

7. Průběh funkce

Grafem reálné funkce f reálné proměnné rozumíme množinu

$$(1) \quad \text{gr } f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathcal{D}(f)\}.$$

Má-li funkce f v bodě a (z definičního oboru) konečnou nebo nekonečnou derivaci $f'(a)$, říkáme, že **graf funkce f má v bodě a tečnu**. **Tečna (grafu f v bodě a)** je pak definována takto: Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$, je to přímka o rovnici $y = f(a) + f'(a)(x - a)$; je-li $f'(a) = \pm\infty$, je to přímka o rovnici $x = a$.¹⁾

Je-li $f'_+(a) \neq f'_-(a)$ (tj. existují-li obě jednostranné derivace, ale oboustranná ne), říkáme, že **graf funkce f má v bodě a hrot**.

Vyšetřením průběhu funkce budeme rozumět nalezení zejména těch jejích vlastností, které potřebujeme k nakreslení jejího grafu s požadovanou přesností. Budou nás proto zajímat především tyto informace²⁾:

1) *Definiční obor* $\mathcal{D}(f)$ dané funkce f . Opakujeme znovu, že pokud je $f(x)$ dáno nějakým „vzorcem“, považujeme za definiční obor sjednocení všech maximálních intervalů, v jejichž každém bodě má „vzorec“ smysl.

2) *Sudost, lichost, periodičita* funkce f .

3) Všechny body resp. intervaly, v nichž je f *spojitá*. V bodech, v nichž spojitá není, existence a hodnota příslušné *limity* (oboustranné, zprava, zleva).

4) Body resp. intervaly (obsažené v $\mathcal{D}(f)$), v nichž má f *oboustrannou derivaci*, a výpočet této derivace. V bodech $x \in \mathcal{D}(f)$, v nichž $f'(x)$ neexistuje, existence a hodnota *derivací jednostranných*. V bodech $x \notin \mathcal{D}(f)$, které mají prstencové okolí (oboustranné, jednostranné) obsažené v $\mathcal{D}(f)$, je kromě znalosti limity $f(x \pm)$ (resp. $f(x+)$, $f(x-)$) důležitá i znalost *limity* $f'(x \pm)$ (resp. $f'(x+)$, $f'(x-)$), protože pak víme, *ke které hodnotě se $f(x)$ blíží a navíc ze kterého směru se k ní blíží*.

5) Zásadní význam má nalezení *maximálních intervalů*, v nichž je f *buď (ryze) monotónní, nebo konstantní*. V jednodušších případech hledáme i *maximální intervaly*, v nichž je f (ryze) *konvexní, konkávní nebo lineární*.

6) Nalezení (absolutních) *extrémů* funkce f v $\mathcal{D}(f)$ (nebo podrobněji v každém z maximálních intervalů, z nichž se $\mathcal{D}(f)$ „skládá“); tím rozumíme nalezení jejího *absolutního maxima* a *minima*, pokud existují, a v případě, že tomu tak není, příslušného *suprema* a *infima*.

7) V některých případech lze vyšetření průběhu funkce ještě doplnit např. nalezením jejích *asymptot* a *inflexních bodů*. \square

¹⁾ V obou případech prochází tečna bodem $(a, f(a))$, nikoli bodem a , jak by bylo možné soudit z trochu neobratného termínu „tečna v bodě a “. Bodem a samozřejmě procházet nemůže (což uvedený název trochu omlouvá), protože tento bod neleží v rovině $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ obsahující $\text{gr } f$.

²⁾ Pokud některý pojem uvedený v bodech 1)–7) nebyl zatím definován, bude to na vhodném místě provedeno.

Definice funkce *monotónní (neklesající, nerostoucí)*, *ryze monotónní (rostoucí, klesající)* a *konstantní* jsme již zopakovali v kapitole 3. Nyní připomeňme tuto velmi dobře známou a důležitou větu:

Věta 7.1. Předpokládejme, že funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s krajními body $a < b$ a že má všude v (a, b) derivaci. Pak

$$\left\{ \begin{array}{l} f' > 0 \\ f' \geq 0 \\ f' < 0 \\ f' \leq 0 \\ f' = 0 \end{array} \right\} \text{ všude v } (a, b) \Rightarrow f \text{ je } \left\{ \begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \\ \text{konstantní} \end{array} \right\} \text{ v } I.$$

Spolu s větou 7.1 se při vyšetřování průběhu funkce potřebují zejména tato další tvrzení:

Věta 7.2. Je-li funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$, jsou-li $\alpha \neq \beta$ dva body intervalu I a platí-li nerovnost $f(\alpha) \leq C \leq f(\beta)$, existuje v intervalu s krajními body α, β bod γ , v němž je $f(\gamma) = C$.³⁾

D ů s l e d e k : Je-li funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$, je $f(I)$ buď interval, nebo jednobodová množina.

Věta 7.3. Je-li funkce f spojitá v kompaktním⁴⁾ intervalu $I \subset \mathbb{R}$, nabývá v I jak svého maxima, tak i svého minima.

Věta 7.4. Je-li funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s krajními body $a < b$ a je-li $f'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, je f ryze monotónní v I .

Poznamenejme, že body, v nichž je $f'(x) = 0$, se nazývají **stacionární body** funkce f . Předcházející větu lze proto vyslovit i takto:

Věta 7.4'. Má-li funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s krajními body $a < b$ všude v (a, b) derivaci, ale nemá tam žádné stacionární body, je v I ryze monotónní.

Věta 7.5. Je-li funkce $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní, existují limity $f(a+)$, $f(b-)$.

P o d r o b n ě j i : Je-li f neklesající v (a, b) , je

$$f(a+) = \inf f((a, b)), \quad f(b-) = \sup f((a, b));$$

je-li f v (a, b) nerostoucí, je

$$f(a+) = \sup f((a, b)), \quad f(b-) = \inf f((a, b)).$$

³⁾ Platnost právě vysloveného tvrzení se nazývá *Darbouxova vlastnost* funkce f . Často se uvádí i v této podobě: *Nabývá-li funkce f v bodech $\alpha \in I$ a $\beta \in I$ hodnot A a B , nabývá v bodech ležících mezi α, β i všech hodnot ležících mezi A a B .* (Říkáme přitom, že číslo μ leží mezi čísly λ a ν , je-li buď $\lambda \leq \mu \leq \nu$, nebo $\lambda \geq \mu \geq \nu$.)

⁴⁾ *Kompaktním* intervalem rozumíme interval, který je zároveň uzavřený a omezený.

Poznámka 7.1 (důležitá). Studenti se velmi často (od učitelů i z učebnic) dovídají, že k tomu, aby našli extrémů dané (spojité) funkce f v intervalu I , musí po vyřešení rovnice $f'(x) = 0$, tedy po nalezení všech stacionárních bodů funkce f u každého z nich rozhodnout, zdali v něm funkce f má své *lokální maximum* resp. *minimum*. Aby zjistili, ve kterých intervalech $J \subset I$ je f ryze monotónní, musí údajně rozřešit nerovnice $f'(x) > 0$ a $f'(x) < 0$.

Pravdivá je z toho však jen část o nalezení všech stacionárních bodů funkce f , přičemž je ovšem třeba najít i všechny body (definičního oboru), v nichž f derivaci nemá. Znalost tzv. *lokálních extrémů* však není k úspěšnému zjištění průběhu funkce potřebná a nerovnice $f'(x) \geq 0$ není nutné řešit téměř nikdy.

To, co jsme právě řekli, *prokážeme* vysvětlením jednoduchého algoritmu zjišťování průběhu funkce a řadou konkrétních příkladů, které jej budou ilustrovat.

Algoritmus vyšetření průběhu funkce: Budeme předpokládat, že funkce f je spojitá v intervalu I s krajními body $a < b$ a že množina N všech $x \in (a, b)$, v nichž je buď $f'(x) = 0$, nebo v nichž f derivaci nemá, je konečná.⁵⁾

Pak je konečná i množina $N \cup \{a, b\}$; uspořádáme-li body této množiny podle velikosti, dostaneme jisté dělení

$$(2) \quad \mathcal{V} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$$

intervalu I , kde $p \in \mathbb{N}$; případ $p = 1$ odpovídá situaci, kdy funkce f má nenulovou derivaci všude v (a, b) . Z definice dělení \mathcal{V} ihned plyne, že derivace f' existuje a je nenulová v každém bodě každého intervalu (x_{k-1}, x_k) , $1 \leq k \leq p$. Podle V.7.4 je f proto v každém intervalu $I_k := (x_{k-1}, x_k) \cap I$ ryze monotónní a podle V.7.5 existují tedy limity $y_0 := f(a+)$, $y_p := f(b-)$. Pokud některý z bodů a, b leží v I , je příslušná limita rovna hodnotě v tomto bodě. Označíme-li ještě $y_k := f(x_k)$ pro každé $k = 1, \dots, p-1$, platí zřejmě tyto implikace:

$$(3) \quad \text{Je-li } \left\{ \begin{array}{l} y_{k-1} < y_k \\ y_{k-1} > y_k \end{array} \right\}, \text{ je } f \left\{ \begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \end{array} \right\} \text{ v } I_k.$$

Intervaly ryzí monotonie funkce f jsme tedy našli bez řešení nerovnic $f(x) \geq 0$. Maximální takové intervaly získáme případným spojováním sousedních intervalů: *Je-li f rostoucí (klesající) v I_k i v I_{k+1} , je rostoucí (klesající) v intervalu $I_k \cup I_{k+1}$.*

Vzhledem k ryzí monotonii funkce f v každém intervalu I_k je zřejmé, že funkce f nemá extrém v žádném bodě žádného otevřeného intervalu (x_{k-1}, x_k) dělení \mathcal{V} ; může tedy mít extrém jen v některém z bodů x_k , tedy buď v některém krajním

⁵⁾ I když mnoho funkcí tento předpoklad splňuje, existují i zcela jednoduché funkce, u nichž tomu tak není. (Příklad: Funkce konstantní nebo např. sinus a kosinus mají v \mathbb{R} nekonečně mnoho stacionárních bodů.) Algoritmus lze snadno zobecnit na případ, kdy množina N je sice nekonečná, ale nemá v (a, b) žádný hromadný bod, tj. kdy každý bod $x \in (a, b)$ má okolí $P(x)$, jehož průnik s N je prázdný. (Příklad: \mathbb{Z} nemá v \mathbb{R} žádný hromadný bod.) Kromě toho lze někdy při vyšetřování průběhu funkcí (např. funkcí sinus a kosinus) využít jejich periodicity; v intervalech, jejichž délka se rovná periodě dané funkce, je náš předpoklad mnohdy již splněn. Vyšetření průběhu funkcí, které předpoklad (ani s uvedenými výhradami) nesplňují, může být značně obtížné, ne-li nemožné.

bodě intervalu I (pokud do I patří), nebo v některém stacionárním bodě $x \in (a, b)$, nebo v některém bodě $x \in (a, b)$, v němž nemá derivaci.⁶⁾

Jistě je také zřejmé, že

$$m := \min\{y_k; 0 \leq k \leq p\} = \inf f(I), \quad M := \max\{y_k; 0 \leq k \leq p\} = \sup f(I).$$

Dále: Je-li pro některé $k = 0, \dots, p$ zároveň $x_k \in I$ a $f(x_k) = m$ (resp. $= M$), nabývá f v bodě x_k svého minima (resp. maxima); pokud takové k neexistuje, minimum (maximum) neexistuje.

Jak je patrné, *lokální extrémy jsme nikde nepotřebovali*; k jejich nalezení se tradičně užívají derivace vyšších řádů, bez nichž se tedy zatím také obejdeme.

Porovnejme ještě naše výsledky s výsledky tradiční metody. Výrok, že funkce f má v bodě $x_k \in (a, b)$ (ostré) lokální maximum, znamená, že *existuje* $\delta > 0$ tak, že $x \in P(x_k, \delta) \Rightarrow f(x) < f(x_k)$, takže $f(x_k)$ je největší ze všech hodnot, kterých funkce f nabývá v příslušném $U(x_k, \delta)$; velikost čísla δ zůstává ovšem neznámá. Zde jsme na rozdíl od toho dospěli k těmto závěrům: Je-li $y_{k-1} < y_k > y_{k+1}$ (takže funkce f v intervalu I_k roste, v intervalu I_{k+1} klesá), je hodnota $f(x_k)$ největší ze všech hodnot, kterých f nabývá v intervalu $I_k \cup I_{k+1}$.

Čtenář jistě sám posoudí, která z těchto dvou informací je konkrétnější. Nelogické spojování lokálních extrémů se zjišťováním průběhu funkce je historicky přežitě, zbytečné a matoucí; podle Occamovy břitvy mělo být již dávno opuštěno.

Podstatné je nalezení všech stacionárních bodů a bodů, v nichž daná funkce nemá derivaci; tyto dvě kategorie bodů jsou důležité nejen z hlediska problematiky této kapitoly, ale i v mnohých aplikacích analýzy v jiných vědních disciplínách. Někdy se jim říká „výjimečné body“ – proto jsme dělení (2) označili písmenem \mathcal{V} (skriptové „V“); jsou-li důležité hodnoty i v jiných bodech, často je k \mathcal{V} přidáváme.

Příklad 7.1. Funkce

$$(4) \quad f(x) := 5 \sin x \cos^3 x$$

je spojitá v \mathbb{R} a lichá; protože je π -periodická, stačí vyšetřit ji např. v intervalu $I := (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Její derivace

$$(4') \quad f'(x) = 5 \cos^2 x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x)$$

existuje všude v \mathbb{R} a anuluje se v bodě $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, právě když je $x = \pm \frac{1}{6}\pi$.

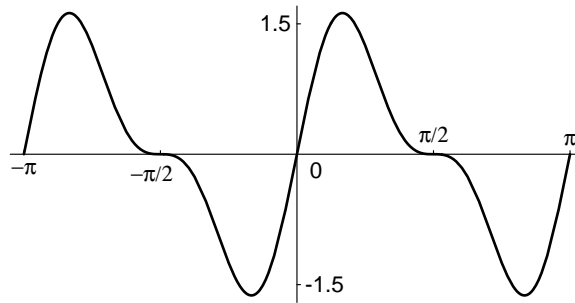
⁶⁾ Pozoruhodně často slyšíme zdánlivě moudrý výrok typu: „Je-li $f'(c) = 0$, může mít f v bodě c extrém.“ Kritický čtenář, který váží význam každého slova, ihned vidí, že tento výrok je z logického hlediska zcela triviální a bezobsažný, protože slovo „může“, k němuž můžeme přidat „ale nemusí“, naznačuje, že cosi buď nastane, nebo nenastane. K tomu však, abychom mohli tvrdit, že jakýsi výrok W buď platí, nebo neplatí, nepotřebujeme žádné předpoklady, neboť jde o jeden ze základních zákonů běžné logiky. Stejnou (nulovou) „cenu“ jako citovaný výrok má tedy např. výrok, že „funkce f může mít extrém v každém bodě svého definičního oboru“. Naproti tomu výrok, že „funkce diferencovatelná v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) může mít extrém jen v některém svém stacionárním bodě“, má značnou informační hodnotu. Jak je patrné, jde „jen o maličkost“ – jen o slůvko „jen“.

