

Domácí cvičení 1

Komplexní čísla

6. 10. 2024

1) Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$z = \left(\frac{1 - i}{1 + \sqrt{3}i} \right)^{24}$$

2) Určete velikost i argument komplexního čísla

$$a) z = \frac{2i}{1 + i^{99}}, \quad b) z = \left(\frac{i^{17} + i^{18} + i^{19}}{i^{20} + i^{21} + i^{22}} \right)^{36}, \quad c) z = \sqrt{i}$$

Argument uvádějte v základním tvaru, tedy z intervalu $[0, 2\pi)$.

3) Rozhodněte, zda komplexní číslo

$$z = \frac{(-1 + i)^{1000}}{(-1 - i)^{996}}$$

leží v množině

$$M = \{z \in \mathbb{C}; \quad |z + 3 - i| \leq \sqrt{2}\}.$$

4) Najděte komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ splňující

$$|z| = 1 \quad \wedge \quad |z - i| = |z - 1|$$

5) V Gaussově rovině znázorněte všechna komplexní čísla $z \in \mathbb{C}$ splňující podmínku

a) $Re(z) < Im(z)$

h) $|z| = |z + 2 - 2i|$

b) $(Re(z))^2 \leq Im(z)$

i) $|z - 7i| = 5$

c) $Re(z) + Im(z) = 3$

j) $|z - 1| + |z + 1| = 4$

d) $Re(z) \cdot Im(z) = 3$

k) $|z| + |z - 3| = 1$

e) $(Re(z))^2 + (Im(z))^2 = 3$

l) $|z - i| + |z - 1 - 2i| = \sqrt{2}$

f) $Im(z) = (Re(z))^2 - 3Re(z)$

g) $Re(z) \cdot (Im(z))^2 - (Re(z))^3 = 0$

m) $||z - 3| - |z + 1|| = 2$

Určete čísla splňující danou podmínku, které mají argument: a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{3\pi}{4}$, c) $\frac{\pi}{2}$.

6) V komplexním oboru řešte rovnice

a) $2^x = -8$

c) $e^x = -1$

e) $\cos x = 3$

b) $2^x = 1 + i$

d) $\ln x = i\pi$

f) $\sin x = 4$

Výsledky:

1) 2^{-12}

2)

a) $|z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$

b) $|z| = 1, \quad \varphi = 0$

c) $|z| = 1, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ (dvě řešení)

3) Ano, leží. Množina M je kruh se středem v bodě $-3 + i$ a poloměrem $\sqrt{2}$, číslo $z = -4$ leží na hranici M (dosazením lze ověřit, že splňuje nerovnost $|z + 3 - i| \leq \sqrt{2}$).

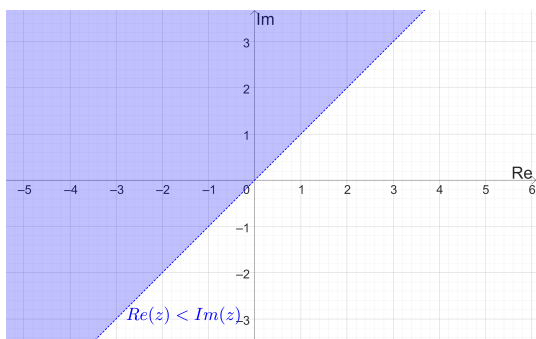
4) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ (čísla ležící v průniku jednotkové kružnice s osou 1. a 3. kvadrantu)

5)

a) Oblast nad přímkou, v kartézských souřadnicích

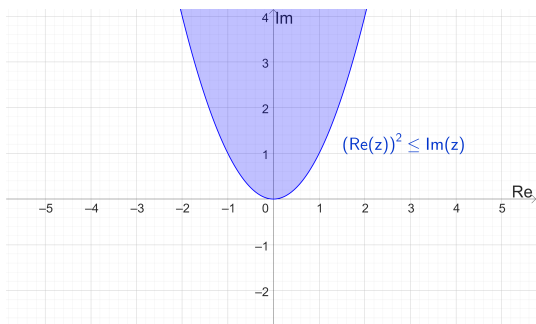
$$y > x$$

Žádné číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ podmínku nespĺňuje. Všechna čísla s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ nebo $\frac{\pi}{2}$ podmínku splňují.



b) Vnitřní oblast paraboly, v kartézských souřadnicích

$$y \geq x^2$$

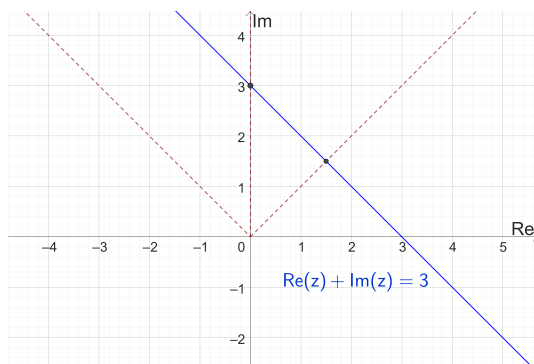


Čísla s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce jsou všechna čísla na úsečce s krajními body 0 a $1 + i$. Čísla s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce jsou všechna čísla na úsečce s krajními body 0 a $-1 + i$. Všechna čísla a argumentem $\frac{\pi}{2}$ podmínku splňují.

