážeme jejich význam připomeňme některé definice ze skript [MI].

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdná množina reálných čísel. Říkáme, že množina M je **shora (zdola) omezená**, jestliže existuje číslo a takové, že pro všechna $x \in M$ je $x \leq a$ ($x \geq a$). Číslo a pak nazýváme **horní (dolní) závorou** množiny M . Množinu omezenou současně shora i zdola nazýváme **omezenou**. Největší číslo množiny M , neboli **maximum** množiny M , které značíme $\max M$, má následující dvě vlastnosti:

- (i) Pro všechna $x \in M$ je $x \leq \max M$, tj. $\max M$ je horní závorou množiny M .
- (ii) $\max M \in M$, tj. největší číslo množiny M patří do M .

Podobně nejmenší číslo množiny M , neboli **minimum** množiny M , které značíme $\min M$, má následující dvě vlastnosti:

- (i) Pro všechna $x \in M$ je $x \geq \min M$, tj. $\min M$ je dolní závorou množiny M .
- (ii) $\min M \in M$, tj. nejmenší číslo množiny M patří do M .

Uvažujme množinu $M_2 = \langle -7, 3 \rangle$. Tato množina je sice shora omezená, ale nemá maximum. Číslo 3 nemůže být maximem množiny M_2 , neboť do této množiny nepatří a rovněž žádné číslo $a \in M_2$ menší než 3 nemůže být maximem množiny M_2 , neboť mezi číslem $a < 3$ a číslem 3 leží prvky množiny M_2 , tj. čísla větší nežli a a menší než 3, např. číslo $\frac{a+3}{2}$.

Shora omezená množina M_2 nemá tedy maximum. Intuitivně cítíme, že číslo 3 zde pro množinu M_2 hraje roli "jakéhosi maximálního prvku". Tato situace nás vede k tomu, abychom zavedli obecnější pojem než je $\max M$. Tímto pojmem je supremum množiny M .

Demonstrujme tento pojem napřed na množině $M_2 = \langle -7, 3 \rangle$. Její horní závorou je každé číslo větší nebo rovno číslu 3, tj. množina všech horních závor množiny M_2 je interval $\langle 3, \infty \rangle$.

Číslo 3 je nejmenší horní závora množiny M_2 , tj. klademe pak

$$\sup M_2 = 3.$$

Definice A.1: Necht' je množina $M \subset \mathbb{R}$ shora omezená. Nejmenší horní závoru množiny M nazýváme **supremum** množiny M a značíme $\sup M$.

Věta A.2:

Každá shora omezená množina $M \subset \mathbb{R}$ má supremum.

• **Poznámka A.3:** Předchozí věta vyjadřuje jednu ze základních vlastností množiny reálných čísel a to tu vlastnost, že reálná čísla jsou na číselné ose rozložena spojitě, tj. "bez mezer".

• **Poznámka A.4:** Rozeberme podrobně definici A.1. Označme $g = \sup M$, tj. číslo g je nejmenší horní závorou množiny M . Tedy

1) g je horní závorou, tj. pro všechna $x \in M$ je $x \leq g$,

2) g je nejmenší horní závorou, tzn. že je-li $g' < g$, pak g' nemůže být horní závorou množiny M , tudíž existuje $x \in M$ takové, že $x > g'$.

V předchozí poznámce jsme dokázali následující větu.

Věta A.5:

Číslo $g = \sup M$ právě tehdy, když

(i) Pro všechna $x \in M$ je $x \leq g$.

(ii) Pro každé $g' < g$ existuje $x \in M$ takové, že $x > g'$.

• **Poznámka A.6:** Zřejmě platí: Má-li množina M maximum, pak je toto maximum rovněž supremem množiny M .

• **Poznámka A.7:** Někteří autoři zavádějí pojem suprema i pro množiny, které nejsou shora omezené a to tak, že supremum shora neomezené množiny kladou definitornicky rovno $+\infty$. Pak je např. $\sup \mathbb{N} = +\infty$, $\sup(1, \infty) = +\infty$.

Zcela analogicky a proto velmi stručně zavedeme pojem minima a infima množiny. Připomeňme, že nejmenší prvek (minimum) množiny $M \subset \mathbb{R}$, tj. $\min M$ má tyto dvě vlastnosti:

(i) Pro všechna $x \in M$ je $x \geq \min M$, (ii) $\min M \in M$.

Definice A.8: Největší dolní závoru množiny M nazýváme **infimum** množiny M a značíme $\inf M$.

Věta A.9:

Každá zdola omezená množina $M \subset \mathbb{R}$ má infimum. Číslo $h = \inf M$ právě tehdy, jestliže číslo h má následující dvě vlastnosti:

- (i) Pro všechna $x \in M$ je $x \geq h$.
- (ii) Pro každé $h' > h$ existuje $x \in M$ takové, že $x < h'$.

• **Příklad A.10:** Budiž $M = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Dokažme, že $\inf M = 0$.

Řešení: Použijeme větu A.9. (i) Je zřejmé, že $\frac{1}{n} \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. (ii) Zvolme libovolné $h' > 0$. Pak lze nalézt takové přirozené číslo n , že $\frac{1}{n} < h'$, stačí volit $n > \frac{1}{h'}$. Tudíž číslo $h = 0$ je infimem množiny M . Dále platí $\sup M = \max M = 1$, $\min M$ neexistuje.

• **Příklad A.11:** Budiž A množina všech racionálních čísel ležících v uzavřeném intervalu $\langle -10, \sqrt{2} \rangle$, tj. $A = \mathbb{Q} \cap \langle -10, \sqrt{2} \rangle$. Určeme $\min A$, $\inf A$, $\max A$, $\sup A$.

Řešení: $\inf A = \min A = -10$, $\sup A = \sqrt{2}$, $\max A$ neexistuje, neboť $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Na závěr tohoto dodatku ukažme důkaz věty 5.10 skript [MI], která podstatně využívá věty A.2 a která říká následující:

Věta A.12:

Je-li funkce $y = f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje číslo $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) = 0$.

Důkaz:

Předpokládejme např., že $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. Uvažme množinu

$$M = \{x \in \langle a, b \rangle; f(x) < 0\},$$

tj. M je množina všech čísel z intervalu $\langle a, b \rangle$ v nichž je funkce f záporná. Množina M je neprázdná a shora omezená. Existuje tedy podle věty 1.1 $\sup M$. Položme

$$c = \sup M.$$

Ukážeme, že $f(c) = 0$ tím způsobem, že vyloučíme obě zbývající možnosti, tj. ukážeme, že nemůže nastat ani případ $f(c) > 0$ ani případ $f(c) < 0$.

a) Kdyby bylo $f(c) < 0$ pak ze spojitosti funkce f v bodě c plyne, že existuje okolí $O_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$ takové, že $f(x) < 0$ pro všechna $x \in O_\delta$, tudíž c nemůže být supremem množiny M .

b) Podobně, kdyby bylo $f(c) > 0$ pak ze spojitosti funkce f v bodě c plyne existence takového $O_\delta(c)$, že pro všechna $x \in O_\delta(c)$ je $f(x) > 0$. Avšak z definice množiny M a suprema c plyne, že pro jakékoliv $c' < c$ existuje $x' > c'$, pro něž je $f(x') < 0$, což je spor s tím, že $f(x) > 0$ pro všechna $x \in O_\delta(c)$. ■

Dodatek B

Řady

B.1 Číselné řady

Základním pojmem teorie řad je pojem součtu nekonečné řady, tj. součtu nekonečně mnoha čísel. Zatímco součet konečného počtu čísel je samozřejmý a zápis

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

jsme již dříve používali, není na první pohled jasné, co součet nekonečně mnoha čísel

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

znamená, a tento pojem je třeba nejprve definovat. Přirozený způsob jak to udělat je ten, že sčítáme "stále více členů" řady a zjišťujeme, zda se takto získané součty blíží nějakému číslu, tj. vyšetřujeme limitu těchto konečných součtů.