V následující tabulce jsou přehledně uvedeny základní informace; v první řádce jsou vypsané všechny výjimečné body, pod nimi jsou ve druhé řádce příslušné hodnoty funkce f , přičemž $a := 15\sqrt{3}/16 \doteq 1.6238$.

$\mathcal{V} :$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$f :$	0	$-a$	a	0

Podle V.7.4 je f ryze monotónní v každém uzavřeném intervalu dělení \mathcal{V} . Klesá v $\langle -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi \rangle$ a v $\langle \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, protože $f(-\frac{1}{2}\pi) = 0 > -a = f(-\frac{1}{6}\pi)$ a $f(\frac{1}{6}\pi) = a > 0 = f(\frac{1}{2}\pi)$; roste v $\langle \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi \rangle$, protože $f(-\frac{1}{6}\pi) = -a < a = f(\frac{1}{6}\pi)$. Vzhledem k tomu, že f je π -periodická funkce, klesá i v intervalu $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi \rangle$. Z toho plyne, že jedním z maximálních intervalů obsažených v \mathbb{R} , v nichž f klesá, je interval $J_0 := \langle \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \rangle$, a $J_k := \langle (k + \frac{1}{6})\pi, (k + \frac{5}{6})\pi \rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$, jsou právě všechny maximální intervaly, v nichž f klesá. Analogicky: $K_k := \langle (k - \frac{1}{6})\pi, (k + \frac{1}{6})\pi \rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$, jsou právě všechny maximální intervaly, v nichž f roste.

f nabývá svého maxima a právě ve všech bodech $(k + \frac{1}{6})\pi$, svého minima $-a$ právě ve všech bodech $(k - \frac{1}{6})\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.



GRAF FUNKCE f Z PŘÍKLADU 7.1

Příklad 7.2. Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $|2x| \leq x^2 + 1$, tedy i nerovnosti $-1 \leq 2x/(x^2 + 1) \leq 1$, je funkce

$$(5) \quad f(x) := \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}$$

definována v celém \mathbb{R} ; podle V.5.7 je tam f spojitá. Protože $|2x| = x^2 + 1$, právě když $x = \pm 1$, lze větu o diferencování superpozice aplikovat jen v bodech $x \neq \pm 1$, v nichž pak je

$$(5') \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)^2}} \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 \operatorname{sgn}(1 - x^2)}{x^2 + 1}.$$

Podle věty V.5.5 je

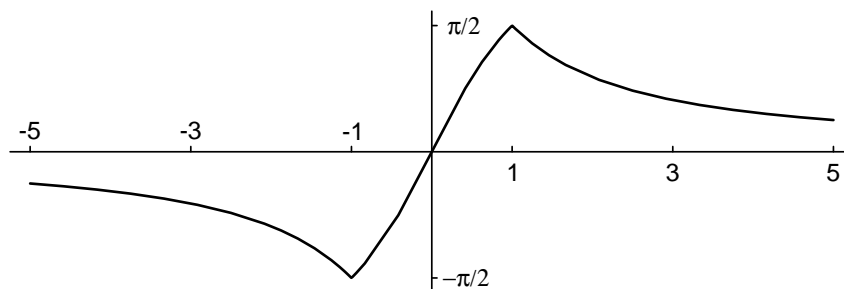
$$(6) \quad f'_-(-1) = f'_+(1) = -1, \quad f'_+(-1) = f'_-(1) = 1,$$

což dokazuje, že gr f má v bodech ± 1 hroty.

K výjimečným bodům přidáme tentokrát nulu (a ponecháme označení \mathcal{V}), protože rovnost $f(0) = 0$ je důležitá pro správné načrtnutí grafu funkce f .

$\mathcal{V} :$	$-\infty+$	-1	0	1	$+\infty-$
$f :$	0	$-\frac{1}{2}\pi$	0	$\frac{1}{2}\pi$	0

Jak je patrné, funkce f klesá v intervalech $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, roste v intervalu $(-1, 1)$; nabývá svého maxima $\frac{1}{2}\pi$ v bodě $+1$, minima $-\frac{1}{2}\pi$ v bodě -1 . Je-li $x \neq \pm 1$, je $-1 < f(x) < 1$. Dodejme ještě, že funkce f je lichá.



GRAF FUNKCE f Z PŘÍKLADU 7.2

Příklad 7.3. Funkce

$$(7) \quad f(x) := \operatorname{arccotg} \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right|$$

je definována všude v $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; je sudá a spojitá ve svém definičním oboru rovném sjednocení intervalů $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Užijeme-li identitu $|x|' = \operatorname{sgn} x$ platnou pro každé $x \neq 0$ a aplikujeme-li větu o diferencování superpozice, dostaneme po snadné úpravě tento výsledek:

$$(7') \quad 0 \neq x \neq \pm 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} \cdot \operatorname{sgn} \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Graf f má v bodě 0 hrot, protože podle V.5.5 je

$$(8_1) \quad f'_\pm(0) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \mp 1.$$

Protože $\lim_{x \rightarrow \pm 1} |x/(x^2 - 1)| = +\infty$ a $\operatorname{arccotg}(+\infty-) = 0$, existují limity $f(-1\pm)$, $f(1\pm)$ a rovnají se 0; kromě toho je $f'(\pm 1+) = 2$, $f'(\pm 1-) = -2$. Kdybychom tedy položili $f(\pm 1) := 0$, dostali bychom funkci spojitou v celém \mathbb{R} . Její

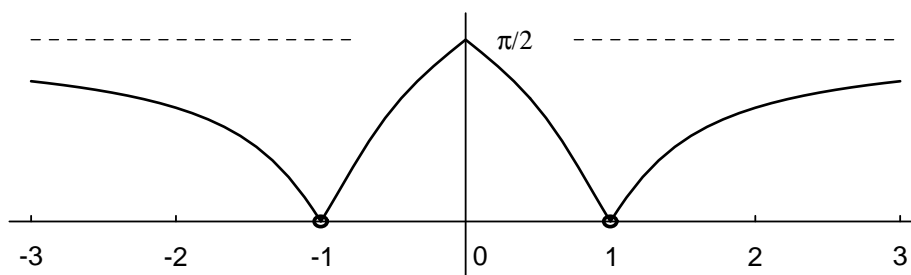
graf by měl v bodech ± 1 hroty, protože by podle V.5.5 platily rovnosti

$$(8_2) \quad f'_-(\pm 1) = f'(\pm 1-) = -2, \quad f'_+(\pm 1) = f'(\pm 1+) = 2.$$

My ovšem máme vyšetřit původní funkci f , která v bodech ± 1 definována není (což na grafu vyznačujeme malým prázdným kolečkem). Původní funkce samozřejmě v těchto bodech ani není spojitá, ani v nich nemá jednostranné derivace; rovnosti $f'(\pm 1-) = -2$, $f'(\pm 1+) = 2$ však naznačují, jaký je sklon grafu v blízkosti bodů ± 1 . Pro větší přehled vytvoříme ještě tuto tabulku:

\mathcal{V} :	$-\infty+$	$-1-$	$-1+$	$0-$	0	$0+$	$1-$	$1+$	$+\infty-$
f :	$\frac{1}{2}\pi$	0	0	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	0	0	$\frac{1}{2}\pi$
f' :	0	-1	1	1	$-$	-1	-1	1	0

Tabulka ukazuje, že f roste v intervalech $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$, klesá v intervalech $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$. Má maximum rovné $\frac{1}{2}\pi$ a nabývá je v bodě 0 (a nikde jinde); minimum však nemá, infimum je rovno 0 .



GRAF FUNKCE f Z PŘÍKLADU 7.3

Příklad 7.4. Funkce

$$(9) \quad f(x) := \operatorname{arctg} \frac{|\lg x|}{\lg x - 1}$$

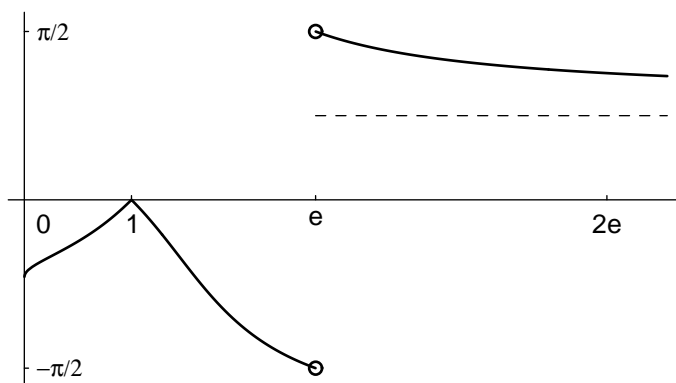
je spojitá ve svém definičním oboru $\mathcal{D}(f) = (0, e) \cup (e, +\infty)$; diferencovatelná je ve všech bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ až snad na bod $x = 1$, v němž nelze aplikovat větu o diferencování superpozice. Je-li $1 \neq x \in \mathcal{D}(f)$, je

$$(9') \quad f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{\lg^2 x}{(\lg x - 1)^2}} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\lg x) \cdot x^{-1} \cdot (\lg x - 1) - |\lg x| \cdot x^{-1}}{(\lg x - 1)^2} \\ = \frac{-\operatorname{sgn}(\lg x)}{x(2\lg^2 x - 2\lg x + 1)}.$$

Podle V.5.5 je $f'_{\pm}(1) = \mp 1$, takže graf f má v bodě 1 hrot. Tabulka hodnot a limit vypadá nyní takto:

\mathcal{V} :	0+	1-	1	1+	$e-$	$e+$	$+\infty-$
f :	$-\frac{1}{4}\pi$	0	0	0	$-\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$
f' :	$+\infty$	1	-	-1	$-e^{-1}$	$-e^{-1}$	0

Funkce f roste v intervalu $(0, 1)$, klesá v intervalech $\langle 1, e \rangle$, $(e, +\infty)$. Ačkoli je omezená, nemá ani minimum, ani maximum; její infimum resp. supremum je rovno $-\frac{1}{2}\pi$ resp. $\frac{1}{2}\pi$.



GRAF FUNKCE f Z PŘÍKLADU 7.4

Příklad 7.5. Funkce

$$(10) \quad f(x) := \sqrt[3]{\frac{(x^2 - 1)^2}{8x}}$$

je lichá a spojitá ve svém definičním oboru $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$, přičemž

$$f(0+) = f(+\infty-) = +\infty, \quad f(0-) = f(-\infty+) = -\infty.$$

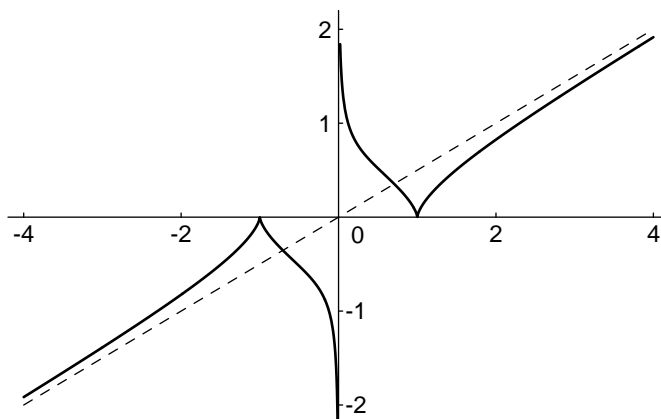
Z toho ihned plyne, že f nemá ani minimum, ani maximum, a že její infimum resp. supremum je rovno $-\infty$ resp. $+\infty$.

Protože funkce $\text{Id}^{1/3}$ je diferencovatelná všude v \mathbb{R} kromě počátku, je

$$(10') \quad \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{(x^2 - 1)^2}{x} \right)^{-2/3} \cdot \frac{2(x^2 - 1) \cdot 2x^2 - (x^2 - 1)^2}{x^2} \\ &= \frac{3x^2 + 1}{6 \sqrt[3]{x^4(x^2 - 1)}} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}. \end{aligned}$$

Protože je $f' < 0$ v $(0, 1)$ a $f' > 0$ v $(1, +\infty)$, funkce f v $(0, 1)$ klesá, v $(1, +\infty)$ roste; funkce $f|_{\mathbb{R}_+}$ má tedy v bodě 1 minimum. Protože f je lichá funkce, plyne z toho, že roste v $(-\infty, -1)$, klesá v $(-1, 0)$, takže funkce $f|_{\mathbb{R}_-}$ má v bodě -1 maximum. Protože je $f'_\pm(-1) = \mp\infty$, $f'_\pm(1) = \pm\infty$, má graf f v bodech ± 1 („velmi ostré“) hroty. \square

Další příklad bude poněkud obtížnější, ale vysvětlíme v něm užitečnou metodu, pomocí níž se někdy dá zjistit znaménko derivace.



GRAF FUNKCE f Z PŘÍKLADU 7.5

Příklad 7.6. Funkce f definovaná v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ podmínkami

$$(11) \quad f(x) := \frac{\arcsin x}{x} - 1 \text{ pro všechna } x \neq 0, \quad f(0) := 0,$$

je zřejmě sudá a spojitá v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Kromě toho platí:

$$(12_1) \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0,$$

$$(12_2) \quad 0 < |x| < 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}, \quad \text{kde } g(x) := \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x.$$

Snadno zjistíme, že v $(-1, 1)$ je

$$(13) \quad g'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

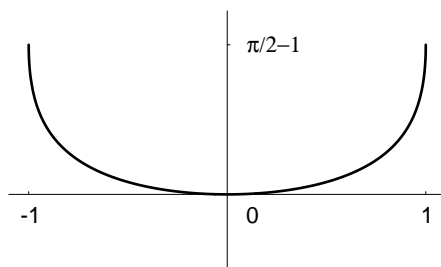
derivace g' je tedy kladná všude v $(-1, 1)$ kromě bodu 0, a v důsledku toho g roste jak v $(-1, 0)$, tak i v $(0, 1)$. Protože $g(0) = 0$, plyne z toho, že je $g < 0$ v $(-1, 0)$ a $g > 0$ v $(0, 1)$. Vzhledem k (12₂) je tedy i $f' < 0$ v $(-1, 0)$ a $f' > 0$ v $(0, 1)$; protože f je spojitá v $\langle -1, 1 \rangle$, plyne z toho, že v $\langle -1, 0 \rangle$ klesá, v $\langle 0, 1 \rangle$

roste. Minima rovného 0 nabývá proto v bodě 0, maxima rovného $\frac{1}{2}\pi - 1$ v bodech ± 1 . Je-li $0 \neq x \neq \pm 1$, je $0 < f(x) < 1$.

Všimněme si, že jsme ke zjištění znaménka funkce f' , která byla (v $(-1, 0)$ i v $(0, 1)$) rozdílem dvou funkcí téhož znaménka, užili jistou pomocnou funkci g . Rozklad v (12₂), pokud měl problém rozřešit, musel být ovšem „správně“ zvolen:

1) Znaménko funkce $g(x)$ muselo jednoduchým způsobem souviset se znaménkem funkce $f'(x)$ – v našem případě bylo stejné.

