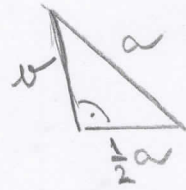
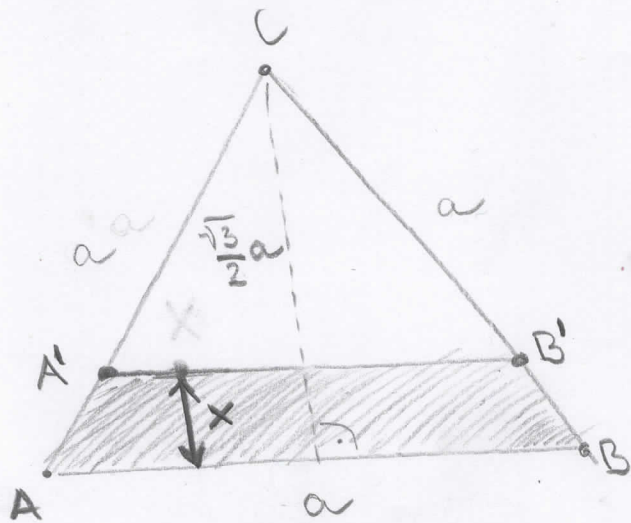


U lise vram rovnostranného trojúhelníku o straně a se ztratilo dítě. Více rozdělí náhodně veličiny udávající vzdálenost dítěte od pevně zvolené strany trojúhelníku.



2 Pythagorovy věty:

$$x = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

X ... vzdálenost dítěte od dané strany

x ... vzdálenost bodu trojúhelníka od dané strany

$$x \in \left\langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a \right\rangle$$

Distribuční funkce této náhodné veličiny X je:

$$F(x) = P[X \leq x] = \frac{\text{obsah lichoběžníku } ABBA'}{\text{obsah trojúhelníku } ABC} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(a + a - \frac{2}{\sqrt{3}}x\right) \cdot x}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\left(2a - \frac{2}{\sqrt{3}}x\right) \cdot x}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = x \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}a} - \frac{4x}{3a^2}\right)$$

pro $x \in \left\langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a \right\rangle$

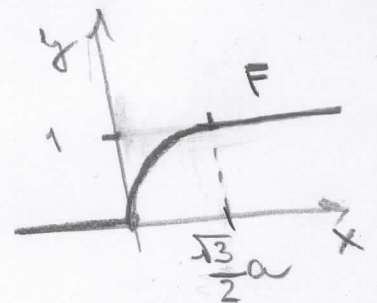
Z podobnosti trojúhelníků $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$

plyne: $|AB| : \frac{\sqrt{3}}{2}a = |A'B'| : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{|A'B'|}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - x} \Rightarrow |A'B'| = a - \frac{2}{\sqrt{3}}x$$

Je zřejmé, že $F(0) = 0$ a $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}a} - \frac{4x}{3a^2}\right), & 0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 1, & x > \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases}$$



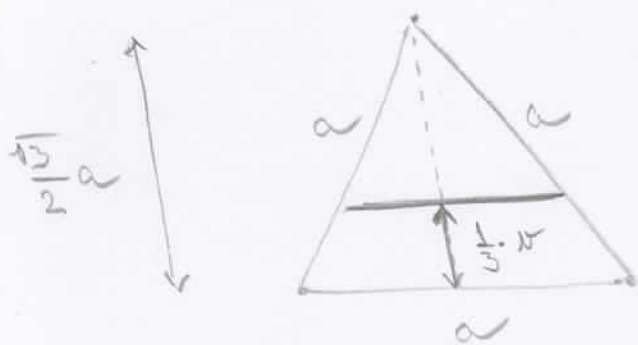
Hustota: $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}a} - \frac{8}{3a^2}x, & x \in \langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a \rangle \\ 0, & x \notin \langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a \rangle \end{cases}$

Účelní hustota: $E X = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} x \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}a} - \frac{8}{3a^2}x \right) dx$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(\frac{4}{\sqrt{3}a}x - \frac{8}{3a^2}x^2 \right) dx = \left[\frac{2}{\sqrt{3}a}x^2 - \frac{8}{3a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}a} \cdot \frac{3}{4} a^2 - \frac{8}{3a^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^3}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



$\frac{1}{3}$ a výšky trojúhelníka