Definice B.1: (Nekonečnou) řadou rozumíme součet členů posloupnosti a_1, a_2, a_3, \dots nekonečně mnoha reálných čísel zapsaných ve tvaru

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Součet prvních n členů řady, tj. součet

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i,$$

nazýváme n -tým částečným součtem dané řady. Je-li limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ konečná, nazýváme číslo s součtem řady, píšeme

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

a říkáme, že tato řada **konverguje**. Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nevlastní nebo tato limita neexistuje, součet řady nedefinujeme a říkáme, že řada **diverguje**.

• **Příklad B.2:** Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá řada **harmonická**. Ukážeme, že tato řada je divergentní. Zřejmě

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \frac{1}{2^{n-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \geq n \cdot \frac{1}{2},$$

neboť každý výraz v závorce je větší než $\frac{1}{2}$. Odtud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{2} = +\infty,$$

a harmonická řada tedy diverguje.

• **Příklad B.3:** Uvažujme řadu

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Zřejmě

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 1 & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje a tato řada diverguje.

• **Poznámka B.4:** Dolní mez pro sčítací index nemusí být vždy číslo 1 (viz předchozí příklad), ale obvykle ji volíme tak, aby zápis n -tého členu byl co možná nejjednodušší. Např. $\sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{i-3}$ a $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}$ jsou jen jiné zápisy harmonické řady z příkladu B.2. Rovněž sčítací index můžeme označovat různými symboly, obvykle i, j, k nebo n .

Věta B.5:

Je-li řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergentní, pak $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$.

Důkaz:

Nechť řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje a $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Pak ale též $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}$. Odtud

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$



• **Poznámka B.6:** Věta B.5 říká, že podmínka $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ je nutnou podmínkou pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Větu nelze obrátit, tj. ze vztahu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ neplyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, jak ukazuje příklad harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, kde $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, ale řada diverguje, viz příklad B.2.

• **Příklad B.7:** Velmi důležitou řadou je tzv. **geometrická** řada. Je to každá řada tvaru

$$a + aq + aq^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} aq^i, \quad \text{kde } a, q \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Číslo q nazýváme kvocientem geometrické řady.

Věta B.8:

Geometrická řada $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i$ je konvergentní právě tehdy, když $|q| < 1$. V tomto případě pro její součet platí vztah

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = \frac{a}{1-q}.$$

Důkaz:

Podle vzorce pro rozdíl n -tých mocnin

$$1 - q^n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

dostáváme

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Je-li $|q| < 1$, je $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ a dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}.$$

Naopak je-li $|q| \geq 1$, pak $\lim_{i \rightarrow \infty} aq^i$ není rovna nule a tedy podle věty B.5 je daná řada divergentní. ■

Cvičení B.9: Určete součet nekonečné řady

$$3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + (-1)^n \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$$

Definice B.10: Říkáme, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje **absolutně**, jestliže konverguje řada $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$.

Věta B.11:

Jestliže řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje absolutně, pak tato řada konverguje. Jinak řečeno: konverguje-li řada $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$, konverguje i řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

• **Poznámka B.12:** Tvrzení věty B.11 nelze obrátit. V příkladě B.19 ukážeme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje, ale jak víme, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ diverguje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je tedy příkladem konvergentní řady, která není absolutně konvergentní.

Určit součet konvergentní řady je obvykle značně obtížná úloha, kterou umíme řešit pro geometrickou řadu a dále v některých jednoduchých případech. Jednodušší úlohou může být úloha zjistit, zda je daná řada konvergentní (aniž bychom určovali její součet). K tomu slouží tzv. **kritéria konvergence**. Těchto kritérií je celá řada, některá z nich si nyní ukážeme.

Věta B.13: (Srovnávací kritérium)

Nechť pro každé $n \geq 1$, příp. $n \geq n_0$, platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Potom platí:

(i) konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

(ii) diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz:

Označme $s_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ a $S_n = (b_1 + b_2 + \dots + b_n)$. zřejmě $s_n \leq S_n$ a obě posloupnosti $\{s_n\}$ i $\{S_n\}$ jsou neklesající. Je-li tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ konečná, je nutně konečná i $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ a tím je dokázáno tvrzení (i). Tvrzení (ii) se dokáže analogicky, když uvážíme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, protože se jedná o řady s nezápornými členy. ■

• **Poznámka B.14:** Ve větě B.13 je možno platnost předpokladu $0 \leq a_n \leq b_n$ požadovat pro všechna $n \geq n_0$, kde $n_0 \geq 1$ je nějaký pevný index. Konvergence nebo divergence řady totiž nezáleží na hodnotách konečného počtu sčítanců.

• **Příklad B.15:** Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Protože $0 \leq \frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ pro $n \geq 1$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentní (je to geometrická řada s kvocientem $q = 1/2$), je podle věty B.13 konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

• **Příklad B.16:** Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ je divergentní, protože $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$ pro $n \geq 2$ a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní.

Věta B.17: (Podílové kritérium)

Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \neq 0$.

1. Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.
2. Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Větu nebudeme dokazovat. Poznamenejme jen, že důkaz první části spočívá na porovnání dané řady s jistou geometrickou řadou. Pro druhou část lze ukázat, že řada nesplňuje nutnou podmínku pro konvergenci danou větou B.5. Je-li

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, \tag{B.1}$$

podílové kritérium o konvergenci řady nerozhodne. Existují řady konvergentní (např. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, viz příklad B.23) i řady divergentní (např. harmonická řada v příkladě B.2), pro které platí (B.1).

Zatím se uvedená kritéria týkala absolutní konvergence. Uvedme nyní jedno kritérium pro neabsolutní konvergenci, Leibnitzovo kritérium. Týká se tzv. alternujících řad, tj. řad, jejichž členy pravidelně mění znaménko.

Věta B.18: (Leibnitzovo kritérium)

Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí:

$$a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \text{ pro každé } n \geq 1, \text{ a současně } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konverguje.

• **Příklad B.19:** Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ splňuje podmínky věty B.18 (posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je klesající a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$) a tedy konverguje. Jak již bylo řečeno, tato řada nekonverguje absolutně, srovnej s harmonickou řadou v příkladu B.2.

Cvičení B.20: Vyšetřete konvergenci řad

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{n!} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

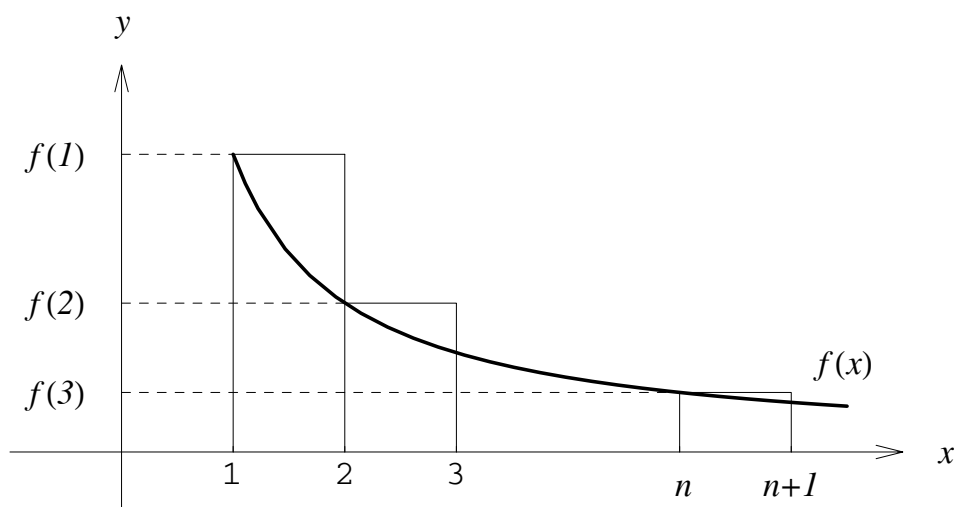
Pozorný čtenář si jistě všiml jistých podobností mezi nevlastními integrály a nekonečnými řadami, které se týkají jak definic a terminologie (např. konvergence, divergence integrálu nebo řady), tak i některých tvrzení (např. srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu - věta 10.3 skript [MI] nebo řady - věta B.13).