2) Funkci $g(x)$ bylo možné snadno diferencovat a hlavně se ve výsledku již nesměla objevit transcendentní funkce $\arcsin x$, která byla od začátku příčinou všech komplikací. Využili jsme toho, že funkce $\arcsin x$, jejíž hodnoty se jen obtížně srovnávají s hodnotami např. mocnin, má „jednoduchou“ derivaci⁷⁾; proto jsme $f'(x)$ rozložili tak, aby $\arcsin x$ byl v $g(x)$ samostatným sčítancem.



GRAF FUNKCE f Z PŘÍKLADU 7.6

* * *

V jednoduchých případech můžeme soubor informací o funkci, jejíž průběh vyšetřujeme, dále rozšířit; zopakujme proto definice několika dobře známých pojmů.

Funkce f definovaná v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ se nazývá **ryze konvexní** (v I), platí-li pro každé tři body x, y, z z I implikace

$$(14) \quad x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Změníme-li znaménko „<“ v závěru této implikace na „≤“ resp. „>“ resp. „≥“, dostaneme definici funkce **konvexní** resp. **ryze konkávní** resp. **konkávní** (v I).

Poznámka 7.2. Snadno nahlédneme, že implikace (14) je ekvivalentní s implikací

$$(14^*) \quad x < y < z \Rightarrow f(y) < f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x} (y - x).$$

Ve (14) se porovnávají směrnice sečen grafu f procházejících body $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$ resp. body $(y, f(y))$ a $(z, f(z))$, zatímco (14^{*}) znamená, že bod $(y, f(y))$ leží pod sečnou procházející body $(x, f(x))$ a $(z, f(z))$.

⁷⁾ Všimněme si, že podobně je tomu i s derivacemi transcendentních funkcí $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccotg} x$, $\lg(1 \pm x)$, $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtgh} x$, $\operatorname{argcotgh} x$.

Věta 7.6. Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body $a < b$ a necht' funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, spojitá v I , má derivaci všude v (a, b) . Pak platí:

$$\text{Je-li } f' \left\{ \begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \end{array} \right\} \text{ v } (a, b), \text{ je } f \left\{ \begin{array}{l} \text{ryze konvexní} \\ \text{konvexní} \\ \text{ryze konkávní} \\ \text{konkávní} \end{array} \right\} \text{ v } I.$$

Poznámka 7.3. Monotonie resp. ryzí monotonie funkce f' souvisí podle V.7.1 se znaménkem f'' ; platí proto např. toto tvrzení:

$$(15) \quad \text{Je-li } f \text{ spojitá v } I \text{ a je-li } f'' > 0 \text{ všude v } (a, b), \text{ je } f \text{ ryze konvexní v } I.$$

Z podmínky $f'' > 0$ všude v (a, b) totiž plyne, že f' je v (a, b) rostoucí, což (spolu se spojitostí f v I) má podle V.7.6 za následek, že funkce f je v I ryze konvexní.

Z V.7.6 je však patrné, že *není pravda* (jak se někdy studenti na školách učí), že k tomu, abychom mohli vyšetřit konvexnost–konkávnost dané funkce, *musíme* najít druhou derivaci; *je-li zřejmá monotonie funkce f' , není důvod hledat f'' .*

P ř í k l a d : Protože funkce $\lg' x = 1/x$ v \mathbb{R}_+ zřejmě klesá, je zbytečné počítat druhou derivaci jen proto, abychom zjistili, že funkce \lg je v \mathbb{R}_+ ryze konkávní.

Podobně je zcela zbytečné počítat $f''(x)$, je-li např. $f(x) := \operatorname{arctg} x$; její derivace $f'(x) = 1/(x^2 + 1)$ totiž zřejmě klesá v $(0, +\infty)$ a roste v $(-\infty, 0)$. Funkce arctg je tedy v intervalu $(-\infty, 0)$ ryze konvexní, v intervalu $(0, +\infty)$ ryze konkávní. \square

Říkáme, že $a \in \mathbb{R}$ je **inflexní bod** funkce f (nebo: grafu funkce f), existuje-li derivace $f'(a)$ a existuje-li takové $\delta \in \mathbb{R}_+$, že f je v jednom z intervalů $(a - \delta, a)$, $(a, a + \delta)$ ryze konvexní, zatímco ve druhém z nich je ryze konkávní.

Poznámka 7.4. Známe-li tedy všechny maximální intervaly, v nichž je daná funkce f ryze konvexní resp. konkávní, známe automaticky i všechny její inflexní body: *Postupujeme-li, jak se názorně říká, po ose x zleva doprava, pak tam, kde se mění ryzí konvexnost v ryzí konkávnost, nebo naopak, je inflexní bod.*

Obráceně však: Neznáme-li maximální intervaly konvexnosti–konkávnosti, nebude nám znalost inflexních bodů příliš platná; při kreslení grafu nám nepomůže, protože nebudeme vědět, v jak velkém intervalu začínajícím nebo končícím inflexním bodem je funkce konvexní resp. konkávní. Proto nelze nalezení inflexních bodů funkce považovat samo o sobě za přílišné obohacení našich poznatků o dané funkci; v žádném případě *není prioritou* vyšetřování průběhu funkce. \square

Říkáme, že přímka popsaná rovnicí $y = Ax + B$ je **asymptota** grafu funkce f v $+\infty$, je-li

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - Ax) = B;$$

napišeme-li všude $-\infty$ místo $+\infty$, dostaneme definici **asymptoty v $-\infty$** .

Dodatek k příkladu 7.1. Jak snadno ověříme, je druhá derivace funkce (4) rovna

$$(17) \quad f''(x) = 10 \sin x \cos x (3 \sin^2 x - 5 \cos^2 x)$$

všude v \mathbb{R} ; v $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ se anulují právě ve všech bodech dělení

$$\mathcal{V}_1 : -\frac{1}{2}\pi < -A < 0 < A < \frac{1}{2}\pi, \quad \text{kde } A := \arctg \sqrt{5/3} \doteq 0.9117.$$

V prvním a ve třetím otevřeném intervalu tohoto dělení je $f'' < 0$, ve druhém a ve čtvrtém intervalu je naopak $f'' > 0$. V prvních dvou jmenovaných intervalech f' klesá, takže f je v příslušných uzavřených intervalech ryze konkávní; ve druhých dvou intervalech je f z podobných důvodů ryze konvexní. Analogicky je tomu v intervalech, které vzniknou z intervalů dělení \mathcal{V}_1 posunutím o celé násobky čísla π , periody funkce f . Inflexními body funkce f v \mathbb{R} jsou právě všechny body, které vzniknou z bodů dělení \mathcal{V}_1 posunutím o $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Asymptoty graf funkce f nemá.⁸⁾

Dodatek k příkladu 7.2. Druhou derivaci funkce (5) by bylo zcela zbytečné počítat, protože monotonii její první derivace (5') lze snadno zjistit bez ní: Protože funkce $1/(1+x^2)$ klesá v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, platí totéž o $f'(x)$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ (kde je $\text{sgn}(1-x^2) > 0$); v intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ funkce f' naopak roste. Protože f' je sudá funkce, klesá v intervalu $\langle -\infty, -1 \rangle$ a roste v intervalu $\langle -1, 0 \rangle$.

Funkce f je proto ryze konkávní v intervalech $\langle -\infty, -1 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$ a ryze konvexní v intervalech $\langle -1, 0 \rangle$, $\langle 1, +\infty \rangle$. Nula je jejím jediným inflexním bodem a rovnosti $f(\pm\infty \mp) = f'(\pm\infty \mp) = 0$ ukazují, že osa x je asymptotou grafu f v $+\infty$ i v $-\infty$.

Dodatek k příkladu 7.3. Funkce (7) má druhou derivaci všude v $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ a pro všechna x z této množiny je

$$(18) \quad f''(x) = -\frac{2x(x^4 + 2x^2 - 2)}{(x^4 - x^2 + 1)^2} \cdot \text{sgn} \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Bikvadratická rovnice $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ má dva (pro nás nezajímavé) imaginární kořeny a dva reálné kořeny $\pm B$, kde $B := \sqrt{\sqrt{3} - 1} \doteq 0.8556$. V každém otevřeném intervalu dělení

$$\mathcal{V}_2 : -\infty < -1 < -B < 0 < B < 1 < +\infty$$

je $\text{sgn} f''$ konstantní. V prvním, třetím, čtvrtém a šestém z nich je f'' záporná, ve druhém a v pátém intervalu kladná. Funkce f je proto ryze konkávní v intervalech $\langle -\infty, -1 \rangle$, $\langle -B, 0 \rangle$, $\langle 0, B \rangle$, $\langle 1, +\infty \rangle$ a ryze konvexní v intervalech $\langle -1, -B \rangle$, $\langle B, 1 \rangle$; $\pm B$ jsou její jediné inflexní body.⁹⁾ Protože je $f(\pm\infty \mp) = \frac{1}{2}\pi$ a $f'(\pm\infty \mp) = 0$, je vodorovná přímka $y = \frac{1}{2}\pi$ asymptotou grafu f v $+\infty$ i v $-\infty$.

⁸⁾ Obecněji platí: *Graf žádné nekonstantní periodické funkce nemá asymptoty.*

⁹⁾ Při pohledu na graf lze konvexitu v intervalech $\langle -1, -B \rangle$ a $\langle B, 1 \rangle$ snadno přehlédnout a dojít k závěru, že f je ryze konkávní v celém intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Podobné situace dokumentují, proč je tak nutné při výuce matematiky neustále zdůrazňovat *rozdíl mezi obrázkem a důkazem.*

Příklad funkce $|\sin x|$, která je ryze konkávní v $\langle -\pi, 0 \rangle$ i v $\langle 0, \pi \rangle$, ale není konkávní v $\langle -\pi, \pi \rangle$, ukazuje, že žádné obecné tvrzení typu „Je-li f konkávní v intervalech $\langle a, b \rangle$ a $\langle b, c \rangle$, je konkávní i v intervalu $\langle a, c \rangle$ “ neplatí.

V našem případě však třetí a čtvrtý interval dělení \mathcal{V}_2 spojit lze – funkce f je ryze konkávní v celém intervalu $\langle -B, B \rangle$. Abychom pro každou trojici bodů $x < y < z$ z intervalu $\langle -B, B \rangle$ dokázali nerovnost

$$(19) \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

rozlišujeme několik případů: Je-li $z \leq 0$ nebo $x \geq 0$, plyne (19) z ryzí konkávnosti funkce f v $\langle -B, 0 \rangle$ resp. v $\langle 0, B \rangle$. Je-li $x < y \leq 0 < z$, platí z téhož důvodu nerovnost $(f(y) - f(x))/(y - x) \geq (f(0) - f(x))/(0 - x)$; protože je navíc $f(0) > f(z)$ a $0 < 0 - x < z - x$, je $(f(0) - f(x))/(0 - x) > (f(z) - f(x))/(z - x)$, takže nerovnost (19) opět platí. Podobně je tomu v případě, že $x < 0 \leq y < z$.

Dodatek k příkladu 7.4. Funkce (9) má druhou derivaci všude v $\mathbb{R}_+ - \{1, e\}$, přičemž pro všechna x z této množiny je

$$(20) \quad f''(x) = \frac{2 \lg^2 x + 2 \lg x - 1}{x^2 (2 \lg^2 x - 2 \lg x + 1)^2} \cdot \operatorname{sgn}(\lg x).$$

Protože rovnice $2y^2 + 2y - 1 = 0$ má kořeny $c := -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$ a $d := \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$, má rovnice $f''(x) = 0$ kořeny $C := \exp c \doteq 0.255$ a $D := \exp d \doteq 1.442$. V intervalech $(C, 1)$, (D, e) , $(e, +\infty)$ je derivace f'' kladná, v intervalech $(0, C)$, $(1, D)$ záporná. Z toho plyne, že f je ryze konvexní v intervalech $\langle C, 1 \rangle$, $\langle D, e \rangle$, $(e, +\infty)$, ryze konkávní v intervalech $(0, C)$, $\langle 1, D \rangle$; C a D jsou její (jediné) inflexní body.

Protože je $f(+\infty-) = \frac{1}{4}\pi$ a $f'(+\infty-) = 0$, je vodorovná přímka $y = \frac{1}{4}\pi$ asymptotou grafu f v $+\infty$.

Dodatek k příkladu 7.5. Druhá derivace

$$(21) \quad f''(x) = \frac{2(1 - 3x^2)}{9 \sqrt[3]{x^7(1 - x^2)^4}}$$

funkce (10) existuje všude v \mathbb{R} až na body ± 1 a 0 , je kladná v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, -\alpha)$, $(0, \alpha)$, kde $\alpha := 1/\sqrt{3} \doteq 0.57735$, záporná v intervalech $(-\alpha, 0)$, $(\alpha, 1)$, $(1, +\infty)$. V důsledku toho je funkce f ryze konvexní v intervalech $(-\infty, -1)$, $\langle -1, -\alpha \rangle$, $(0, \alpha)$, ryze konkávní v intervalech $\langle -\alpha, 0 \rangle$, $\langle \alpha, 1 \rangle$, $\langle 1, +\infty \rangle$, není však konvexní v $(-\infty, -\alpha)$ ani konkávní v $\langle \alpha, +\infty \rangle$; graf f má dva inflexní body $\pm \alpha$.

Protože $f'(\pm\infty\mp) = \frac{1}{2}$ a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = 0$, je přímka $y = \frac{1}{2}x$ asymptotou grafu f v $+\infty$ i v $-\infty$.

Dodatek k příkladu 7.6. Druhá derivace funkce (11) je rovna

$$(22) \quad f''(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2(1 - x^2)^{3/2}} + \frac{2 \arcsin x}{x^3}, \quad \text{je-li } 0 < |x| < 1.$$

Znaménko této derivace v $P(0, \sqrt{2/3})$ není na první pohled patrné, protože první sčítanec je tam záporný, druhý kladný; další komplikací je, že oba sčítance mají v bodě 0 nekonečné limity. Budeme proto postupovat analogicky jako při zjišťování znaménka první derivace: Nechť

$$(23) \quad h(x) := 2 \arcsin x + \frac{(3x^2 - 2)x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \quad \text{pro všechna } x \in (-1, 1).$$

Tato pomocná funkce je spojitá v $(-1, 1) = U(0, 1)$ a v $P(0, 1)$ platí relace

$$(24) \quad f''(x) = \frac{h(x)}{x^3}, \quad h'(x) = \frac{(2x^2 + 1)x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}} > 0.$$

Ze druhé z nich a ze spojitosti funkce h plyne, že h roste v $(-1, 1)$; vzhledem k tomu, že $h(0) = 0$, je proto $h < 0$ v $(-1, 0)$ a $h > 0$ v $(0, 1)$. Odtud a z první identity v (24) vyplývá, že je $f'' > 0$ všude v $P(0, 1)$. Funkce f' je zřejmě spojitá v každém bodě $x \in P(0, 1)$; vzhledem k (12₁) a vzhledem k rovnostem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x \right) = \frac{1}{x^2} \left(\left(x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \right) - \left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) \right) \\ &= \frac{1}{3}x + o(x) \rightarrow 0 = f(0) \quad \text{pro } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

je však f' spojitá i v bodě 0. Ze spojitosti f' v $(-1, 1)$, kterou jsme právě ověřili, a z nerovnosti $f'' > 0$ platné všude v $P(0, 1)$ ihned vyplývá, že f' roste v celém intervalu $(-1, 1)$. V důsledku toho je f ryze konvexní v intervalu $(-1, 1)$.