c) Přímka, v kartézských souřadnicích má rovnici

$$y = 3 - x$$

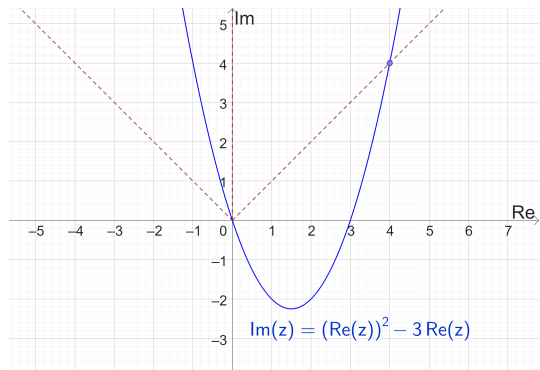
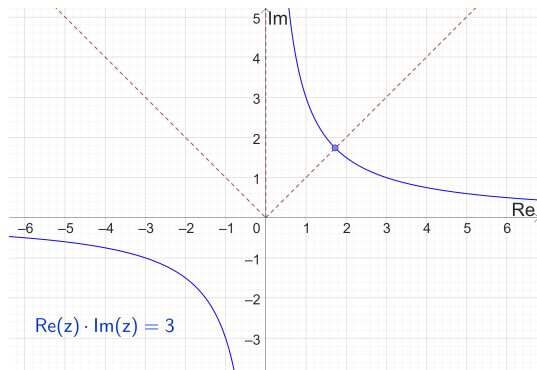
Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$, číslo s argumentem $\frac{\pi}{2}$ je $3i$. Žádné číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ podmínku nespĺňuje.



d) Hyperbola, v kartézských souřadnicích má rovnici

$$y = \frac{3}{x}$$

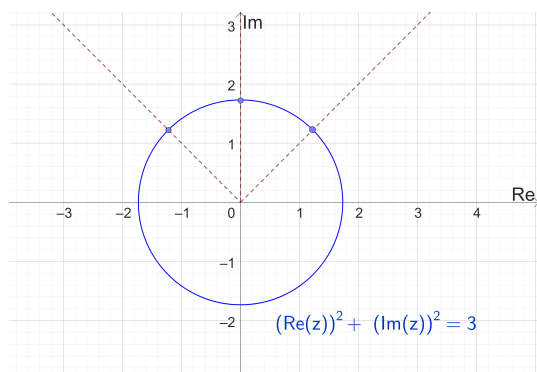
Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je $\sqrt{3} + \sqrt{3}i$. Žádné číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ nebo $\frac{\pi}{2}$ podmínku nespĺňuje.



- e) Kružnice se středem v bodě 0 a poloměrem $\sqrt{3}$. V kartézských souřadnicích má rovnici

$$x^2 + y^2 = 3$$

Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}i$, číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ je $-\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}i$ a číslo s argumentem $\frac{\pi}{2}$ je $\sqrt{3}i$.

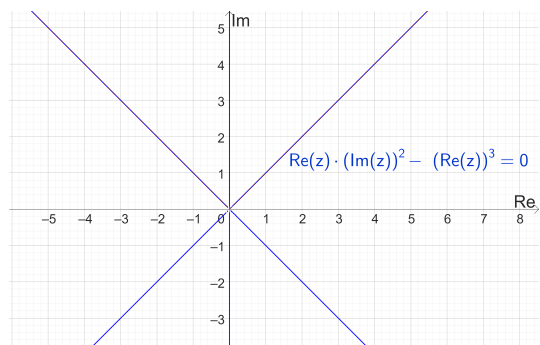


- f) Parabola, v kartézských souřadnicích má rovnici

$$y = x^2 - 3x$$

Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je pouze $4 + 4i$. Žádné číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ nebo $\frac{\pi}{2}$ podmínku nespĺňuje.

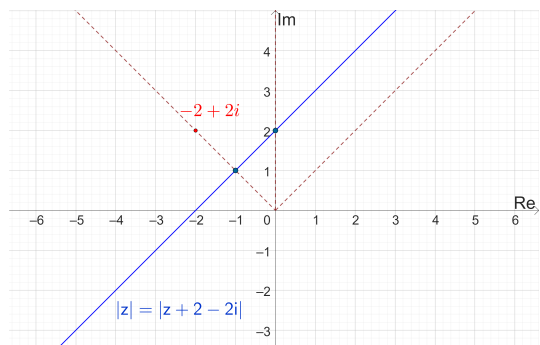
- g) Podmínku splňují všechna komplexní čísla s argumenty $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$ a $\frac{7\pi}{4}$. V kartézských souřadnicích jde o body ležící na přímkách $x = 0$, $y = x$ a $y = -x$.