Další souvislosti ukazuje následující věta, tzv. integrální kritérium pro absolutní konvergenci řady.

Věta B.21: (Integrální kritérium)

Nechť funkce $f(x)$ definovaná pro $x \geq 1$ je nerostoucí spojitá funkce splňující podmínku $f(x) \geq 0$ pro $x \geq 1$.

Pak $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.



Obrázek B.1:

• **Poznámka B.22:** Intuitivně si lze tvrzení věty B.21 představit následovně. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje, tj. součet velikostí ploch všech obdélníků o stranách 1 a $f(n)$, $n = 1, 2, \dots$, je konečný, je konečná i velikost plochy ohraničené grafem funkce f , osou x a přímkou $x = 1$, neboť je částí sjednocení ploch všech uvažovaných obdélníků. Tedy integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konverguje, viz obr. B.1. Podobně si lze představit i druhou část tvrzení.

Protože podle předpokladu platí pro členy řady $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ podmínka $f(n) \geq 0$, týká se integrální kritérium absolutní konvergence.

- **Příklad B.23:** Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, protože integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) - (-1) = 1$$

konverguje.

- **Příklad B.24:** Pomocí integrálního kritéria můžeme také dokázat divergenci harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Protože integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

B.2 Mocninná a Taylorova řada

Definice B.25: Řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

kde x_0, a_0, a_1, \dots jsou reálná čísla, x je proměnná, nazýváme **mocninnou řadou**. Čísla a_0, a_1, \dots nazýváme **koefficienty** a číslo x_0 **střed** mocninné řady.

- **Poznámka B.26:** Pro zvolenou hodnotu proměnné x je mocninná řada číselnou řadou. Součet mocninné řady představuje jistou funkci, definovanou právě pro ty hodnoty proměnné x , pro které odpovídající číselná řada konverguje.

- **Příklad B.27:** Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (se středem $x_0 = 0$) je geometrickou řadou s kvocientem x , a tedy konverguje právě pro $x \in (-1, 1)$. Podle věty B.8 pro její součet platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Věta B.28:

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada. Pak existuje číslo $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ (tj. $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ nebo $R = +\infty$), takové, že:

1. Je-li $R = 0$, pak daná mocninná řada konverguje pouze pro $x = x_0$ a pro ostatní $x \neq x_0$ diverguje.
2. Je-li $R \in (0, +\infty)$, pak daná mocninná řada konverguje absolutně pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$.
3. Je-li $R = +\infty$, pak daná mocninná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Číslo R nazýváme **poloměrem konvergence** mocninné řady.

- **Poznámka B.29:** Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je možno určit pomocí podílového kritéria, viz. dodatek B. Označme

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Ukážeme, že R je poloměr konvergence dané mocninné řady (předpokládáme ovšem, že uvedená limita existuje). Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)}{a_n} \right| = |x-x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Odtud okamžitě plyne, že pro $|x-x_0| < R$ mocninná řada konverguje absolutně a naopak pro $|x-x_0| > R$ diverguje. Tedy R je poloměrem konvergence dané mocninné řady.

- **Poznámka B.30:** V případě 2. věty B.28, tj. v případě $R \in (0, +\infty)$, nelze říci obecně nic o konvergenci mocninné řady pro $x = x_0 - R$ a $x = x_0 + R$. Existují příklady, kdy mocninná řada konverguje jak pro $x = x_0 - R$ tak pro $x = x_0 + R$, příklady kdy konverguje pouze pro jednu z těchto hodnot, i příklady, kdy pro obě z těchto hodnot diverguje.

- **Příklad B.31:** Určete, pro které hodnoty proměnné x konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Řešení: Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x \cdot \frac{n}{n+1} \right| = |x|,$$

je podle podílového kritéria daná řada absolutně konvergentní pro $x \in (-1, 1)$ a divergentní pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Poloměr konvergence dané mocninné řady je tedy roven 1. Pro $x = 1$ je daná řada harmonickou řadou, a tedy řadou divergentní, pro $x = -1$ je daná řada řadou z příkladu B.19, která je konvergentní.

Definice B.32: Necht funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. **Taylorovou řadou** funkce f se středem v x_0 rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n .$$

• **Příklad B.33:** Odvoďte Taylorovu řadu funkce $f(x) = e^x$ se středem v bodě $x_0 = 0$ a určete, pro která x tato řada konverguje.

Řešení: Pro $f(x) = e^x$ je $f^{(n)}(x) = e^x$, a tedy $f^{(n)}(x_0) = 1$. Taylorova řada je tedy řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Vyšetřeme konvergenci této řady podílovým kritériem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} .$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ tedy konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

• **Poznámka B.34:** Součet Taylorovy řady, pokud existuje, budeme značit symbolem $T(x)$. Protože **Taylorův polynom** $T_n(x)$ n -tého stupně funkce f v bodě x_0 je právě n -tým **částečným součtem Taylorovy řady** této funkce, je podle definice B.1

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) .$$

V dalším se budeme zabývat otázkou, kdy $f(x) = T(x)$. Z Taylorova vzorce $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ dostaneme limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = T(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) .$$

Z této rovnosti plyne, že $f(x) = T(x)$ právě pro ta x , pro která je $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Tím jsme dokázali následující větu:

Věta B.35:

Pro součet $T(x)$ Taylorovy řady funkce f se středem v x_0 platí

$$T(x) = f(x) \quad \text{právě tehdy, když} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 .$$

• **Poznámka B.36:** Je důležité poznamenat, že existují funkce, které mají v bodě x_0 všechny derivace, a tedy mají Taylorovu řadu, jejíž součet se dané funkcí v okolí x_0 nerovná. Pro tyto funkce zřejmě $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$. Příkladem takové funkce je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Lze ukázat, že $T(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Ilustrujme si použití věty B.35.

• **Příklad B.37:** Ukážeme, že

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Z příkladu B.33 víme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je Taylorovou řadou funkce e^x se středem v $x_0 = 0$ a že tato řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro pevně zvolené $x \in \mathbb{R}$ platí podle věty 6.1 skript [MI]

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde c leží mezi x a x_0 . Zřejmě

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \left| e^{|x|} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|.$$

Ukážeme-li, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, pak nutně i $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Ale řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je řadou konvergentní, a tedy podle věty B.5 je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Cvičení B.38: Ukažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Na závěr tohoto odstavce uvedme Taylorovy řady některých funkcí, spolu s intervaly, kde se těmito funkcím rovnají:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\ln(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1) \\
\operatorname{arctg} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)
\end{aligned}$$

Návody ke cvičením z dodatku B

B.9 Otestujte, že se jedná o geometrickou řadu a použijte větu B.8.

B.20 Použijte podílové resp. srovnávací kritérium.

B.38 (a) Ukažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ je Taylorovou řadou funkce $\sin x$ se středem $x_0 = 0$.