Čtenář si jistě všiml, že pomocnou funkci jsme opět volili tak, aby její derivace neobsahovala výraz $\arcsin x$; tím se podstatná část nelehkého problému vyřešila.

Cvičení

Vyšetřete průběh těchto funkcí, a to včetně konvexnosti a konkávnosti, je-li u čísla příkladu hvězdička:

7.01.* $x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

7.02.* $x^4 - 4x^3$

7.03.* $x^4 - x^2 - 2$

7.04.* $\frac{1-2x}{3x^2}$

7.05.* $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

7.06.* $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

7.07. $(x^2)^x$

7.08.* $\frac{x^2+1}{x^2+2x+3}$

7.09.* $\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$

7.10.* $ex - \lg x$

7.11.* $|x-3| + |x+1|$

7.12.* $|x+4| - |x-2|$

- 7.13.* $|x^2 - x - 6|$
- 7.15.* $\sqrt{x^2 + x - 6}$
- 7.17.* $|x| - |x^2 - 1|$
- 7.19.* $|x^2 - 1| - |x^2 - 4|$
- 7.21.* $\frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- 7.23.* $\frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$
- 7.25.* $\sqrt[3]{(x - 2)^2} - \sqrt[3]{(x + 2)^2}$
- 7.27.* $x - 2\sqrt[3]{x^2}$
- 7.29.* $x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$
- 7.31.* $3\sqrt[3]{\frac{x(x + 6)}{x - 2}}$
- 7.33.* $\sqrt[3]{x}e^{-x}$
- 7.35.* $7x(e^{-|x-1|} - e^{-|x+1|})$
- 7.37.* $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
- 7.39.* $e^{-x} - |e^{-x} - 1|$
- 7.41.* $3(\cosh x - |\sinh x|)$
- 7.43.* $\sin^3 x + \cos^3 x$
- 7.45.* $2|\sin x| + |\cos 2x|$
- 7.47.* $3|\sin^3 x|$
- 7.49.* x^x
- 7.51.* $\frac{1}{3}(1 + x)^x$
- 7.14.* $|x^2 + x - 2| - |x^2 + 2x - 3|$
- 7.16.* $|2x + 1| + |2 - x| - |3x + 5|$
- 7.18.* $|x^2 + 2x| + |x^2 + 2x - 3| - 2$
- 7.20.* $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$
- 7.22.* $\sqrt[3]{x^2 - x - 2}$
- 7.24.* $\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 1}$
- 7.26.* $\sqrt[3]{x - \frac{1}{x}}$
- 7.28.* $\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x - 2)^4}$
- 7.30.* $3(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{|x^2 - 1|})$
- 7.32.* $\sqrt[5]{\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}\right)^2}$
- 7.34.* $(2x + 1)e^{-|x^2 - 1|}$
- 7.36.* $8 \exp\left(-\left|\frac{x}{x - 2}\right|\right)$
- 7.38.* $\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$
- 7.40.* $e^x - |e^x - e|$
- 7.42.* $\sin x + \cos^2 x$
- 7.44.* $\sin^3 x - |\cos^3 x|$
- 7.46.* $\sin 2x + 2|\cos x|$
- 7.48.* $2|\sin x|\cos^3 x$
- 7.50.* $x^{1/x}$
- 7.52.* $(1 + x)^{1/x}$

- 7.53.*** $\lg x \lg(1-x)$
- 7.54.*** $\lg |\lg x|$
- 7.55.** $x^a \lg x \quad (a \in \mathbb{R}_+)$
- 7.56.*** $\frac{1}{2} \lg(1-|x-1|)$
- 7.57.** $\lg(1+|x-x^2|)$
- 7.58.** $\frac{\lg^3 x - 2}{\lg^2 x + 1}$
- 7.59.*** $\lg \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^x + 1}$
- 7.60.** $\lg \frac{3e^{2x} + e^x + 10}{e^x + 1}$
- 7.61.*** $\operatorname{arctg}(\lg x)$
- 7.62.*** $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}$
- 7.63.*** $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$
- 7.64.*** $\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
- 7.65.*** $x \operatorname{arccotg} x$
- 7.66.*** $x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$
- 7.67.*** $\frac{1}{2} \arccos(1 - \lg^2 x)$
- 7.68.*** $5 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$
- 7.69.*** $2 \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}}$
- 7.70.** $\operatorname{arccotg}(\cos x) - \operatorname{arctg}(\sin x)$
- 7.71.** $2 \arcsin \frac{1-|x^2-1|}{1+|x^2-1|}$
- 7.72.*** $\arcsin \frac{2 \lg x}{\lg^2 x + 1}$
- 7.73.** $\cos \left(\lg \frac{1}{x^{10} + 1} \right)$
- 7.74.** $\arccos \frac{1}{3 \lg x}$
- 7.75.*** $\arcsin(x^2 - |x^2 - 1|)$
- 7.76.*** $x + \sqrt{4-x^2} \cdot \arccos \frac{1}{2}x$
- 7.77.*** $\operatorname{arccotg} \frac{x}{x^2 - 1}$
- 7.78.** $2 \operatorname{arctg} \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right|$
- 7.79.*** $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$
- 7.80.** $\arccos \frac{x^3}{x^6 + 1} - 1$
- 7.81.** $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$
- 7.82.** $\arcsin(\sin 2x)$
- 7.83.*** $\arcsin \sqrt{1 - \sin^4 x}$
- 7.84.** $\arcsin(1 - \sin^4 x)$
- 7.85.** $\arcsin(1 - \sin^4 x)^2$
- 7.86.** $\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x^2 - 1}$
- 7.87.** $\sin(2 \operatorname{arccotg} x)$
- 7.88.*** $\arccos(1 - x^2)$
- 7.89.*** $\arccos(1 - x^4)$
- 7.90.** $\arccos(1 - x^2)^2$
- 7.91.*** $\arccos(1 - x)^2$
- 7.92.*** $\arccos(1 - x)^4$

- 7.93.*** $f(x) := \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) := 0$
- 7.94.*** $f(x) := \exp(-x^{-2})$ pro $x \neq 0$, $f(0) := \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 7.95.** $f(x) := (x-6) \exp(-x^{-2})$ pro $x \neq 0$, $f(0) := \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 7.96.*** $f(x) := x^2 \lg|x|$ pro $x \neq 0$, $f(0) := \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 7.97.*** $f(x) := x^2(\lg x^2 - 4)$ pro $x \neq 0$, $f(0) := \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 7.98.** $f(x) := \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) := \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 7.99.** $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 7.100.** $f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

Řešení

Řešení každého příkladu je ilustrováno grafem.¹⁰⁾ Má-li funkce omezený definiční obor a je-li v něm omezená, je graf nakreslen celý; v ostatních případech je zakreslena jen „zajímavá část“ grafu. Tam, kde to poměr vodorovného a svislého rozměru obrázku dovoluje, užíváme stejné měřítko na obou osách; pak jsou správně zobrazeny např. i všechny úhly.

U jednotlivých příkladů jsou uvedeny zpravidla tyto údaje: *Definiční obor* $\mathcal{D}(f)$ příslušné funkce f s případným dodatkem, že funkce f je *sudá*, *lichá* nebo *periodická*; „ p -per.“ znamená, že p je nejmenší kladná perioda dané funkce. Informaci, že f je *spojitá* v $\mathcal{D}(f)$, neuvádíme; v opačném případě jsou však vyjmenovány všechny *body nespojitosti* funkce f . Podobně jako v rozřešených příkladech této kapitoly upozorňujeme na všechny „výjimečné body“. Za značkou K' jsou vypsány všechny *kořeny funkce* f' ; za nimi v závorkách většinou následují i příslušné hodnoty funkce. Nemá-li f' žádné kořeny, množinu K' neuvádíme. *Limity* se značí běžným způsobem, za jednostrannými limity první derivace je upozornění „(hr.)“, jde-li o *hroty* grafu f . Za značkou \nearrow resp. \searrow následuje seznam maximálních intervalů, v nichž je f *rostoucí* resp. *klesající*. U příkladů označených hvězdičkou jsou za značkou K'' vypsány *kořeny funkce* f'' , pokud existují a jsou k vyšetření průběhu potřebné; za značkou \smile resp. \frown následují seznamy maximálních intervalů, v nichž je f *ryze konvexní* resp. *ryze konkávní*. Má-li $gr f$ *inflexní body*, jsou uvedeny za značkou \sim . Má-li $gr f$ *asymptotu* v $-\infty$ resp. v $+\infty$, napíšeme za symbol „ $as_{-\infty}$:“ resp. „ $as_{+\infty}$:“ příslušnou rovnici; rovnici společné asymptoty v $-\infty$ a v $+\infty$ píšeme za znakem „ $as_{\pm\infty}$:“. V obrázcích vyznačujeme asymptoty tečkovanými linkami.

¹⁰⁾ Z technických důvodů jsme všechny obrázky umístili na konec této kapitoly.

Řešení každého příkladu obsahuje i hodnoty *infima* a *suprema* dané funkce f v jejím definičním oboru $\mathcal{D}(f)$. Je-li toto infimum rovno A , píšeme $\inf = A$, nemá-li f v $\mathcal{D}(f)$ minimum; má-li je, píšeme $\min = A$. Podobně v případě suprema a maxima.

V některých případech se od právě popsaného schématu poněkud odchýlíme. Některé informace, dobře patrné z grafu, nemusí být explicitě uvedeny. V komentáři k příkladům mohou být naopak uvedeny i některé další důležité nebo zajímavé skutečnosti.

Příklad. Řešení příkladu 7.5 bychom zapsali takto:

7.5. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; lichá; $f(0\pm) = f(\pm\infty\mp) = \pm\infty$; $f'_\pm(-1) = \pm\infty$, $f'_\pm(1) = \mp\infty$ (hr.); $\nearrow : (-\infty, -1), \langle 1, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -1, 0 \rangle, (0, 1)$; $K'' : \pm\alpha$, kde $\alpha = \sqrt{1/3} \doteq 0.577$; $\smile : (-\infty, -1), \langle -1, -\alpha \rangle, (0, \alpha)$; $\frown : \langle -\alpha, 0 \rangle, \langle \alpha, 1 \rangle, \langle 1, +\infty \rangle$; $\sim : \pm\alpha$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{2}x$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

* * *

7.01* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : -3, 1$ ($f(-3) = 17$, $f(1) = -15$); $\nearrow : (-\infty, -3), \langle 1, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -3, 1 \rangle$; $K'' : -1$; $\smile : \langle -1, +\infty \rangle$; $\frown : (-\infty, -1)$; $\sim : -1$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.02* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : 0, 3$ ($f(0) = 0$, $f(3) = -27$); $\nearrow : \langle 3, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, 3)$; $K'' : 0, 2$; $\smile : (-\infty, 0), \langle 2, +\infty \rangle$; $\frown : \langle 0, 2 \rangle$; $\sim : 0, 2$; $\min = -27$, $\sup = +\infty$.

7.03* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $K' : x_1 := -1/\sqrt{2}, 0, x_2 := 1/\sqrt{2}$ ($f(\pm 1/\sqrt{2}) = -\frac{9}{4}$, $f(0) = -2$); $\nearrow : \langle x_1, 0 \rangle, \langle x_2, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, x_1), \langle 0, x_2 \rangle$; $K'' : \pm x_3$, kde $x_3 := 1/\sqrt{6} \doteq 0.408$; $\smile : (-\infty, -x_3), \langle x_3, +\infty \rangle$; $\frown : \langle -x_3, x_3 \rangle$; $\sim : \pm x_3$; $\min = -\frac{9}{4}$, $\sup = +\infty$.

7.04* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; $f(0\pm) = +\infty$; $K' : 1$ ($f(1) = -\frac{1}{3}$); $\nearrow : \mathbb{R}_-, \langle 1, +\infty \rangle$; $\searrow : (0, 1)$; $K'' : \frac{3}{2}$; $\smile : \mathbb{R}_-, (0, \frac{3}{2})$; $\frown : \langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle$; $\sim : \frac{3}{2}$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = -\frac{1}{3}$, $\sup = +\infty$.

7.05* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $K' : 0$ ($f(0) = -1$); $\nearrow : \langle 0, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, 0)$; $K'' : \pm a$, kde $a = \sqrt{1/3} \doteq 0.577$; $\smile : \langle -a, a \rangle$; $\frown : (-\infty, -a), \langle a, +\infty \rangle$; $\sim : \pm a$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 1$; $\min = -1$, $\sup = 1$.

7.06* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; sudá; $K' : 0$ ($f(0) = -1$); $\nearrow : (-\infty, -1), (-1, 0)$; $\searrow : \langle 0, 1 \rangle, (1, +\infty)$; $\smile : (-\infty, -1), (1, +\infty)$; $\frown : (-1, 1)$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 1$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.07. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : \pm 1/e \doteq \pm 0.368$ ($f(-1/e) = e^{2/e} \doteq 2.087$, $f(1/e) = e^{-2/e} \doteq 0.479$); $f'(0) = -\infty$; $\nearrow : (-\infty, -1/e), \langle 1/e, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -1/e, 1/e \rangle$; $\text{as}_{-\infty} : y = 0$; $\inf = 0$, $\sup = +\infty$.¹¹⁾

¹¹⁾ Poznamenejme, že $f(x)$ nesmíme přepsat na tvar x^{2x} , protože bychom z definičního oboru vyloučili \mathbb{R}_- ; je však $f(x) = |x|^{2x}$. Transcendentní rovnice $f''(x) = f(x)((\lg x^2 + 2)^2 + 2/x) = 0$ má jediný kořen $\alpha \doteq -0.80790675$, který lze (přibližně) vypočítat vhodnou numerickou metodou; $f(\alpha) \doteq 1.4115$; $\smile : (-\infty, \alpha), (0, +\infty)$; $\frown : \langle \alpha, 0 \rangle$; $\sim : \alpha, 0$.

7.08* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : x_1 = -(\sqrt{2} + 1) \doteq -2.41, x_2 = \sqrt{2} - 1 \doteq 0.41$ ($f(x_1) = \max = 1 + 1/\sqrt{2} \doteq 1.7071, f(x_2) = \min = 1 - 1/\sqrt{2} \doteq 0.2929$); $\nearrow : (-\infty, x_1), \langle x_2, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle x_1, x_2 \rangle$; $K'' : x_3 = -(\sqrt{6} + 1) \doteq -3.45, -1, x_4 = \sqrt{6} - 1 \doteq 1.45$; $\smile : (-\infty, x_3), \langle -1, x_4 \rangle$; $\frown : \langle x_3, -1 \rangle, \langle x_4, +\infty \rangle$; $\sim : x_3, -1, x_4$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 1$.

7.09* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; lichá; $K' : \pm 1$ ($f(\pm 1) = \pm 1$); $\nearrow : (-\infty, -1), \langle 1, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle$; $\smile : \mathbb{R}_+$; $\frown : \mathbb{R}_-$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{2}x$; $\inf = -\infty, \sup = +\infty$.

