JMÉNO	DATUM	TERMÍN	BODY

1. Je dána funkce celkových veličin $y = x^3 - 6x^2 + 14x$. Určete funkce průměrných a mezních veličin a jejich průsečík. Nakreslete.

2. Určete graficky i analyticky, ve kterých bodech má funkce $f(x) = (x-2)^2 + 1$ jednotkovou elasticitu.

3. Společnost PIR zaznamenala v letech 2011, 2012, 2013 postupně tyto zisky Z v miliónech korun:
   Z (2011) = 11,   Z (2012) = 11,   Z (2013) = 13.
   Odhadněte pomocí kvadratického polynomu a kalibrace, jaký byl přibližně zisk firmy PIR v roce 2014.

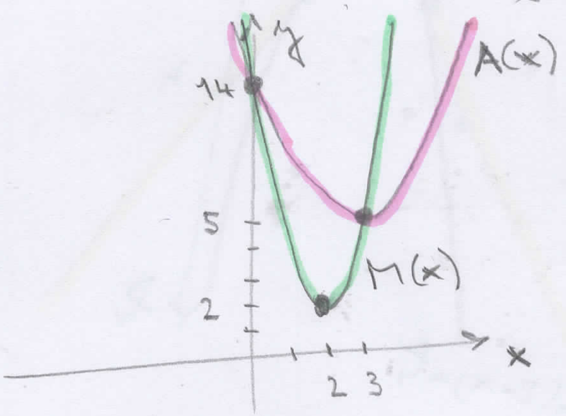
4. Metodou nejmenších čtverců určete funkci $y = ax^3 + bx^2$, která nejlépe aproximuje hodnoty:

x	-2	-1	1	2
y	-12	-2	0	4

1. $y = x^3 - 6x^2 + 14x$

$M(x) := y' = 3x^2 - 12x + 14 = 3(x^2 - 4x + 4) + 2$
$= 3(x-2)^2 + 2$

$A(x) := \frac{y}{x} = x^2 - 6x + 14 = x^2 - 6x + 9 + 5 = (x-3)^2 + 5$



průsečíky $M(x)$ a $A(x)$: $M(x) = A(x)$

$3x^2 - 12x + 14 = x^2 - 6x + 14 \quad | -14$

$3x^2 - 12x = x^2 - 6x$

$2x^2 - 6x = 0$

$2x(x-3) = 0$

$\underline{x = 0} \quad \vee \quad \underline{x = 3}$

$y = 14 \qquad y = 5$

(2.) $f(x) = (x-2)^2 + 1$

$f'(x) = 2(x-2)$

ANALYTICKY:

$$E(x) = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{2x-4}{(x-2)^2+1} \right| = 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 0$
proto $|f(x)| = f(x)$

$|2x-4| = 1 \cdot ((x-2)^2 + 1)$

I. $x \in (2, \infty)$: $2x - 4 = x^2 - 4x + 5$

$0 = x^2 - 6x + 9$

$0 = (x-3)^2$

$x = 3 \in (2, \infty)$

II. $x \in (-\infty, 2)$: $-2x + 4 = 1 \cdot ((x-2)^2 + 1)$

$-2x + 4 = x^2 - 4x + 5$

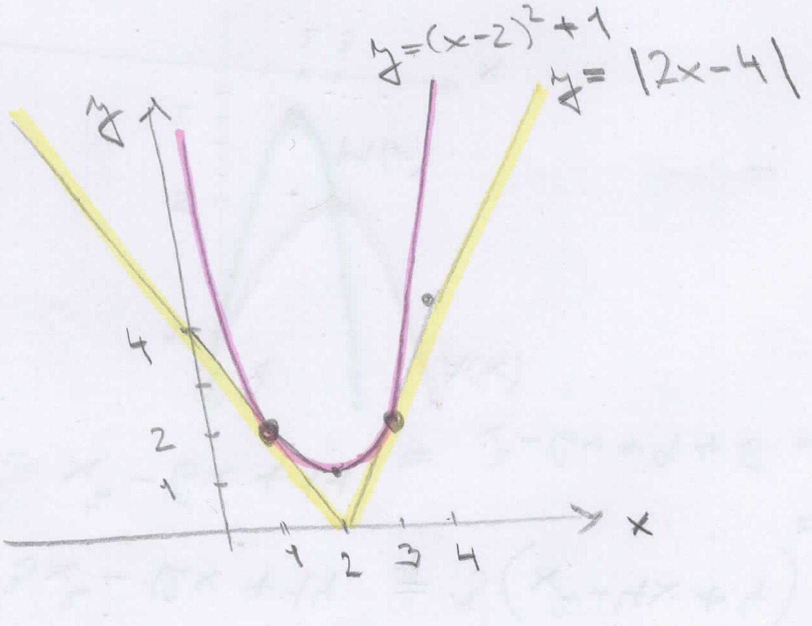
$0 = x^2 - 2x + 1$

$0 = (x-1)^2$

$x = 1 \in (-\infty, 2)$

Jednotkovou elasticitu má v bodech: $[3; 2]$ a $[1; 2]$

GRAFICKY:



3.

$Z(2011) = 11$

$Z(2012) = 11$

$Z(2013) = 13$

$Z(2014) = ?$

$0a + 0b + c = 11 \Rightarrow \boxed{c = 11}$

$a + b + c = 11$

$4a + 2b + c = 13$

$a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

$4a + 2b = 2$

$-4b + 2b = 2$

$-2b = 2 \Rightarrow \boxed{b = -1}$ $\boxed{a = 1}$

Odhad pomocí kvadratického polynomu $x^2 - x + 11$ zisku v roce 2014 je $Z(3) = 3^2 - 3 + 11 = \underline{17}$

17 mil. Kč

4.

x	-2	-1	1	2
y	-12	-2	0	4

$$\varphi(x) \approx a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x)$$
$$\varphi_1(x) = x^3,\ \varphi_2(x) = x^2$$

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(-2) & \varphi_2(-2) \\ \varphi_1(-1) & \varphi_2(-1) \\ \varphi_1(1) & \varphi_2(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 & 0 \\ 0 & 34 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$
$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$$
$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T\vec{b}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{130 \cdot 34} \cdot \begin{pmatrix} 34 & 0 \\ 0 & 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{130} & 0 \\ 0 & \frac{1}{34} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{130} & 0 \\ 0 & \frac{1}{34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -1 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{130} & 0 \\ 0 & \frac{1}{34} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ -34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

aproximace: $y = ax^3 + bx^2 = \underline{\underline{x^3 - x^2}}$