(b) Ukažte, že tato řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

(c) Podobně jako v příkladě B.37 ukažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

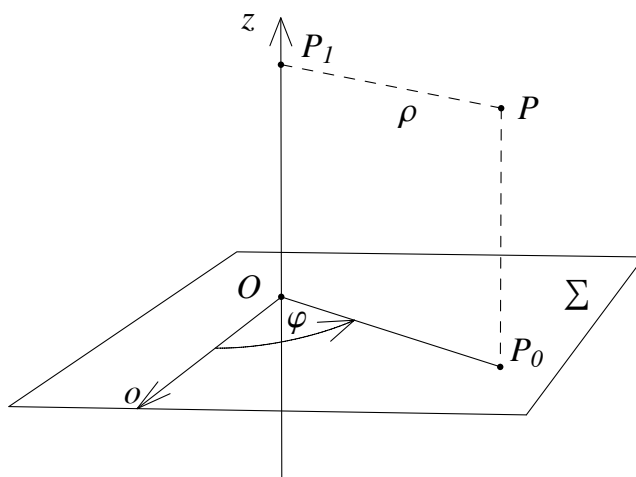
Příloha C

Cylindrické a sférické souřadnice v E^3

Ve skriptech [MI], v odstavci 7.5 jsme zavedli polární souřadnice v rovině. Nyní zavedeme cylindrické a sférické souřadnice v prostoru E^3 .

C.1 Cylindrické (válcové) souřadnice

Zavedení cylindrických souřadnic do E^3 spočívá ve dvou krocích, které jsou znázorněny na obr. C.1:



Obrázek C.1:

1. krok:

V prostoru E^3 zvolme bod O za počátek souřadnicové soustavy. Tímto bodem vedeme tzv. **základní rovinu** Σ a přímku **kolmou** k rovině Σ , kterou nazýváme osou z . V rovině Σ zavedeme **polární souřadnice** s pólem v bodě O a polární osou o .

2. krok:

Nyní každému bodu $P \in E^3$, který neleží na ose z , přiřadíme uspořádanou trojici čísel (ρ, φ, z) následujícím způsobem:

Promítneme bod P kolmo na rovinu Σ a označíme P_0 jeho kolmý průmět. Označme polární souřadnice bodu P_0 v rovině Σ ρ a φ , tj. ρ je vzdálenost bodu P_0 od počátku O a φ je příslušný polární úhel. Pak promítneme bod P kolmo na osu z a dostaneme bod P_1 , (viz obr. C.1) který má na ose z souřadnici z . Bodu P pak přiřazujeme uspořádanou trojici čísel

$$(\rho, \varphi, z)$$

a píšeme $P = P(\rho, \varphi, z)$.

Trojici (ρ, φ, z) takto získanou nazýváme **cylindrickými (válcovými)** souřadnicemi bodu P .

Bodům ležícím na ose z přiřazujeme

$$\rho = 0$$

a nepřiřazujeme jim žádnou hodnotu polárního úhlu φ . Určení z -ové souřadnice bodů na ose z je dáno obvyklým způsobem. Body na ose z mají tedy cylindrické souřadnice $(0, ?, z)$.

• **Poznámka C.1:** Souřadnice ρ je rovna **vzdálenosti bodu P od osy z** , souřadnice z udává vzdálenost bodu P od roviny Σ a význam souřadnice φ je zřejmý.

Je třeba si dále uvědomit, že

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho < +\infty \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \\ -\infty &< z < +\infty, \end{aligned} \tag{C.1}$$

tj.

$$\rho \in \langle 0, +\infty \rangle, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad z \in \langle -\infty, +\infty \rangle.$$

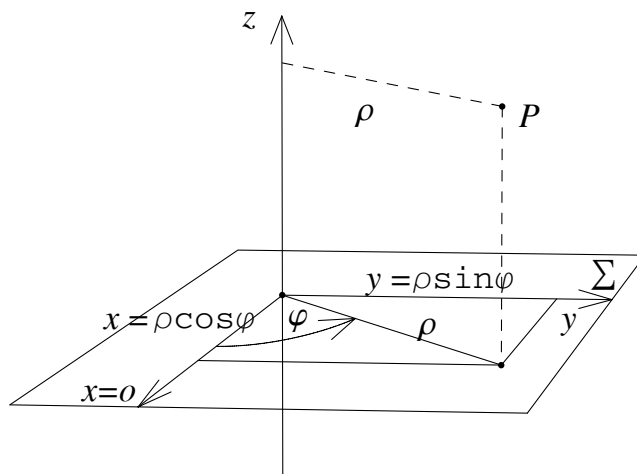
Zavedeme-li do E^3 současně souřadnice kartézské i cylindrické, jak je znázorněno na obr. C.2, vidíme ihned, že mezi cylindrickými a kartézskými souřadnicemi platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \tag{C.2}$$

a

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{pro I. kvadrant} \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{pro II. a III. kvadrant} \\ 2\pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{pro IV. kvadrant} \end{cases} \\ z &= z. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Kvadranty jsou vztaheny ke kartézským osám v rovině Σ .



Obrázek C.2:

• **Poznámka C.2:** Vysvětlíme nyní **název této souřadnicové soustavy**. Množina všech bodů z E^3 , jejich první cylindrická souřadnice, tj. ρ je konstantní, $\rho = \rho_0$, je tedy množinou bodů, které mají od osy z konstantní vzdálenost ρ_0 . Tato množina je **válcová** neboli **cylindrická plocha** s osou v ose z . Odtud název souřadnicové soustavy.

Poznamenejme ještě, že množiny bodů, jejichž jedna souřadnice je konstantní a zbylé dvě se mění, se nazývají **souřadnicovými plochami**. Označme po řadě

$$S_{\rho=\rho_0}, \quad S_{\varphi=\varphi_0}, \quad S_{z=z_0}$$

souřadnicové plochy v cylindrické soustavě souřadnic. Víme již, že S_{ρ_0} jsou válcové plochy. Snadno zjistíme, že souřadnicové plochy

$$S_{z=z_0}$$

jsou roviny rovnoběžné se základní rovinou Σ . A nakonec souřadnicové plochy

$$S_{\varphi=\varphi_0}$$

jsou poloroviny kolmé k rovině Σ , jejichž společná hraniční přímka je osa z . Souřadnicové plochy S_{φ_0} si můžeme představit jako listy v knize, jejíž hřbet je osa z .

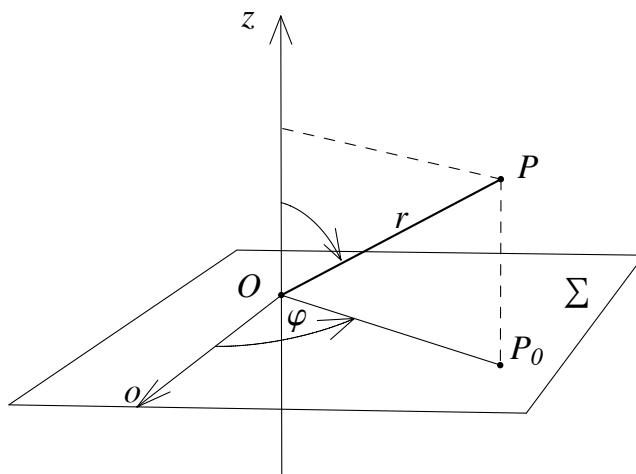
C.2 Sférické souřadnice

Opět jako v případě cylindrických souřadnic zvolíme počátek $O \in E^3$, tímto bodem vedeme rovinu Σ a přímku z kolmou k rovině Σ . V rovině Σ zavedeme polární souřadnice s pólem v bodě O a polární osou o .