7.10* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f(0+) = f(+\infty-) = +\infty$; $K' : 1/e$ ($f(1/e) = 2 = \min$); $f'(0+) = -\infty, f'(+\infty-) = e$; $\nearrow : \langle 1/e, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle 0, 1/e \rangle$; $\smile : \mathbb{R}_+$; $\sup = +\infty$.

7.11* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f(x) = -2(x - 1)$ pro $x \leq -1, f(x) = 4$ v $\langle -1, 3 \rangle, f(x) = 2(x - 1)$ pro $x \geq 3$; hroty: $-1, 3$; $\min = 4, \sup = +\infty$.

7.12* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f(x) = -6$ pro $x \leq -4, f(x) = 2(x + 1)$ v $\langle -4, 2 \rangle, f(x) = 6$ pro $x \geq 2$; hroty: $-4, 2$; $\min = -6, \max = 6$.

7.13* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : \frac{1}{2}$ ($f(\frac{1}{2}) = \frac{25}{4}$); $f'_\pm(-2) = f'_\pm(3) = \pm 5$ (hr.); $\nearrow : \langle -2, \frac{1}{2} \rangle, \langle 3, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, -2), \langle \frac{1}{2}, 3 \rangle$; $\smile : (-\infty, -2), \langle 3, +\infty \rangle$; $\frown : \langle -2, 3 \rangle$; $\min = 0, \sup = +\infty$.

7.14* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f(x) = 1 - x$ v $(-\infty, -3) \cup \langle 1, +\infty \rangle, f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ v $\langle -3, -2 \rangle, f(x) = x - 1$ v $\langle -2, 1 \rangle$; hroty: $-3, -2, 1$; $\smile : \langle -3, -2 \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 1 - x$.

7.15* $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -3) \cup \langle 2, +\infty \rangle$; $\nearrow : \langle 2, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, -3)$; $f'_-(-3) = -\infty, f'_+(2) = +\infty$; $\frown : (-\infty, -3), \langle 2, +\infty \rangle$; $\text{as}_{-\infty} : y = -(x + \frac{1}{2}), \text{as}_{+\infty} : y = x + \frac{1}{2}$; $\min = 0, \sup = +\infty$.

7.16. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f(x) = 6$ v $(-\infty, -\frac{5}{3}), f(x) = -2(3x + 2)$ v $\langle -\frac{5}{3}, -\frac{1}{2} \rangle, f(x) = -2(x + 1)$ v $\langle -\frac{1}{2}, 2 \rangle, f(x) = -6$ v $\langle 2, +\infty \rangle$; hroty: $-\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}, 2$.

7.17* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $f(x) = 1 - x - x^2$ v $(-\infty, -1), f(x) = x^2 - x - 1$ v $\langle -1, 0 \rangle, f(x) = x^2 + x - 1$ v $\langle 0, 1 \rangle, f(x) = 1 + x - x^2$ v $\langle 1, +\infty \rangle$; $f'_-(-1) = 1, f'_+(-1) = -3, f'_-(0) = -1, f'_+(0) = 1, f'_-(1) = 3, f'_+(1) = -1$ (hr.); $\smile : \langle -1, 1 \rangle$; $\frown : (-\infty, -1), \langle 1, +\infty \rangle$; $\inf = -\infty, \max = 1$.

7.18* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$, je-li buď $x \leq -3$, nebo $x \geq 1, f(x) = 1$, je-li buď $-3 \leq x \leq -2$, nebo $0 \leq x \leq 1, f(x) = 1 - 4x - 2x^2$, je-li $-2 \leq x \leq 0$; $f'_+(-3) = f'_-(-2) = f'_+(0) = f'_-(1) = 0, f'_-(-3) = -8, f'_+(-2) = 4, f'_-(0) = -4, f'_+(1) = 8$ (hr.); $\smile : (-\infty, -3), \langle 1, +\infty \rangle$; $\frown : \langle -2, 0 \rangle$; $\min = 1, \sup = +\infty$.

7.19* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $f(x) = 3$, je-li $|x| \geq 2, f(x) = 2x^2 - 5$, je-li $1 \leq |x| \leq 2, f(x) = -3$, je-li $|x| \leq 1$; $f'_-(-2) = f'_+(-1) = f'_-(1) = f'_+(2) = 0, f'_+(-2) = -8, f'_-(-1) = -4, f'_+(1) = 4, f'_-(2) = 8$ (hr.); $\smile : \langle -2, -1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle$; $\min = -3, \max = 3$.

7.20* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; lichá; $f(\pm\infty\mp) = \pm 1$; $\nearrow : \mathbb{R}$; $\smile : (-\infty, 0)$; $\frown : \langle 0, +\infty \rangle$; $\sim : 0$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \pm 1$; $\inf = -1, \sup = 1$.

7.21* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : -\frac{1}{2}$ ($f(-\frac{1}{2}) = -\sqrt{5}$); $\nearrow : \langle -\frac{1}{2}, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, -\frac{1}{2})$; $K'' : x_1 = -\frac{1}{8}(3 + \sqrt{41}) \doteq -1.175, x_2 = \frac{1}{8}(-3 + \sqrt{41}) \doteq 0.425$; $\smile : \langle x_1, x_2 \rangle$; $\frown : (-\infty, x_1), \langle x_2, +\infty \rangle$; $\sim : x_1, x_2$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \pm 1$; $\min = -\sqrt{5}, \sup = 1$.

7.22* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : \frac{1}{2} (f(\frac{1}{2}) = -\sqrt[3]{9/4} \doteq -1.3104 = \min)$; $f'(-1) = -\infty$, $f'(2) = +\infty$; $\nearrow : \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, \frac{1}{2})$; $f'' < 0 \vee (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, $f'' > 0 \vee (-1, 2)$; $\smile : \langle -1, 2 \rangle$; $\frown : (-\infty, -1), \langle 2, +\infty \rangle$; $\sup = +\infty$.

7.23* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; lichá; $K' : 0$; $\nearrow : \mathbb{R}$; $K'' : 0, \pm 1$; $\smile : (-\infty, -1), \langle 0, 1 \rangle$; $\frown : \langle -1, 0 \rangle, \langle 1, +\infty \rangle$; $\sim : -1, 0, 1$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = x$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.24* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; lichá; $f'(-1) = f'(1) = +\infty$; $\nearrow : \mathbb{R}$; $\smile : (-\infty, -1), \langle 0, 1 \rangle$; $\frown : \langle -1, 0 \rangle, \langle 1, +\infty \rangle$; $\sim : -1, 0, 1$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.25* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; lichá; $f'_{\pm}(-2) = \mp\infty$, $f'_{\pm}(2) = \pm\infty$ (hr.) ($f(-2) = -f(2) = 2\sqrt[3]{2} \doteq 2.52$); $\nearrow : (-\infty, -2), \langle 2, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -2, 2 \rangle$; $\smile : (-\infty, -2), \langle -2, 0 \rangle$; $\frown : \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, +\infty \rangle$; $\sim : 0$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = f(2)$, $\max = f(-2)$.

7.26. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; lichá; $f(0\pm) = \mp\infty$; $f'(\pm 1) = +\infty$; $\nearrow : \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.27* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : \alpha = 64/27 \doteq 2.370$ ($f(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha$), $f'_{\pm}(0) = \mp\infty$ (hr.); $\nearrow : (-\infty, 0), \langle \alpha, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle 0, \alpha \rangle$; $\smile : (-\infty, 0), \langle 0, +\infty \rangle$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.28* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\nearrow : \mathbb{R}$; $K'' : 1$; $f''(0) = +\infty$, $f''(2) = -\infty$; $\smile : (-\infty, 1)$; $\frown : \langle 1, +\infty \rangle$; $\sim : 1$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.29* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $K' : \pm\beta = \pm\sqrt[4]{64/27} \doteq \pm 1.24$ ($f(\pm\beta) = -\frac{16}{9}\sqrt{3} \doteq -3.08 = \min$); $f'_{\pm}(0) = \mp\infty$ (hr.); $\nearrow : \langle -\beta, 0 \rangle, \langle \beta, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, -\beta), \langle 0, \beta \rangle$; $\smile : (-\infty, 0), \langle 0, +\infty \rangle$; $\sup = +\infty$.

7.30. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $f'_{\pm}(-1) = f'_{\pm}(1) = \mp\infty$, $f'_{\pm}(0) = \pm\infty$ (hr.), $f(\pm 1) = 3$, $f(0) = -3$; $\nearrow : (-\infty, -1), \langle 0, 1 \rangle$; $\searrow : \langle -1, 0 \rangle, \langle 1, +\infty \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = -3$, $\max = 3$.

7.31. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; $f(2\pm) = \pm\infty$; $K' : -2, 6$ ($f(-2) = 3\sqrt[3]{2} \doteq 3.78$, $f(6) = 3\sqrt[3]{18} \doteq 7.86$); $f'(-6) = +\infty$, $f'(0) = -\infty$; $\nearrow : (-\infty, -2), \langle 6, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -2, 2 \rangle, \langle 2, 6 \rangle$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$; $\max f((-\infty, 2)) = f(-2)$, $\min((2, +\infty)) = f(6)$.

7.32. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; sudá; $f(-1\pm) = f(1\pm) = +\infty$; $K' : 0$ ($f(0) = \sqrt[5]{16} \doteq 1.74$); $f'_{\pm}(-2) = f'_{\pm}(2) = \pm\infty$ (hr.); $\text{as}_{\pm\infty} : y = 1$; $\min = f(\pm 2) = 0$, $\sup = +\infty$.

7.33* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : \frac{1}{3} (f(\frac{1}{3}) = 1/\sqrt[3]{3e} \doteq 0.4968)$; $f'(0) = +\infty$; $K'' : x_1 := \frac{1}{3}(1 - \sqrt{3}) \doteq -0.24402$, $x_2 := \frac{1}{3}(1 + \sqrt{3}) \doteq 0.91068$; $\nearrow : (-\infty, \frac{1}{3})$; $\searrow : \langle \frac{1}{3}, +\infty \rangle$; $\smile : \langle x_1, 0 \rangle, \langle x_2, +\infty \rangle$; $\frown : (-\infty, x_1), \langle 0, x_2 \rangle$; $\sim : x_1, 0, x_2$; $\text{as}_{+\infty} : y = 0$; $\inf = -\infty$, $\max = f(\frac{1}{3})$.

7.34. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f'(-1) = 0$, $f'_+(-1) = 4$, $f'_-(1) = 8$, $f'_+(1) = -4$ (hr.), $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$; $\nearrow : \langle -1, 1 \rangle$; $\searrow : (-\infty, -1), \langle 1, +\infty \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = -1$, $\max = 3$.

7.35. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $K' : 0$ ($f(0) = 0$); $f'_-(-1) = f'_+(1) = 0$, $f'_+(-1) = -14$, $f'_-(1) = 14$ (hr.), $f(\pm 1) = 7(1 - e^{-2}) \doteq 6.05$; $\nearrow : (-\infty, -1), \langle 0, 1 \rangle$; $\searrow : \langle -1, 0 \rangle, \langle 1, +\infty \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = 0$, $\max = f(\pm 1)$.

7.36. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; $f(2\pm) = 0$, $f'(2\pm) = 0$; $f'_\pm(0) = \mp 4$ (hr., $f(0) = 8$);
 $\nearrow : (-\infty, 0), (2, +\infty)$; $\searrow : \langle 0, 2 \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 8/e \doteq 2.943$; $\text{inf} = 0$, $\text{max} = f(0)$.

7.37*. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; lichá; $\nearrow : \mathbb{R}$; $K'' : 0$; $\smile : (-\infty, 0)$; $\frown : \langle 0, +\infty \rangle$; $\sim : 0$;
 $\text{as}_{-\infty} : y = -1$, $\text{as}_{+\infty} : y = 1$; $\text{inf} = -1$, $\text{sup} = 1$.

7.38*. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; lichá; $f(0\pm) = \pm\infty$; $\searrow : \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$; $\smile : \mathbb{R}_+$; $\frown : \mathbb{R}_-$;
 $\text{as}_{-\infty} : y = -1$, $\text{as}_{+\infty} : y = 1$; $\text{inf} = -\infty$, $\text{sup} = +\infty$.

7.39*. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f \equiv 1$ v $(-\infty, 0)$, $f(x) = 2e^{-x} - 1$ v $\langle 0, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle 0, +\infty \rangle$;
 $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = -2$ (hr.); $\smile : \langle 0, +\infty \rangle$; $\text{as}_{-\infty} : y = 1$, $\text{as}_{+\infty} : y = -1$; $\text{inf} = -1$,
 $\text{max} = 1$.

7.40*. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f(x) = 2e^x - e$ v $(-\infty, 1)$, $f \equiv e$ v $\langle 1, +\infty \rangle$; $f'_-(1) = 2e$,
 $f'_+(1) = 0$ (hr.); $\nearrow : (-\infty, 1)$; $\smile : (-\infty, 1)$; $\text{as}_{-\infty} : y = -e$, $\text{as}_{+\infty} : y = e$; $\text{inf} = -e$,
 $\text{max} = e$.

7.41*. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $\nearrow : (-\infty, 0)$; $\searrow : \langle 0, +\infty \rangle$; $f'_\pm(0) = \mp 3$ (hr., $f(0) = 3$);
 $\smile : (-\infty, 0)$, $\frown : \langle 0, +\infty \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\text{inf} = 0$, $\text{max} = 3$.

7.42. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; 2π -per.; kořeny f' v $\langle 0, 2\pi \rangle : \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$, příslušné hodnoty
funkce $f : \frac{5}{4}, 1, \frac{5}{4}, -1$; $f(0) = f(2\pi) = 1$; $\nearrow : \langle 0, \frac{1}{6}\pi \rangle, \langle \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi \rangle, \langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi \rangle$ (tedy:
 $\nearrow : \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi \rangle$); $\searrow : \langle \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle, \langle \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$; $\text{min} = -1$, $\text{max} = \frac{5}{4}$.

7.43. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; 2π -per.; kořeny f' v $\langle 0, 2\pi \rangle : 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$, příslušné
hodnoty funkce $f : 1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1, 1$; $\nearrow : \langle \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle, \langle \pi, \frac{5}{4}\pi \rangle, \langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi \rangle$; $\searrow : \langle 0, \frac{1}{4}\pi \rangle, \langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle, \langle \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$; $\text{min} = -1$, $\text{max} = 1$.

7.44. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; 2π -per.; kořeny f' v $\langle 0, 2\pi \rangle : 0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi$, příslušné
hodnoty funkce $f : -1, 1, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1$; $\nearrow : \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle, \langle \pi, \frac{5}{4}\pi \rangle, \langle \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle$;
 $\searrow : \langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle, \langle \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle, \langle \frac{7}{4}\pi, 2\pi \rangle$; $\text{min} = -1$, $\text{max} = 1$. (Poznámka. Větu o diferen-
cování superpozice nelze užít v bodech x , v nichž je $\cos x = 0$, podle V.5.5 však rov-
nost $f'(x) = 3 \sin x \cos x (\sin x + |\cos x|)$ platí i v těchto bodech.)