- h) Osa úsečky s krajními body 0 a $-2 + 2i$. V kartézských souřadnicích je to přímka o rovnici

$$y = x + 2$$

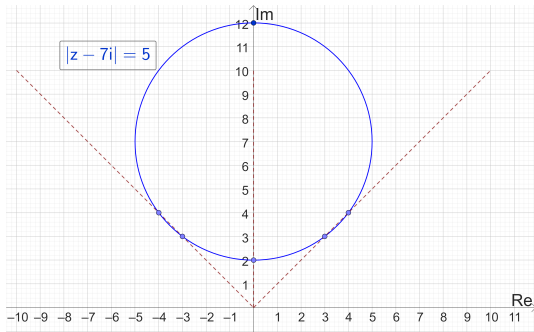
Žádné číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ podmínce nevyhovuje, číslo s argumentem $-1 + i$ a číslo s argumentem $\frac{\pi}{2}$ je $2i$.



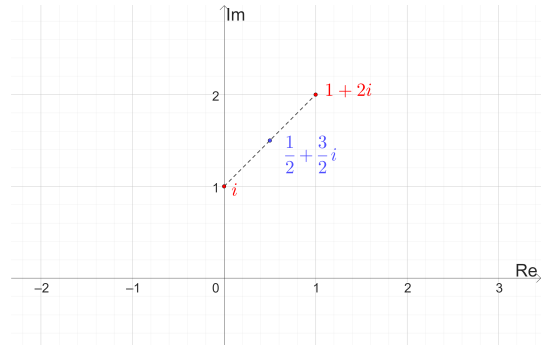
- i) Kružnice se středem v bodě $7i$ a poloměrem 5. V kartézských souřadnicích má rovnici:

$$x^2 + (y - 7)^2 = 25$$

Čísla s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce jsou $3 + 3i$ a $4 + 4i$, čísla s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ jsou $-3 + 3i$ a $-4 + 4i$, čísla s argumentem $\frac{\pi}{2}$ jsou $2i$ a $12i$.



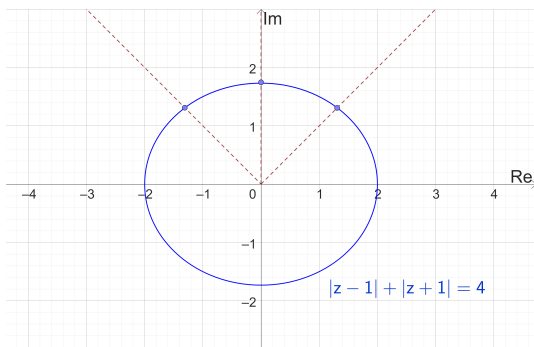
l) Podmínku splňují komplexní čísla ležící na úsečce mezi body $1 + 2i$ a i .



j) Elipsa s ohnisky v bodech 1 a -1 a středem v bodě 0, jejíž hlavní poloosa má délku 2 a vedlejší poloosa má délku $\sqrt{3}$. V kartézských souřadnicích má tato elipsa rovnici

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

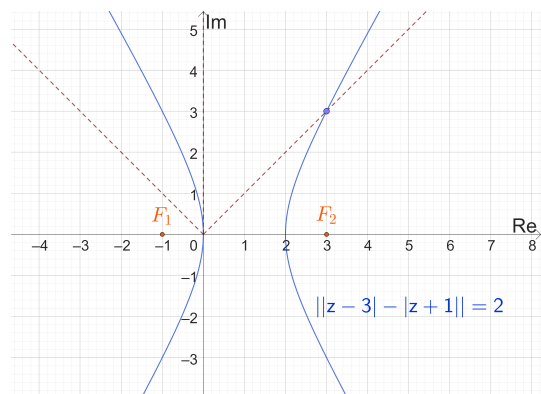
Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je $\sqrt{\frac{12}{7}} + \sqrt{\frac{12}{7}}i$, číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ je $-\sqrt{\frac{12}{7}} + \sqrt{\frac{12}{7}}i$ a číslo s argumentem $\frac{\pi}{2}$ je $\sqrt{3}i$.



m) Hyperbola s ohnisky v bodech -1 a 3 s vrcholy v bodech 0 a 2 (množina bodů, pro které je absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou daných bodů konstantní). V kartézských souřadnicích má tato hyperbola rovnici

$$-3x^2 + y^2 + 6x = 0$$

Číslo s argumentem $\frac{\pi}{4}$ vyhovující dané podmínce je pouze $3 + 3i$. Žádné číslo s argumentem $\frac{3\pi}{4}$ nebo $\frac{\pi}{2}$ podmínku nesplňuje.



k) Podmínku nesplňuje žádné komplexní číslo.

6)

a) $3 + i \frac{1}{\ln 2} (\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{1}{2} + i \frac{1}{\ln 2} (\frac{\pi}{4} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

c) $i(\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

d) -1

e) $2k\pi - i \ln(3 \pm 2\sqrt{2}), k \in \mathbb{Z}$

f) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(4 \pm \sqrt{15}), k \in \mathbb{Z}$