Každému bodu $P \in E^3$, $P \neq O$ přiřadíme uspořádanou trojici čísel

$$(r, \varphi, \vartheta),$$

kteří nazýváme **sférickými souřadnicemi** v prostoru E^3 , následujícím způsobem, viz obr. C.3:



Obrázek C.3:

- Číslo r je rovno vzdálenosti bodu P od počátku O .
- Číslo φ je rovno polárnímu úhlu kolmého průmětu P_0 bodu P do roviny Σ .
- Číslo ϑ je rovno velikosti úhlu, který svírá úsečka \overline{OP} s **kladnou poloosou** z .

Bodu O přiřazujeme $r = 0$ a **nepřiřazujeme** mu žádnou hodnotu úhlů φ a ϑ . Tedy ve sférických souřadnicích má počátek souřadnice

$$O = (0, ?, ?).$$

Bodům na ose z nepřiřazujeme žádnou hodnotu úhlu φ . Body na **kladné** poloose z mají třetí souřadnici $\vartheta = 0$ a body na **záporné** poloose z mají třetí souřadnici $\vartheta = \pi$, tedy

$$P = P(r, ?, 0) \in z^+ \quad a \quad P = P(r, ?, \pi) \in z^-.$$

Dále zřejmě

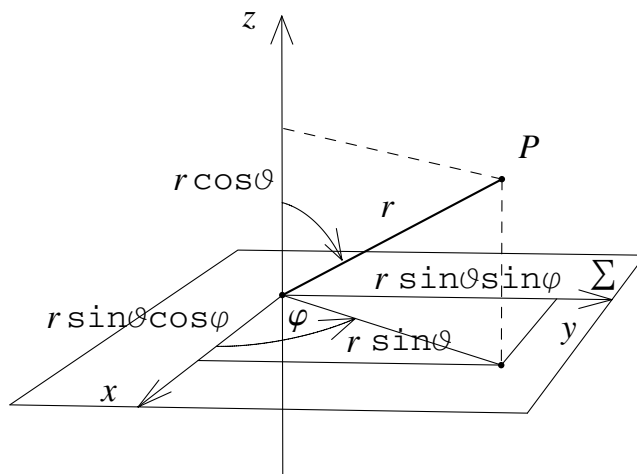
$$\begin{aligned} 0 &\leq r < +\infty \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi, \end{aligned} \tag{C.4}$$

tj.

$$r \in \langle 0, +\infty \rangle, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Zavedeme-li do E^3 současně souřadnice kartézské i sférické, jak je znázorněno na obr. C.4, lze ukázat, že mezi sférickými a kartézskými souřadnicemi platí následující vztahy:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned} \tag{C.5}$$



Obrázek C.4:

a

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 \varphi &= \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{pro I. kvadrant} \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{pro II. a III. kvadrant} \\ 2\pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{pro IV. kvadrant} \end{cases} \\
 \vartheta &= \arccos \frac{z}{r}.
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

Kvadranty jsou vztaženy ke kartézským osám v rovině Σ .

• **Poznámka C.3:** Vysvětlíme nyní **název této souřadnicové soustavy**. Množina všech bodů z E^3 , jejich první sférická souřadnice, tj. r je konstantní, $r = r_0$, je tedy množinou bodů, které mají od osy počátku O konstantní vzdálenost r_0 . Tato množina je **kulová plocha** neboli **sféra** se středem v bodě O . Odtud název souřadnicové soustavy. Souřadnicovou plochu značíme $S_{r=r_0}$.

Cvičení C.4: Určete tvar zbývajících dvou souřadnicových ploch ve sférických souřadnicích.

Návody ke cvičením z dodatku C

C.4 Uvažujte body ve sférických souřadnicích, které splňují rovnici $\varphi = \varphi_0$, resp. $\vartheta = \vartheta_0$.

ŘEŠENÍ CVIČENÍ

S ohledem na omezení rozsahu skript uvádíme v řešení cvičení většinou pouze konečné výsledky. Neuvádíme většinou ani postup ani řešení cvičení, ve kterých bylo úkolem provést důkaz, popřípadě ověření vztahu anebo je postup zřejmý z návodu ke cvičení, uvedených na konci příslušného paragrafu.

Řešení cvičení z kapitoly 1

1.14

ad 1)

Nechť je dán systém prvků $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ se dvěma stejnými prvky, tj. existují i, j tak, že $i \neq j$ a $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j$. Pak vytvořme netriviální lineární kombinaci

$$\sum_{r=1}^k \alpha_r \cdot \mathbf{a}_r, \quad \text{kde } \alpha_i = 1, \alpha_j = -1 \text{ a } \alpha_r = 0 \text{ pro } r \neq i, r \neq j.$$

Pak zřejmě

$$\sum_{r=1}^k \alpha_r \cdot \mathbf{a}_r = 0 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + 1 \cdot \mathbf{a}_i + \dots + (-1) \cdot \mathbf{a}_j + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_i = \mathbf{o}.$$

To znamená, že jsme vytvořili netriviální lineární kombinaci, která dá prvek \mathbf{o} , a podle definice 1.11 jsou uvedené prvky $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ lineárně závislé.

ad 2)

Nechť $\mathbf{a}_i = \mathbf{o}$. Vytvořme netriviální lineární kombinaci $\sum_{r=1}^k \alpha_r \cdot \mathbf{a}_r$ takovou, že $\alpha_r = 0$ pro všechna r vyjma $\alpha_i = 1$. Pak

$$\sum_{r=1}^k \alpha_r \cdot \mathbf{a}_r = 0 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{o} + 0 \cdot \mathbf{a}_{i+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{o}.$$

Závěr plyne opět z definice 1.11 jako v předchozím cvičení.

- 1.29** a) Zřejmě $\vec{0} = (0, 0, 0) \in V_1$; pro $\vec{a} = (a_1, a_2, 0), \vec{b} = (b_1, b_2, 0) \in V_1$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 0 + 0) \in V_1$; $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha \cdot 0) = (\alpha a_1, \alpha a_2, 0) \in V_1$. Podle definice 1.26 je V_1 podprostor \mathbb{R}^3 .
b) Pro $\vec{a}, \vec{b} \in V_2$, tj. $\vec{a} = (a_1, a_2, 1), \vec{b} = (b_1, b_2, 1)$ je

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 1 + 1) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 2) \notin V_2.$$

Podle definice 1.26 to znamená, že V_2 není podprostor \mathbb{R}^3 .

1.33 Zvolme vektory $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$, které oba leží ve V_1 . Vytvořme lineární kombinaci $\alpha_1 \cdot (1, 0, 0) + \alpha_2 \cdot (0, 1, 0) = (\alpha_1 \cdot 1, \alpha_2 \cdot 1, 0)$ a necht' se tato rovná $\vec{0}$, tím dostaneme $(\alpha_1, \alpha_2, 0) = (0, 0, 0)$. Odtud plyne, že $\alpha_1 = 0$ a $\alpha_2 = 0$. Tedy pouze triviální lineární kombinace dá nulový vektor a dané vektory jsou lineárně nezávislé. Dokázali jsme vztah 1 v definici 1.18. Dále necht' libovolný vektor $\vec{b} = (b_1, b_2, 0) \in V_1$. Chceme, aby existovala taková lineární kombinace, že $\alpha_1 \cdot (1, 0, 0) + \alpha_2 \cdot (0, 1, 0) = (b_1, b_2, 0)$. To znamená, že má platit $(\alpha_1 \cdot 1, \alpha_2 \cdot 1, 0) = (b_1, b_2, 0)$. Z toho lehce plyne, že $\alpha_1 = b_1$ a $\alpha_2 = b_2$, tedy, že koeficienty hledané lineární kombinace jsou přímo rovny souřadnicím vektoru \vec{b} . Znamená to, že libovolný vektor z V_1 lze vytvořit jako lineární kombinaci daných vektorů, čímž jsme dokázali vztah 2 v definici 1.18. Tedy podle uvedené definice tvoří vektory $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ bázi V_1 a podle definice 1.24 je $\dim V_1 = 2$.