7.45. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; π -per.; kořeny f' v $\langle 0, \pi \rangle : \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi$; $f'_\pm(0) = f'_\pm(\pi) = \mp 2$,
 $f'_-(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2} - 2$, $f'_+(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2} + 2$, $f'_-(\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2} - 2$, $f'_+(\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2} + 2$ (hr.);
hodnoty funkce f v bodech $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$ jsou $1, \frac{3}{2}, \sqrt{2}, 3, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 1$;
 $\nearrow : \langle 0, \frac{1}{6}\pi \rangle, \langle \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle, \langle \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi \rangle$; $\searrow : \langle \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi \rangle, \langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle, \langle \frac{5}{6}\pi, \pi \rangle$; $\text{min} = 1$, $\text{max} = 3$.

7.46. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; π -per.; (jediný) kořen f' v $\langle 0, \pi \rangle : \frac{1}{6}\pi$; $f'_-(\frac{1}{2}\pi) = -4$, $f'_+(\frac{1}{2}\pi) =$
 0 (hr.); $f'(0) = f'(\pi) = 2$; hodnoty funkce f v bodech $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi$ jsou $2,$
 $\frac{3}{2}\sqrt{3} \doteq 2.598, 0, 2$; maximální intervaly monotonie v $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle : \nearrow : \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi \rangle$;
 $\searrow : \langle \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$; $\text{min} = 0$, $\text{max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

7.47*. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; π -per.; kořeny f' v $\langle 0, \pi \rangle : 0, \frac{1}{2}\pi, \pi$, příslušné hodnoty
funkce $f : 0, 3, 0$; $\nearrow : \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$; $\searrow : \langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle$; $\smile : \langle -b, b \rangle$, $\frown : \langle b, \pi - b \rangle$, kde
 $b := \arctg \sqrt{2} \doteq 0.9553$; $\sim : \pm b$; $\text{min} = 0$, $\text{max} = 3$. (Poznámka. Větu o dife-
rencování superpozice nelze užít v bodech $x \equiv 0 \pmod{\pi}$, podle V.5.5 však rovnosti
 $f'(x) = 9 \sin x |\sin x| \cos x$, $f''(x) = 9 |\sin x| (2 \cos^2 x - \sin^2 x)$ platí i v nich.)

7.48. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; 2π -per.; kořeny f' v $\langle 0, 2\pi \rangle$: $\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$; $f'_{\pm}(0) (= f'_{\pm}(2\pi)) = \pm 2$, $f'_{\pm}(\pi) = \mp 2$ (hr.); hodnoty funkce f ve výjimečných bodech $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi, 2\pi$ jsou $0, \gamma, 0, -\gamma, 0, -\gamma, 0, \gamma, 0$, kde $\gamma := \frac{3}{8}\sqrt{3} \doteq 0.6495$; $\nearrow : \langle 0, \frac{1}{6}\pi \rangle, \langle \frac{5}{6}\pi, \pi \rangle, \langle \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \rangle$; $\searrow : \langle \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \rangle, \langle \pi, \frac{7}{6}\pi \rangle, \langle \frac{11}{6}\pi, 2\pi \rangle$; $\min = -\gamma, \max = \gamma$.

7.49* $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty \rangle$ (v \mathbb{R}_+ je $f(x) = \exp(x \lg x)$, $f(0) = 0^0 = 1 = f(0+)$); $K' : 1/e$ ($f(1/e) = (1/e)^{1/e} \doteq 0.692201$); $f'_{+}(0) = f'(0+) = -\infty$; $\nearrow : \langle 1/e, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle 0, 1/e \rangle$; $\smile : \langle 0, +\infty \rangle$; $\min = f(1/e)$, $\sup = +\infty$.

7.50. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $K' : e$ ($f(e) = e^{1/e} \doteq 1.44467$); $f(x) \rightarrow 0$, $f'(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow 0+$; $\nearrow : (0, e)$; $\searrow : \langle e, +\infty \rangle$; $\text{as}_{+\infty} : y = 1$; $\inf = 0$, $\max = f(e)$.¹²⁾

7.51. $\mathcal{D}(f) = (-1, +\infty)$; $f(-1+) = f(+\infty-) = +\infty$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, protože $f'(x) = f(x)\varphi(x)$, kde $\varphi(x) := x/(x+1) + \lg(1+x)$ v $\mathcal{D}(f)$ roste a splňuje podmínku $\varphi(0) = 0$; $\nearrow : \langle 0, +\infty \rangle$; $\searrow : (-1, 0)$; $\min = \frac{1}{3}$, $\sup = +\infty$.

7.52. $\mathcal{D}(f) = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$; $f(0\pm) = e$; je $f' < 0$ v $\mathcal{D}(f)$, protože $f'(x) = x^{-2}f(x)\psi(x)$, kde $\psi(x) := x/(1+x) - \lg(1+x)$ v $(-1, +\infty)$, $\psi'(x) = -x/(1+x)^2$, $\psi(0) = 0$, takže $\psi < 0$ v $\mathcal{D}(f)$; $\searrow : (-1, 0), \mathbb{R}_+$; $\text{as}_{+\infty} : y = 1$; $\sup f((-1, 0)) = +\infty$, $\inf f((-1, 0)) = \sup f(\mathbb{R}_+) = e$, $\inf f(\mathbb{R}_+) = 1$. (Poznámka. Položíme-li $f(0) := e$, bude f spojitá, klesající a ryze konvexní v $(-1, +\infty)$, $f'(0) = f'(0\pm) = -2/e$.)

7.53* $\mathcal{D}(f) = (0, 1)$; graf f je symetrický vzhledem k přímce $x = \frac{1}{2}$, $f(0+) = f(1-) = 0$; $K' : \frac{1}{2}$ ($f(\frac{1}{2}) = \lg^2(\frac{1}{2}) \doteq 0.480453$); $f'(0+) = +\infty$, $f'(1-) = -\infty$; $\nearrow : (0, \frac{1}{2})$; $\searrow : \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$; $\smile : (0, 1)$; $\inf = 0$, $\max = f(\frac{1}{2})$.

7.54* $\mathcal{D}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$; $f(0+) = f(+\infty-) = +\infty$, $f(1\pm) = -\infty$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 1/e) \vee (x = e)$; $\nearrow : (1, +\infty)$; $\searrow : (0, 1)$; $\smile : \langle 0, 1/e \rangle$; $\smile : \langle 1/e, 1 \rangle$, $(1, +\infty)$; $\sim : 1/e$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.55. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f(0+) = 0$, $f(+\infty-) = +\infty$; $K' : x_a := e^{-1/a}$ ($f(x_a) = -1/ae$); $\nearrow : \langle x_a, +\infty \rangle$; $\searrow : (0, x_a)$; $\min = f(x_a)$, $\sup = +\infty$. (Na obrázku jsou části grafů funkcí odpovídajících hodnotám $a = \frac{1}{2}k$, kde $1 \leq k \leq 5$.)

7.56* $\mathcal{D}(f) = (0, 2)$; graf f je symetrický vzhledem k přímce $x = 1$, $f(0+) = f(2-) = -\infty$; $f'_{\pm}(1) = \mp \frac{1}{2}$ (hr., $f(1) = 0$); $\nearrow : (0, 1)$; $\searrow : \langle 1, 2 \rangle$; $\smile : (0, 2)$; $\inf = -\infty$, $\max = 0$.¹³⁾

7.57. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; graf f je symetrický vzhledem k přímce $x = \frac{1}{2}$; $K' : \frac{1}{2}$ ($f(\frac{1}{2}) = \lg \frac{5}{4} \doteq 0.223$), $f'_{\pm}(0) = f'_{\pm}(1) = \pm 1$ (hr., $f(0) = f(1) = 0$); $\nearrow : \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, $\langle 1, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, 0)$, $\langle \frac{1}{2}, 1 \rangle$; $\min = 0$, $\sup = +\infty$.

7.58. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f(0+) = -\infty (= \inf)$, $f(+\infty-) = +\infty (= \sup)$, jediný kořen $f : \exp \sqrt[3]{2} \doteq 3.52514$; $K' : 1/e, 1$ ($f(1/e) = -\frac{3}{2}$, $f(1) = -2$); $\nearrow : (0, 1/e)$, $\langle 1, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle 1/e, 1 \rangle$.

¹²⁾ Řešení bychom mohli doplnit ještě takto: Derivace f'' má v \mathbb{R}_+ právě dva kořeny $\alpha < \beta$; numerickým řešením transcendentní rovnice $\lg^2 x + 2(x-1)\lg x = 3x-1$ lze získat jejich přibližné hodnoty: $\alpha \doteq 0.5819327056$, $\beta \doteq 4.3677709671$. Je $\smile : (0, \alpha)$, $\langle \beta, +\infty \rangle$, $\smile : \langle \alpha, \beta \rangle$; $\sim : \alpha, \beta$.

¹³⁾ V Dodatku k Př. 7.3 je vyloženo, jak lze někdy dokázat ryzí konkávnost (a podobně konvexnost), není-li možné užít přímo V. 7.6.

- 7.59*** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\nearrow : \mathbb{R}$; $\smile : \mathbb{R}$; $\text{as}_{-\infty} : y = 0$, $\text{as}_{+\infty} : y = x$; $\text{inf} = 0$, $\text{sup} = +\infty$.
- 7.60.** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f(-\infty+) = \lg 10 \doteq 2.30259$, $f(+\infty-) = +\infty$; $K' : 0$ ($f(0) = \lg 7 \doteq 1.94591$), $f'(-\infty+) = 0$, $f'(+\infty-) = 1$; $\nearrow : \langle 0, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, 0)$; $\text{as}_{-\infty} : y = \lg 10$, $\text{as}_{+\infty} : y = x + \lg 3$ ($\lg 3 \doteq 1.0986$); $\text{min} = f(0)$, $\text{sup} = +\infty$.
- 7.61*** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f(0+) = -\frac{1}{2}\pi$, $f'(0+) = +\infty$, $f(+\infty-) = \frac{1}{2}\pi$; $\nearrow : \mathbb{R}_+$; $\smile : \mathbb{R}_+$; $\text{as}_{+\infty} : y = \frac{1}{2}\pi$; $\text{inf} = -\frac{1}{2}\pi$, $\text{sup} = \frac{1}{2}\pi$.
- 7.62*** $\mathcal{D}(f) = (-1, 1)$; sudá; $f(\pm 1\mp) = \frac{1}{2}\pi$; $f'(\pm 1\mp) = \pm\infty$, $f'_{\pm}(0) = \pm 1$ (hr., $f(0) = 0$); $\nearrow : \langle 0, 1 \rangle$; $\searrow : (-1, 0)$; $\smile : (-1, 1)$; $\text{min} = 0$, $\text{sup} = \frac{1}{2}\pi$.¹³)
- 7.63*** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; sudá; $f(0\pm) = \pi$; $f'(0\pm) = 0$; $\nearrow : \mathbb{R}_-$; $\searrow : \mathbb{R}_+$; $\smile : (-\infty, -a)$, $\langle a, +\infty \rangle$, kde $a := 1/\sqrt[4]{3} \doteq 0.759836$; $\smile : \langle -a, 0 \rangle$, $(0, a)$; $\sim : \pm a$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\text{inf} = 0$, $\text{sup} = \pi$. (Poznámka. Kdybychom definovali $f(0) := 0$, bylo by $f'(0) = 0$, f by v bodě 0 měla maximum a byla by ryze konkávní v $\langle -a, a \rangle$.)
- 7.64*** $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle$; $f'_+(-1) = +\infty$, $f'_-(1) = 0$; $\nearrow : \langle -1, 1 \rangle$; $\smile : \langle -1, 1 \rangle$; $\text{min} = -\frac{1}{2}\pi$, $\text{max} = \frac{1}{2}\pi$. (Poznámka. $f(x)$ má jediný kořen, jehož přibližná hodnota je -0.67361203 .)
- 7.65*** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f(-\infty+) = -\infty$, $f(+\infty-) = 1$; $f'(+\infty-) = 0$, $f'' < 0$, takže $f' > 0$ v \mathbb{R} ; $\nearrow : \mathbb{R}$; $\smile : \mathbb{R}$; $\text{as}_{-\infty} : y = \pi x + 1$, $\text{as}_{+\infty} : y = 1$; $\text{inf} = -\infty$, $\text{sup} = 1$.
- 7.66*** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; $f(0\pm) = 0$, $f'(0-) = \pi$, $f'(0+) = 0$ (kdybychom tedy položili $f(0) := 0$, měl by graf v bodě 0 hrot); $\nearrow : \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$; $\smile : \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{2}\pi x - 1$; $\text{inf} = -\infty$, $\text{sup} = +\infty$.
- 7.67*** $\mathcal{D}(f) = \langle a, b \rangle$, kde $a := \exp(-\sqrt{2}) \doteq 0.243$, $b = \exp\sqrt{2} \doteq 4.113$; $f'_{\pm}(1) = \pm 1/\sqrt{2}$ (hr., $f(1) = 0$); $f'_+(a) = -\infty$, $f'_-(b) = +\infty$; $\nearrow : \langle 1, b \rangle$; $\searrow : \langle a, 1 \rangle$; $\smile : \langle a, 1 \rangle$, $\langle e, b \rangle$; $\smile : \langle 1, e \rangle$; $\sim : e$; $\text{min} = 0$, $\text{max} = f(a) = f(b) = \frac{1}{2}\pi$.
- 7.68*** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; graf je symetrický vzhledem k přímce $x = -2$; $f'_{\pm}(-2) = \mp 5$ (hr., $f(-2) = \frac{5}{2}\pi$); $\nearrow : (-\infty, -2)$; $\searrow : \langle -2, +\infty \rangle$; $\smile : (-\infty, -2)$, $\langle -2, +\infty \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\text{inf} = 0$, $\text{max} = \frac{5}{2}\pi$.
- 7.69*** $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty \rangle$; $f(0) = \pi$, $f(+\infty-) = 0$; $f'(0+) = -\infty$, $f'(+\infty-) = 0$; $\searrow : \langle 0, +\infty \rangle$; $\smile : \langle 0, +\infty \rangle$; $\text{as}_{+\infty} : y = 0$; $\text{inf} = 0$, $\text{max} = \pi$.
- 7.70.** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; 2π -per.; kořeny f' v $\langle 0, 2\pi \rangle$: $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$ ($f(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi - 2c \doteq 0.339837$, $f(\frac{5}{4}\pi) = \frac{1}{2}\pi + 2c \doteq 2.801756$, kde $c := \arctg(\frac{1}{2}\sqrt{2}) \doteq 0.6154797$); $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \nearrow : \langle \frac{1}{4}\pi + 2k\pi, \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \rangle$; $\searrow : \langle -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{1}{4}\pi + 2k\pi \rangle$; $\text{min} = f(\frac{1}{4}\pi)$, $\text{max} = f(\frac{5}{4}\pi)$.
- 7.71.** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $K' : 0$; $f'_{\pm}(-1) = f'_{\pm}(1) = \mp\infty$ (hr., $f(\pm 1) = \pi$); $\nearrow : (-\infty, -1)$, $\langle 0, 1 \rangle$; $\searrow : \langle -1, 0 \rangle$, $\langle 1, +\infty \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = -\pi$; $\text{inf} = -\pi$, $\text{max} = \pi$.
- 7.72*** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f(0+) = 0$, $f(+\infty-) = 0$; $f'(0+) = -\infty$, $f'(+\infty-) = 0$; $f'_{\pm}(1/e) = \pm e$, $f'_{\pm}(e) = \mp 1/e$ (hr., $f(1/e) = -\frac{1}{2}\pi = \text{min}$, $f(e) = \frac{1}{2}\pi = \text{max}$); $\nearrow : \langle 1/e, e \rangle$; $\searrow : (0, 1/e)$, $\langle e, +\infty \rangle$; $\smile : (0, 1/e)$, $\langle e, +\infty \rangle$; $\smile : \langle 1/e, e \rangle$; $\text{as}_{+\infty} : y = 0$.
- 7.73.** $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : x_0 := 0$, $x_{\pm n} := \pm \sqrt[10]{\exp(|n|\pi) - 1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ ($x_1 \doteq 1.363$, $x_2 \doteq 1.874$, $x_3 \doteq 2.566$, $x_4 \doteq 3.514$, $x_5 \doteq 4.810$, $x_6 \doteq 6.586$, $x_7 \doteq 9.107$, $x_8 \doteq 12.345$, $x_9 \doteq 16.902$, $x_{10} \doteq 23.141$, $x_{20} \doteq 535.492$, $x_{30} \doteq 12391.6$).

$x_{40} \doteq 286751$, $x_{50} \doteq 6.6356 \cdot 10^6$, \dots , $x_n \rightarrow +\infty$ pro $n \rightarrow \infty$, $f(x_n) = (-1)^n$;
 $\nearrow : \langle x_{2n-1}, x_{2n} \rangle$; $\searrow : \langle x_{2n}, x_{2n+1} \rangle$; $\min = -1$, $\max = 1$.

7.74. $\mathcal{D}(f) = (0, 1/a) \cup \langle a, +\infty \rangle$, kde $a := \sqrt[3]{e} \doteq 1.3956$, $1/a \doteq 0.7165$; $f(0+) = \frac{1}{2}\pi$, $f(1/a) = \pi = \max$, $f(a) = 0 = \min$, $f(+\infty-) = \frac{1}{2}\pi$; $f'(0+) = f'_-(1/a) = f'_+(a) = +\infty$; $\nearrow : (0, 1/a)$, $\langle a, +\infty \rangle$; $\text{as}_{+\infty} : y = \frac{1}{2}\pi$.

7.75* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $|x| \geq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\pi = \max$; $0 < |x| < 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \operatorname{sgn} x / \sqrt{1-x^2}$; $f'_-(-1) = f'_+(1) = 0$, $f'_+(-1) = -\infty$, $f'_-(1) = +\infty$, $f'_\pm(0) = \pm 2$ (hr.); $\nearrow : \langle 0, 1 \rangle$; $\searrow : \langle -1, 0 \rangle$; $\smile : \langle -1, 1 \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{2}\pi$; $\min = f(0) = -\frac{1}{2}\pi$.¹³⁾

7.76* $\mathcal{D}(f) = \langle -2, 2 \rangle$; $K' : 0$ ($f(0) = \pi = \max$), $f'_+(-2) = +\infty$, $f'_-(2) = -1$;
 $\nearrow : \langle -2, 0 \rangle$; $\searrow : \langle 0, 2 \rangle$; $\frown : \langle -2, 2 \rangle$ (Návod: $f''(x) = g(x)(4-x^2)^{-3/2}$, kde $g(x) := x\sqrt{4-x^2} - 4 \arccos \frac{1}{2}x$ roste v $\langle -2, 2 \rangle$, protože $g'(x) = 2\sqrt{4-x^2} > 0$ v $\langle -2, 2 \rangle$; protože $g(2) = 0$, je $g < 0$ a $f'' < 0$ v $\langle -2, 2 \rangle$); $\min = f(-2) = -2$.

7.77* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; $f(\pm 1-) = \pi$, $f(\pm 1+) = 0$, $f(\pm\infty\mp) = \frac{1}{2}\pi$; f' je sudá, $f'(-1\pm) = f'(1\pm) = 2$; $\nearrow : (-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$; $\smile : (-\infty, -1)$, $(-1, -a)$, $\langle 0, a \rangle$; $\frown : \langle -a, 0 \rangle$, $\langle a, 1 \rangle$, $(1, +\infty)$, kde $a := (\sqrt{3} - 1)^{1/2} \doteq 0.8556$; $\sim : \pm a, 0$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{2}\pi$; $\inf = 0$, $\sup = \pi$.¹⁴⁾

7.78. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; sudá; $f(-1\pm) = f(1\pm) = \pi$, $f(\pm\infty\mp) = 0$; $f'_\pm(0) = \pm 2$ (hr.), $f'(\pm 1-) = 4$, $f'(\pm 1+) = -4$; $\nearrow : (-\infty, -1)$, $\langle 0, 1 \rangle$; $\searrow : (-1, 0)$, $(1, +\infty)$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = 0$, $\sup = \pi$.

7.79* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $f'_\pm(0) = \pm 2$ (hr., $f(0) = 0$); $\nearrow : \langle 0, +\infty \rangle$; $\searrow : (-\infty, 0)$; $\frown : (-\infty, 0)$, $\langle 0, +\infty \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \pi$; $\min = 0$, $\sup = \pi$. ($f(x) = 2 |\arctg x|$.)

7.80. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : -1, 0, 1$ ($f(-1) = \frac{2}{3}\pi - 1$, $f(0) = \frac{1}{2}\pi - 1$, $f(1) = \frac{1}{3}\pi - 1$);
 $\nearrow : (-\infty, -1)$, $\langle 1, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -1, 1 \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{2}\pi - 1$; $\min = f(1)$, $\max = f(-1)$.

7.81. $\mathcal{D}(f) = (-1, 1)$; $f(-1+) = +\infty$, $f(0) = \frac{1}{2}\pi$, $f(1-) = 1$; $|x| < 1 \Rightarrow f'(x) = \varphi(x)(1-x^2)^{-3/2}$, kde $\varphi(x) := x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ v $\langle -1, 1 \rangle$, $\varphi'(x) = \arccos x > 0$ v $\langle -1, 1 \rangle$, $\varphi(1) = 0$, takže $\varphi(x) < 0$ a $f'(x) < 0$ v $\langle -1, 1 \rangle$; např. substitucí $x = \cos y$ zjistíme, že $f'(1-) = -\frac{1}{3}$; $\searrow : (-1, 1)$; $\inf = 0$, $\sup = +\infty$.

7.82. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; π -per., lichá; lineární se směrnici $+2$ resp. -2 v každém intervalu $\langle a_{2k-1}, a_{2k} \rangle$ resp. $\langle a_{2k}, a_{2k+1} \rangle$, kde $a_k := \frac{1}{4}(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; všechny body a_k jsou hroty grafu; $f(a_{2k-1}) = -\frac{1}{2}\pi = \min$, $f(a_{2k}) = \frac{1}{2}\pi = \max$.

7.83* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; π -per., sudá; $K' : k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f(k\pi) = \frac{1}{2}\pi = \max$; body $b_k := \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ jsou hroty, $f'_\pm(b_k) = \pm\sqrt{2}$, $f(b_k) = 0 = \min$; $\nearrow : \langle b_{k-1}, k\pi \rangle$; $\searrow : \langle k\pi, b_k \rangle$; $\frown : \langle b_k, b_{k+1} \rangle$.

¹⁴⁾ Sr. s podobným Příkladem 7.5. Někteří studenti derivují bohužel formálně, tj. bez ověření příslušných předpokladů, a z toho, kde takto získaný výsledek má smysl, teprve dodatečně usuzují, kde platí. (Nejnámějším příkladem této zvrácené logiky je rovnost $(\lg(\lg(\sin x)))' = \cotg x / \lg(\sin x)$, kterou lze získat i na počítači a jejíž pravá strana má smysl ve sjednocení intervalů $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, levá strana nikde.) Podle této pseudometody by zde bylo $f'(x) = (x^2+1)/(x^4-x^2+1)$ všude v \mathbb{R} , tedy i v bodech ± 1 , kde f nejen není definována, ale kde ji ani nelze spojitě dodefinovat. Hlubavému čtenáři doporučujeme zamyslet se nad vztahem $f(x)$ k funkci $g(x) := \arctg(2x + \sqrt{3}) + \arctg(2x - \sqrt{3})$, jejíž derivace je rovna $(x^2+1)/(x^4-x^2+1)$ opravdu v celém \mathbb{R} .

7.84. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; π -per., sudá; $K' : c_k := \frac{1}{2}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($f(c_{2k}) = \frac{1}{2}\pi = \max$, $f(c_{2k+1}) = 0 = \min$); na rozdíl od PŘ.7.83 nemá graf hrotky, v bodech $k\pi$ však nelze užít větu o diferencování superpozice; $\nearrow : \langle c_{2k-1}, c_{2k} \rangle$; $\searrow : \langle c_{2k}, c_{2k+1} \rangle$. (Je $f(x) = 2(x - c_{2k+1})^2 + o((x - c_{2k+1})^2)$ pro $x \rightarrow c_{2k+1}$.)

7.85. Jako v PŘ.7.84, ale graf f se nyní v bodech c_{2k+1} „více přimyká“ k ose x . (Je $f(x) = 4(x - c_{2k+1})^4 + o((x - c_{2k+1})^4)$ pro $x \rightarrow c_{2k+1}$.)

7.86. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $f(\pm\infty\mp) = \frac{1}{2}\pi$; $K' : 0$ ($f(0) = -\frac{1}{4}\pi$), $f'(\pm 1) = \pm\infty$; $\nearrow : \langle 0, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -\infty, 0 \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{2}\pi$; $\min = -\frac{1}{4}\pi$, $\sup = \frac{1}{2}\pi$.

7.87. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; lichá; $f(\pm\infty\mp) = 0$; $K' : \pm 1$ ($f(\pm 1) = \pm 1$); $\nearrow : \langle -1, 1 \rangle$; $\searrow : \langle -\infty, -1 \rangle$, $\langle 1, +\infty \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = -1$, $\max = 1$.

7.88* $\mathcal{D}(f) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$; sudá; $f'_{\pm}(0) = \pm\sqrt{2}$ (hr., $f(0) = 0$), $f'_{+}(-\sqrt{2}) = -\infty$, $f'_{-}(\sqrt{2}) = +\infty$; $\nearrow : \langle 0, \sqrt{2} \rangle$; $\searrow : \langle -\sqrt{2}, 0 \rangle$; $\smile : \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$; $\min = 0$, $\max = f(\pm\sqrt{2}) = \pi$.¹³⁾

7.89* $\mathcal{D}(f) = \langle -a, a \rangle$, kde $a := \sqrt[4]{2} \doteq 1.1892$; sudá; $K' : 0$, větu o diferencování superpozice nelze v bodě 0 užít, na rozdíl od PŘ.7.88 tam graf nemá hrot; $f'_{+}(-a) = -\infty$, $f'_{-}(a) = +\infty$; $\nearrow : \langle 0, a \rangle$; $\searrow : \langle -a, 0 \rangle$; $\smile : \langle -a, a \rangle$; $\min = 0$, $\max = \pi$.

7.90. $\mathcal{D}(f) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$; sudá; $K' : \pm 1$ ($f(\pm 1) = \frac{1}{2}\pi = \max$); $f'_{\pm}(0) = \pm 2$ (hr., $f(0) = 0 = \min$); $f'_{+}(-\sqrt{2}) = +\infty$, $f'_{-}(\sqrt{2}) = -\infty$ ($f(\pm\sqrt{2}) = 0 = \min$); $\nearrow : \langle -\sqrt{2}, -1 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$; $\searrow : \langle -1, 0 \rangle$, $\langle 1, \sqrt{2} \rangle$.

7.91* $\mathcal{D}(f) = \langle 0, 2 \rangle$; graf f je symetrický vzhledem k přímce $x = 1$, $f(0) = f(2) = 0 = \min$; $K' : 1$ ($f(1) = \frac{1}{2}\pi = \max$); $f'_{+}(0) = +\infty$, $f'_{-}(2) = -\infty$; $\nearrow : \langle 0, 1 \rangle$; $\searrow : \langle 1, 2 \rangle$; $\smile : \langle 0, 2 \rangle$. (Je $f(x) = \frac{1}{2}\pi - (x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$ pro $x \rightarrow 1$.)

7.92* Jako v PŘ.7.91, graf f se však nyní „více přimyká“ k tečně v bodě 1. (Je $f(x) = \frac{1}{2}\pi - (x - 1)^4 + o((x - 1)^4)$ pro $x \rightarrow 1$.)

7.93* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; f není spojitá v bodě 0, $f(0-) = \frac{1}{2}\pi$, $f(0+) = -\frac{1}{2}\pi$, $f'(0) = -\infty$, ale $f'(0\pm) = 1$; $f(\pm\infty\mp) = \frac{1}{4}\pi$; $\nearrow : \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$; $\smile : \mathbb{R}_-, (0, \frac{1}{2})$; $\smile : \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$; $\sim : \frac{1}{2}$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{4}\pi$; $\inf = -\frac{1}{2}\pi$, $\sup = \frac{1}{2}\pi$.

7.94* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ($f(0) = 0$); sudá; $f(\pm\infty\mp) = 1$; $K' : 0$; $\nearrow : \langle 0, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -\infty, 0 \rangle$; $\smile : \langle -\alpha, \alpha \rangle$, kde $\alpha := \sqrt{2/3} \doteq 0.8165$; $\smile : \langle -\infty, -\alpha \rangle$, $\langle \alpha, +\infty \rangle$; $\sim : \pm\alpha$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = 1$; $\min = 0$, $\sup = 1$. (Poznámka. Je $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(0\pm) = 0$ pro všechna $k \geq 0$, takže se graf f přimyká k ose x lépe než graf kterékoli mocniny x^k ; všechny Taylorovy polynomy funkce f o středu 0 jsou (identicky) nulové.)

7.95. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ($f(0) = 0$); $f^{(k)}(0)$ jako v PŘ.7.94, nyní však $K' : 0$, 2 ($f(2) = -4e^{-1/4} \doteq -3.1152$); $\nearrow : \langle -\infty, 0 \rangle$, $\langle 2, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle 0, 2 \rangle$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = x - 6$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.96* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ($f(0) = 0$); sudá; $f(\pm\infty\mp) = +\infty$; $K' : 0$, $\pm\alpha$, kde $\alpha := e^{-1/2} \doteq 0.6065$ ($f(\pm\alpha) = -1/2e \doteq -0.1839$); $\nearrow : \langle -\alpha, 0 \rangle$, $\langle \alpha, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -\infty, -\alpha \rangle$, $\langle 0, \alpha \rangle$; $\smile : \langle -\infty, -\beta \rangle$, $\langle \beta, +\infty \rangle$, kde $\beta := e^{-3/2} \doteq 0.2231$; $\smile : \langle -\beta, \beta \rangle$; $\sim : \pm\beta$; $\min = -1/2e$, $\sup = +\infty$.