1.43 Ano, neboť $\cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0$ pro $\forall x \in \mathcal{R}$.

Řešení cvičení z kapitoly 2

2.15

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 3.598 \\ 0.232 \end{bmatrix}.$$

2.22 O platnosti uvedeného vztahu se přesvědčíte roznásobením $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ a využijete vztahu $\det \mathbf{A} = ad - bc$). Tento postup pouze naznačíme:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uvedený vztah plyne také z věty 2.20, neboť

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix},$$

kde

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det[d] = d, \quad A_{21} = -b, \quad A_{12} = -c, \quad A_{22} = a.$$

2.28

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{c} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 20 & 5 & -5 & -10 \\ 9 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 11 & 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Řešení cvičení z kapitoly 3

3.17 Např. a) $1, e^{3x}$, b) e^{-x}, e^{-3x} , c) $e^{\frac{4}{3}x}$.

3.18 $W_{y_1, y_2}(x) = e^{2\lambda_0 x} \neq 0$ pro $\forall x \in \mathcal{R}$.

3.27 $W(x) = b e^{2ax}$.

3.34 x a $\ln x$ jsou řešením homogenní LDR na $(0, \infty)$ a $W(x) = x \neq 0$.

3.41 $y_p(x) = e^{2x}(\frac{4}{25} \cos 3x + \frac{3}{25} \sin 3x)$.

Řešení cvičení z kapitoly 4

4.10 $c_1 = 2, c_2 = 1$ $x_p(t) = -4e^{-t} + 4e^{5t}$, $y_p(t) = 2e^{-t} + e^{5t}$.

4.11 $\lambda_1 = 2, \vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda_2 = -1, \vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.
 $x(t) = 3c_1e^{2t} + 3c_2e^{-t}; y(t) = c_1e^{2t} - 2c_2e^{-t}$.

4.17 $x = e^{at}, y = 0$ je řešením soustavy a jeho trajektorie je kladná část osy x . Podobně řešení $x = 0, y = e^{-bt}$ má za trajektorii kladnou část osy y .

Řešení cvičení z kapitoly 5

5.22 Funkce f je spojitá v celém \mathcal{R}^2 , protože pro libovolná $\vec{x}, \vec{x}_0 \in \mathcal{R}^2$ a libovolné $\varepsilon > 0$ je vždy $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| = |K - K| = 0 < \varepsilon$.

Řešení cvičení z kapitoly 6

6.12 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; Df(\vec{x}_0, \vec{a}) = (2, 0) \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$.

6.22 Označme $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{x}$. Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial a} \frac{1}{y} + \frac{\partial g}{\partial b} \left(-\frac{y}{x^2}\right), \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial a} \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{\partial g}{\partial b} \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 g}{\partial a^2} \frac{x}{y^3} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} \frac{1}{xy} - \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} \frac{y}{x^3} - \frac{\partial g}{\partial a} \frac{1}{y^2} - \frac{\partial b}{\partial b} \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial a^2} \frac{x^2}{y^4} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} \frac{1}{y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} \frac{1}{x^2} + \frac{\partial g}{\partial a} \frac{2x}{y^3}.$$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{y^2}{x^2} + g''(xy)xy + g'(xy)$.

c) $f''(x) = \frac{\partial g}{\partial a} 6x + \frac{\partial g}{\partial b} 12x^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial a^2} 4x^3 + \frac{\partial^2 g}{\partial a \partial b} 12x^4 + \frac{\partial^2 g}{\partial b^2} 9x^5,$

když $a = x^2$ a $b = x^3$.

6.36 $p = \frac{RT}{(V-b)} - \frac{a}{V^2}, \Delta p \doteq dp = \frac{R}{V-b} dT + \left(\frac{-RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}\right) dV$.

6.43 $\frac{\partial^2 T_3}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)$

a dokazovaný vztah získáme dosazením $x = x_0$ a $y = y_0$.

6.47 Protože $\frac{\partial^2 P}{\partial T^2} = 0, \frac{\partial^2 P}{\partial T \partial V} = \frac{-R}{(V-b)^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4}$, je

$$\Delta P \doteq \frac{R}{V-b} dt + \left(-\frac{R}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}\right) dV - \frac{R}{(V-b)^2} dT dV + \left(\frac{RT}{(V-b)^3} - \frac{3a}{V^4}\right) (dV)^2.$$

$$6.54 \quad J(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 2y & 3y^2 - 2x \\ 2x & 3y^2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_1 = (1, 0.5), \quad \vec{x}_2 = (0.9375, 0.5), \\ \vec{x}_3 = (0.9336, 0.50453), \quad \vec{x}_4 = (0.93356, 0.50457).$$

Řešení cvičení z kapitoly 7

$$7.10 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - \frac{50}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}x - \frac{20}{y^2}. \text{ Jediný stacionární bod je bod } (5, 2).$$

$H(x, y) = \frac{4000}{x^3 y^3} - 1$. Protože $H(5, 2) = 3$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5, 2) = 0.8$, je bod $(5, 2)$ bodem lokálního minima.

$$7.14 \quad \text{Soustava (7.6) má tvar: } 2195a + 103b = 5577, \quad 103a + 5b = 259. \text{ Odtud } a = 3.3005, \quad b = -16.1913 \text{ a hledaná závislost je } y = 3.3005x - 16.1913.$$

Řešení cvičení z kapitoly 8

8.8 Pro $x = 0.95$ dostaneme $y^3 - 2.85y - 2.142625 = 0$. Odtud při volbě $y_0 = 2$ je $y_1 = 1.982801$ a $y_2 = y_3 = 1.982603$. $f(0.95) \doteq 1.982603$. Pro $x = 1.05$ dostaneme $y^3 - 3.15y - 1.842375 = 0$. Při volbě $y_0 = 2$ je $y_1 = 1.016088$, $y_2 = y_3 = 2.015915$, $f(1.05) \doteq 2.015915$.

8.16 Jelikož $F(1, 0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1 \neq 0$, je $f'(1) = -2$. Rovnice tečny je $y = -2(x - 1)$.

8.18 a) Hledané body jsou např. $(0, k\pi)$, $k \in \mathcal{Z}$, protože tyto body vyhovují dané rovnici a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, k\pi) \neq 0$ pro $\forall k$, protože $\frac{\partial F}{\partial y} = \cos y + x$.
b) Zvolme $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Pak v okolí tohoto bodu

$$y' = f'(x) = -\frac{\cos x + y}{\cos y + x} \quad \text{a} \\ y'' = -\frac{(-\sin x + y')(\cos y + x) - (\cos x + y)(-\sin y \cdot y' + 1)}{(\cos y + x)^2}.$$

Tedy $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$ a funkce f je v okolí bodu $x_0 = 0$ klesající a konvexní.

c) $T_2(x) = -x + x^2$. Potom $\bar{x} = 0.2$ a $f(\bar{x}) \doteq T_2(\bar{x}) = -0.16$.

d) Dosazením $\bar{x} = 0.2$ dostaneme $\sin y + 0.2y + 0.198669 = 0$. V Newtonově metodě volme $y_0 = 0$, pak postupně $y_1 = -0.165558$, $y_2 = y_3 = -0.166194$. Je tedy $f(0.2) \doteq -0.166194$ a při výpočtu této hodnoty pomocí Taylorova polynomu jsme se dopustili chyby menší než $7 \cdot 10^{-3}$.

8.26 Označme $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + y^3$. Protože

$$F(1, 2, -2) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1, 2, -2) = 14,$$

jsou splněny předpoklady věty 8.22 na okolí bodu $A = (1, 2, -2)$. Pro parciální derivace platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{3x^2 + yz}{3z^2 + xy}, & \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) &= \frac{1}{14}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{3y^2 + xz}{3z^2 + xy}, & \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) &= -\frac{5}{7}. \end{aligned} \quad \text{a}$$

Rovnice

$$z + 2 = \frac{1}{14}(x - 1) - \frac{5}{7}(y - 2)$$

je rovnicí tečné roviny.

Řešení cvičení z kapitoly 9

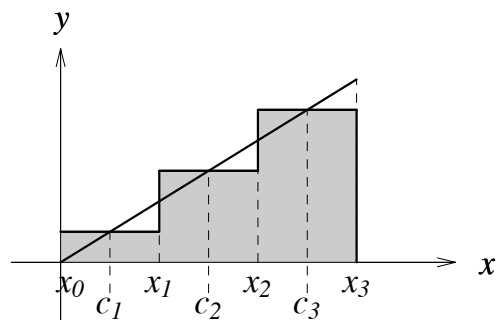
9.11 a) Volíme-li c_i jako střed intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, je $c_i = x_{i-1} + \frac{h}{2}$. Dosazením dostáváme $c_i = \frac{i-1}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{2i-1}{2n}$. Pak

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{2n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n (2i-1).$$

Poslední sumu snadno sečteme, když si uvědomíme, že se jedná o součet n lichých, po sobě jdoucích sčítanců, tj. aritmetická posloupnost s $d = 2$. Pak je

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2 \text{ a tedy } S_n(f) = \frac{1}{2}.$$

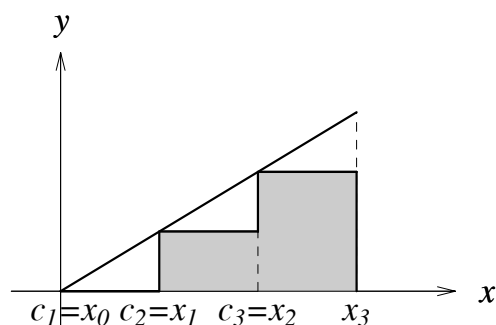
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \frac{1}{2} = (R) \int_0^1 x \, dx.$$



b) Volíme-li $c_i = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$, je

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2} \frac{n-1}{n}.$$

$$\text{Pak } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}.$$



9.16

$$P = 3 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\varphi \, d\varphi = \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{3}{4} \left[\varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{4}.$$

9.18

$$\begin{aligned} l &= \int_{-1}^1 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} \, dt = \int_{-1}^1 |t| \cdot \sqrt{9t^2 + 4} \, dt = 2 \int_0^1 t \cdot \sqrt{9t^2 + 4} \, dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} 9t^2 + 4 = z \\ 18t \, dt = dz \\ t = 1 \rightarrow z = 13 \\ t = 0 \rightarrow z = 4 \end{array} \right| = 2 \int_4^{13} \sqrt{z} \frac{dz}{18} = \frac{1}{9} \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_4^{13} = \frac{2}{27} [\sqrt{13^3} - \sqrt{4^3}] \doteq 2.88. \end{aligned}$$

Řešení cvičení z kapitoly 10

10.8 $\frac{\pi}{12}$.

10.10 $\ln \frac{3}{2}$.

10.11 $\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

10.26 $\psi_1(y) = \frac{y+3}{4}, \psi_2(y) = \frac{13-y}{4}, P = 4$.

10.30 $\int_1^2 \left(\int_{-x+3}^{0.5(x+3)} (x^2 + y) \, dy \right) dx + \int_2^5 \left(\int_{x-1}^{0.5(x+3)} (x^2 + y) \, dy \right) dx = 3.5 + 27 = 30.5$.

10.34 $\pi(a_2^2 - a_1^2)$.

10.43 $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

10.54 $V = 20\pi$.

Řešení cvičení z kapitoly 11

11.8 Nejedná se o přípustnou změnu parametrizace, neboť $\varphi(s)$ je sice prosté, ale $\varphi'(s) = 0$ pro $s = 0$.

11.20 $\pi\sqrt{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{15}{8}\pi\right) \doteq 32.835$.

Řešení cvičení z kapitoly 12

12.24 $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} \left(\operatorname{arctg} \frac{7-\sqrt{3}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} \right) = -\frac{\pi}{12} \doteq -0.261799$.

12.29 -3π resp. $+3\pi$, volíme-li oběh v kladném, resp. záporném směru. Hodnota nezávisí na volbě počátečního bodu na kružnici. Podle věty 12.27 $\int_K \vec{F} d\vec{r}$ závisí na integrační cestě a tedy pole \vec{F} není potenciální.

$$12.40 \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 y^2}; \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{1}{x^2 y} + \frac{z^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{1}{x y^2}.$$

$$12.45 \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ tj. } \vec{F} \text{ je potenciální. Potenciál je uveden v příkladu (12.23).}$$

Při druhém způsobu postupujeme následovně:

$$\int_1^{\tilde{x}} -\frac{1}{t^2 + 1} dt + \int_1^{\tilde{y}} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + t^2} dt = -\operatorname{arctg} \tilde{x} + \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\tilde{x}} = -\operatorname{arctg} \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} - \frac{\pi}{4}.$$

$$12.46 \quad U(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + c.$$

Řešení cvičení z dodatku B

$$B.9 \quad s = \frac{9}{4}.$$

B.20 a) Řada konverguje. b) Řada diverguje.

Řešení cvičení z dodatku C

C.4 $S_{\varphi=\varphi_0}$ je polorovina, $S_{\vartheta=\vartheta_0}$ je kuželová plocha s osou v ose z .

Literatura

- [U] Klíč A., Hapalová V., *Úvod do studia matematiky na VŠCHT*, skripta VŠCHT, 1997.
- [MI] Klíč A., a kol., *Matematika I ve strukturovaném studiu*, skripta VŠCHT, 2004.

Rejstřík

- báze
 - lineárního prostoru, 15
 - přirozená, 15
- bod
 - hraniční, 91
 - koncový oblouku, 213
 - krajní oblouku, 213
 - počáteční oblouku, 213
 - sedlový, 136
 - stacionární, 135
 - vnitřní, 91
- cesta integrační, 241
- číslo vlastní matice, 77
- délka křivky, 169
- derivace
 - implicitně zadané funkce, 147
 - parciální, 105
 - implicitně zadané funkce, 154
 - parciální
 - vyšší, 107
 - ve směru, 108
 - zobrazení, 117
- determinant Wronského, 22
- diferenciál
 - parciální, 121
 - totální, 121, 125
 - zobrazení, 240
- diferenciální forma, 246
- dimenze lineárního prostoru, 16
- existence řešení diferenciální rovnice, 39
- forma diferenciální, 246
- fundamentální systém řešení HLDR, 41, 76
- funkce
 - k -krát spojitě diferencovatelné, 107
 - n proměnných, 94
 - explicitně zadaná, 142
 - implicitně zadaná, 143
 - na okolí bodu, 143, 153
 - komplexní reálné proměnné, 45
 - lineárně nezávislé, 21
 - lineárně závislé, 21
 - souřadnicová, 96
 - spojitá, 97
 - v bodě, 97
 - spojitě diferencovatelné, 107
 - střední hodnota, 177
 - třídy $C^1(G)$, 107
 - třídy $C^k(G)$, 107
- Gaussova-Jordanova metoda, 34
- gradient funkce, 108
 - v bodě, 108
- graf funkce, 95
- Hessián, 136
- hladký oblouk, 213
- hodnota střední, 195, 206
- hranice množiny, 91
- hustota lineární, 222
- infimum množiny, 264
- integrace dvojnásobná, 183
- integrační cesta, 241
- integrál
 - dvojný, 183, 189
 - funkce po křivce, 224
 - křivkový
 - skalárního pole, 222
 - vektorového pole, 241
 - Laplaceův, 204
 - nevlastní, 202

Newtonův určitý, 161
 Riemannův, 161
 trojný, 205
 integrální kritérium, 271

 Jacobián, 198, 207
 jádro lineárního zobrazení, 27
 jednoznačnost řešení diferenciální rovnice,
 39

 koeficienty LDR, 38
 koeficienty lineární kombinace, 13
 kombinace
 lineární, 13
 netriviální, 13
 triviální, 13
 křivka
 hladká, 212
 jednoduchá
 uzavřená, 213
 konečná, 223
 orientovaná souhlasně s parametrizací,
 217
 po částech hladká, 212

 Leibnitzovo kritérium, 271
 limita funkce, 100
 lineární kombinace, 13
 lineární prostor, 10
 báze, 15
 dimenze, 16
 podprostor, 17
 lineární zobrazení, 25
 jádro, 27
 lineární zobrazení
 reprezentace, 28

 míra množiny, 194
 matice
 Hessova, 136
 inverzní, 32
 Jacobiho, 117
 soustavy DR, 76
 maticové rovnice, 36
 maximum
 globální, 134
 lokální, 134
 ostré, 134
 maximum množiny, 263
 metoda
 Eulerova
 pro soustavy, 85
 Gaussova-Jordanova, 34
 nejmenších čtverců, 139
 Newtonova, 130
 odhadu, 57
 snížení řádu, 70
 variace konstant, 50
 minimum
 globální, 134
 lokální, 134
 ostré, 134
 minimum množiny, 263, 264
 množina
 konvexní, 94
 míry nula, 194
 omezená, 93, 263
 shora (zdola), 263
 otevřená, 92
 souvislá, 93
 standardní
 1. typu, 191
 2. typu, 191
 standardní, 188
 uzavřená, 92

 násobek
 vektoru, 11
 Newtonova metoda, 130
 nezávislost integrálu na integrační cestě,
 249
 nulový prvek, 10

 objem rotačního tělesa, 172
 oblast, 93
 jednoduše souvislá, 252, 254
 uzavřená, 93
 oblouk, 213
 opačně orientovaný, 217
 obor
 definiční, 94, 95
 přirozený, 94

definiční
 přirozený, 96
 integrační, 189
 okolí bodu, 90
 prstencové, 90
 opačný prvek, 10
 operace
 násobení reálnými čísly, 10
 sčítání, 10
 orientace oblouku, 214
 orientovaná křivka, 217
 orientovaný součet oblouků, 217
 parametrizace křivky, 213
 plocha
 cylindrická, 279
 kulová, 281
 souřadnicová, 279
 válcová, 279
 plošný obsah, 167
 podílové kritérium, 270
 podmínky okrajové, 63
 podprostor
 lineárního prostoru, 17
 triviální, 17
 pole
 jednotkových tečných vektorů, 239
 potenciální, 247
 silové, 234
 vektorové, 234
 polynom Taylorův, 126
 potenciál, 247
 práce plynu, 175
 práce síly, 173
 práce síly, 233
 pravoúhlý průmět vektoru, 232
 prostor
 \mathbb{R}^n , 11
 $C(I)$, 11, 20
 $C^n(I)$, 20
 lineární, 10
 průmět pravoúhlý, 232
 přípustná změna parametrizace, 218
 přiřazená HLDR, 38
 restrikce funkce, 221
 rovina tečná, 124
 rovnice
 diferenciální
 lineární homogenní, 38
 lineární nehomogenní, 38
 diferenciální
 lineární n -tého řádu, 69
 lineární n -tého řádu s konstantními koeficienty, 69
 lineární homogenní n -tého řádu, 69
 lineární s konstantními koeficienty, 38
 charakteristická, 42, 69
 matice, 78
 parametrické
 křivky, 213
 pohybové, 216
 transformační, 198
 řada, 267
 částečný součet, 267
 divergentní, 267
 konvergentní, 267
 absolutně, 269
 mocninná, 273
 poloměr konvergence, 273
 součet, 267
 Taylorova, 274
 řešení
 obecné HLDR, 41
 soustavy DR, 74
 soustavy nelineárních rovnic, 129
 řešení
 obecné diferenciální rovnice, 49
 partikulární diferenciální rovnice, 49
 stacionární, 75
 sféra, 281
 směr probíhání, 216
 součet
 integrální Riemannův, 162
 řady, 267
 částečný, 267
 vektorů, 11
 součet oblouků orientovaný, 217
 souřadnice

cylindrické, 278
 sférické, 280
 válcové, 278
 soustava
 autonomní, 74
 dvou diferenciálních rovnic, 73
 LDR s konstantními koeficienty, 76
 neautonomní, 74
 nelineárních rovnic, 129, 132
 parciálních diferenciálních rovnic, 257
 srovnávací kritérium, 269
 stav rovnovážný, 75
 struktura řešení diferenciální rovnice, 49
 střední hodnota funkce, 195, 206
 supremum množiny, 264
 systém
 lineárně nezávislý, 13
 lineárně závislý, 13
 systém fundamentální řešení HLDR, 41, 76

 šroubovice, 214

 Taylorův polynom, 126
 tečná rovina, 124
 totální diferenciál, 121, 125
 trajektorie
 jednobodová, 74
 řešení soustavy, 74

 úloha
 okrajová, 63

 vektor
 okamžité rychlosti, 216
 tečný křivky, 215
 vlastní matice, 77
 věta
 Fubiniova, 185, 192
 integrální kritérium, 271
 Leibnitzovo kritérium, 271
 o střední hodnotě integrálního počtu, 178
 o substituci ve dvojném integrálu, 199
 o substituci ve trojném integrálu, 208
 podílové kritérium, 270
 srovnávací kritérium, 269
 vlastní číslo matice, 77
 vlastní vektor matice, 77
 vnitřek množiny, 91

 Wronskián, 22

 změna přípustná parametrizace, 218
 zobrazení, 95
 lineární, 25
 spojité, 103
 v bodě, 103
 zobrazení
 prosté, 213
 regulární, 199, 208

Doc. RNDr. Daniel Turzík, CSc., a kolektiv

MATEMATIKA II VE STRUKTUROVANÉM STUDIU

Vydala	Vysoká škola chemicko-technologická v Praze Vydavatelství VŠCHT Praha Technická 5, 166 28 Praha 6
Tisk	JK TISK - KOPÍROVÁNÍ, VAZBY KNIH Křivoklátská 342, 273 51 Unhošť
Počet stran	293
Počet obrázků	110
Vydání:	první
Náklad	1500 výtisků
AA/VA	23,96/24,29



Související publikace

Klíč Alois: *Matematika I ve strukturovaném studiu*,
Praha 2004


Míčka Jiří: *Sbírka příkladů z matematiky*,
Praha 2002

Prodejci:

Praha: VŠCHT Praha, LICHEMA - prodejna skript, Technická 3, 166 28 Praha 6
Brno: Knihkupectví Malé Centrum Brno, Kotlářská 2, 611 37 Brno

Objednávky přijímá:

Vydavatelství VŠCHT Praha, Technická 5, 166 28 Praha 6
tel: (+420) 220 443 211



<http://vydavatelstvi.vscht.cz>