7.97* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ($f(0) = 0$); sudá; $f(\pm\infty\mp) = +\infty$; $K' : 0, \pm\gamma$, kde $\gamma := e^{3/2} \doteq 4.4817$; $\nearrow : \langle -\gamma, 0 \rangle, \langle \gamma, +\infty \rangle$; $\searrow : \langle -\infty, -\gamma \rangle, \langle 0, \gamma \rangle$; $K'' : \pm\delta$, kde $\delta := \sqrt{e} \doteq 1.6487$; $\smile : \langle -\infty, -\delta \rangle, \langle \delta, +\infty \rangle$; $\frown : \langle \delta, \delta \rangle$; $\sim : \pm\delta$; $\min = f(\pm\gamma) = -e^3 \doteq -20.0855$, $\sup = +\infty$. (Poznámka. $f''(0) = -\infty$.)

7.98. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ($f(0) = 1$); sudá; $f(\pm\infty\mp) = 0$; $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = g(x)/x^2$, kde $g(x) := x/(x^2 + 1) - \arctg x = (x - x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ pro $x \rightarrow 0$, takže $f'(x) = -\frac{2}{3}x + o(x)$ a $f'(0) = f'(0\pm) = 0$; protože $g(0) = 0$ a $g'(x) < 0$ pro všechna $x \neq 0$, je $g > 0$ v \mathbb{R}_- , $g < 0$ v \mathbb{R}_+ , tedy i $f' > 0$ v \mathbb{R}_- , $f' < 0$ v \mathbb{R}_+ ; $\nearrow : \langle -\infty, 0 \rangle$; $\searrow : \langle 0, +\infty \rangle$; $\inf = 0$, $\max = 1$.

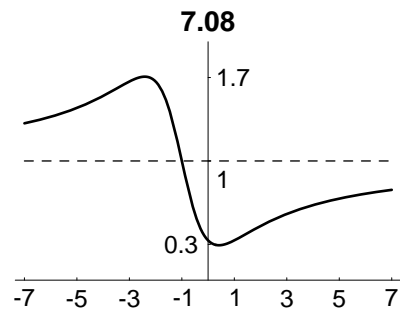
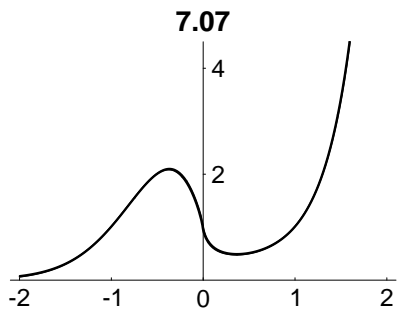
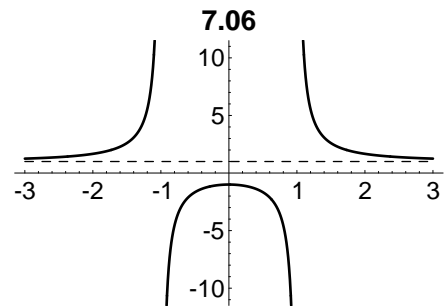
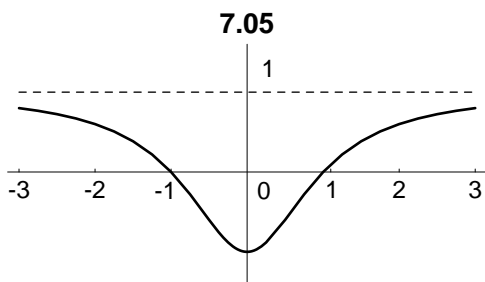
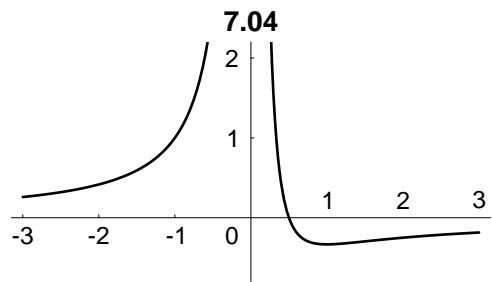
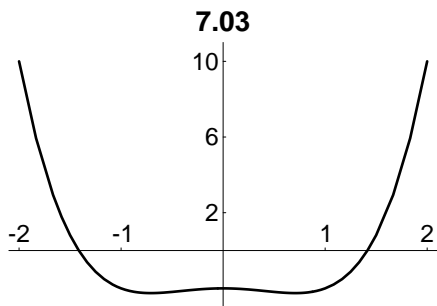
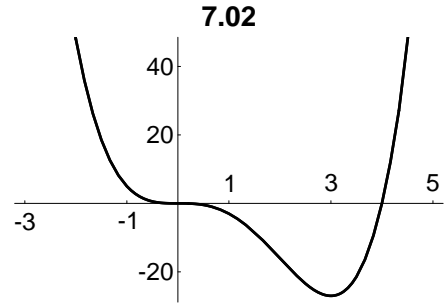
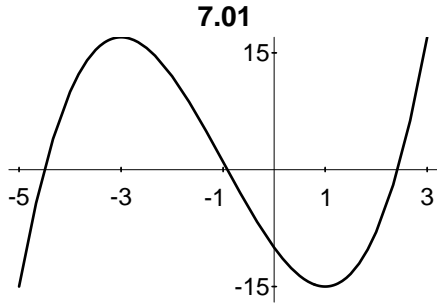
7.99. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ($f(0) = 1$); sudá; $f(\pm\infty\mp) = 0$; $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \varphi(x)/x^2 \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow 0$, protože $\varphi(x) := (x \cos x - \sin x) = o(x^2)$; odtud: $f'(0) = f'(0\pm) = 0$; protože φ v $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ klesá, nemá tam f' žádný další kořen. Kořenem f' není ani žádný lichý násobek čísla $\frac{1}{2}\pi$.

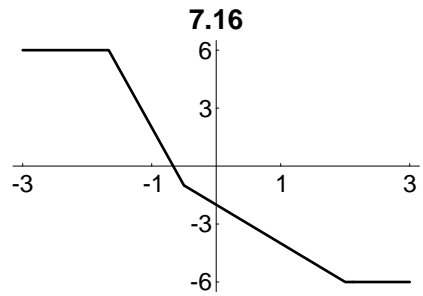
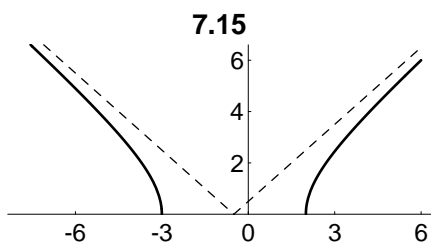
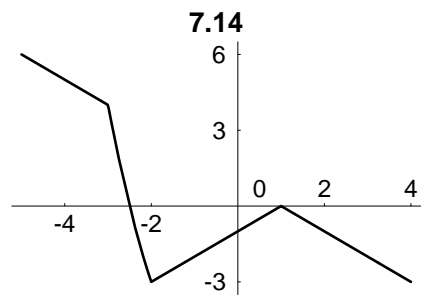
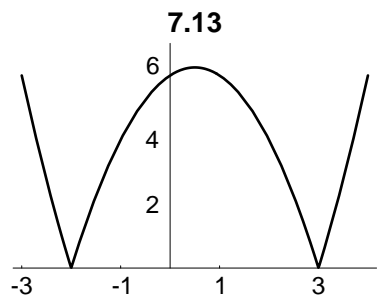
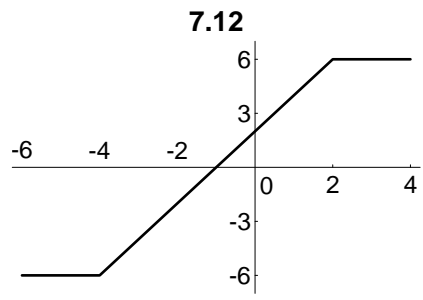
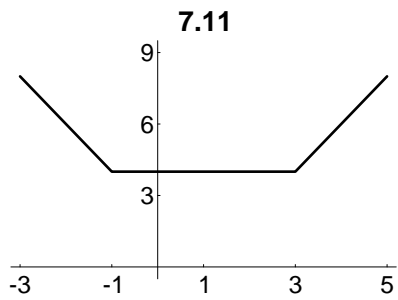
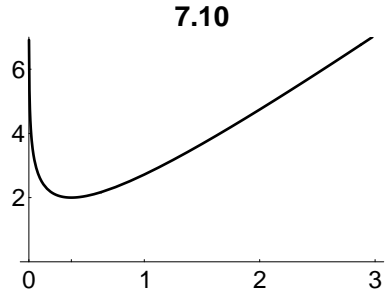
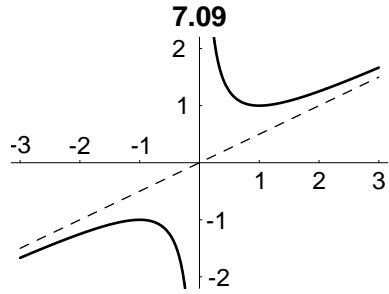
Položíme-li $I_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $\psi(x) := x - \operatorname{tg} x$ pro každé $x \not\equiv \frac{1}{2}\pi \pmod{\pi}$, je $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \psi(x) = 0$. Protože ψ je spojitá a klesá v každém I_k , přičemž $\psi(\frac{1}{2}(2k-1)\pi+) = +\infty$, $\psi(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) = -\infty$, má ψ v každém I_k právě jeden kořen – označme jej x_k ; totéž platí o f' . Protože $\psi(k\pi) = k\pi > 0$, je $x_k \in (k\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$. Přibližné hodnoty čísel x_k lze získat numerickým řešením (transcendentní) rovnice $x = \operatorname{tg}(x)$; dostaneme:

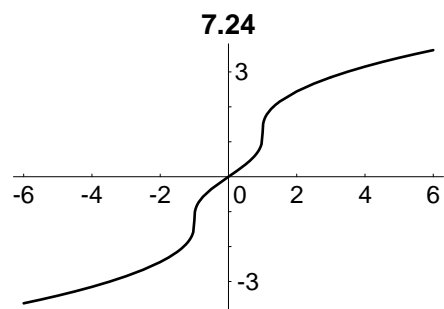
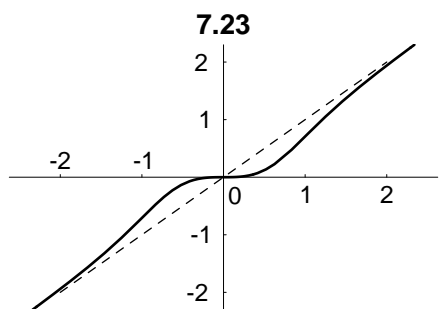
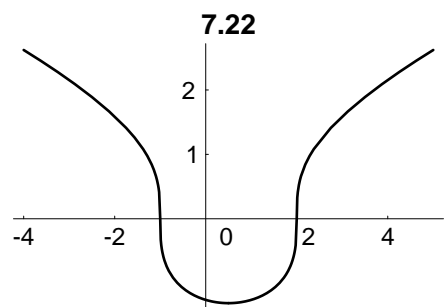
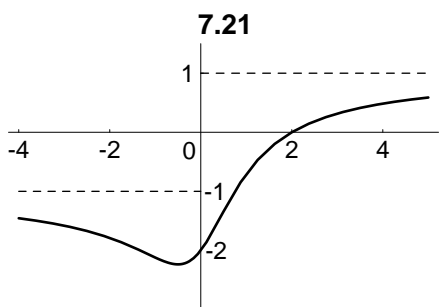
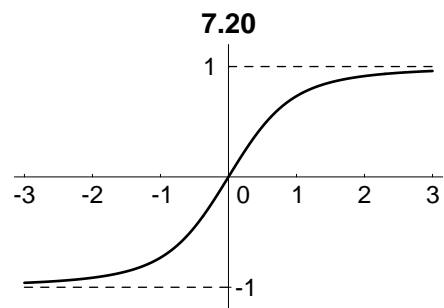
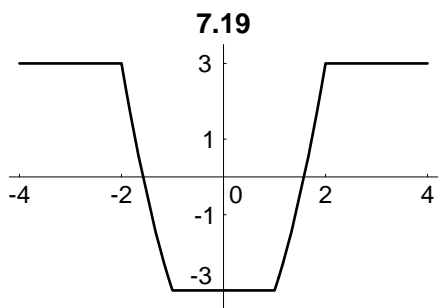
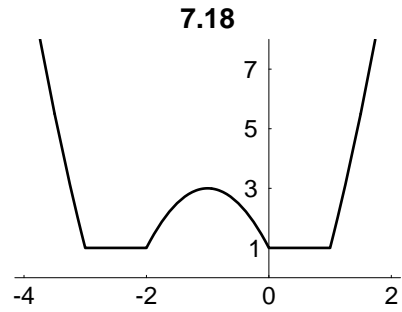
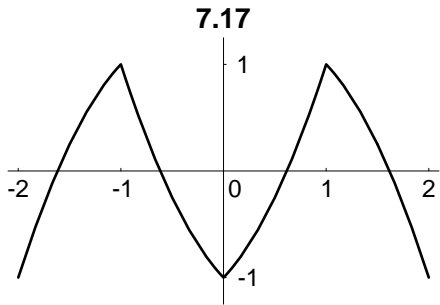
$$\begin{array}{ll} x_1 \doteq \frac{3}{2}\pi - 0.21898 \doteq 4.49341, & f(x_1) \doteq -0.21723 \\ x_2 \doteq \frac{5}{2}\pi - 0.12873 \doteq 7.72525, & f(x_2) \doteq 0.12837 \\ x_3 \doteq \frac{7}{2}\pi - 0.09145 \doteq 10.90412, & f(x_3) \doteq -0.09133 \\ x_4 \doteq \frac{9}{2}\pi - 0.07097 \doteq 14.06619, & f(x_4) \doteq 0.07091 \\ x_5 \doteq \frac{11}{2}\pi - 0.05800 \doteq 17.22076, & f(x_5) \doteq -0.05797 \\ x_6 \doteq \frac{13}{2}\pi - 0.04905 \doteq 20.37130, & f(x_6) \doteq 0.04903 \\ x_7 \doteq \frac{15}{2}\pi - 0.04249 \doteq 23.51945, & f(x_7) \doteq -0.04248 \\ x_8 \doteq \frac{17}{2}\pi - 0.03748 \doteq 26.66605, & f(x_8) \doteq 0.03747 \\ x_9 \doteq \frac{19}{2}\pi - 0.03353 \doteq 29.81160, & f(x_9) \doteq -0.03353 \\ x_{10} \doteq \frac{21}{2}\pi - 0.03033 \doteq 32.95639, & f(x_{10}) \doteq 0.03033 \end{array}$$

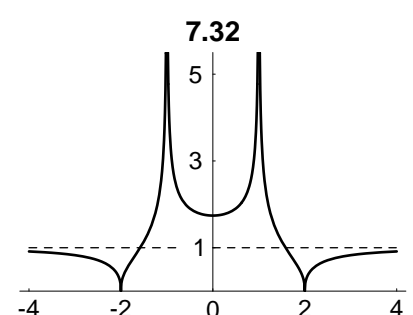
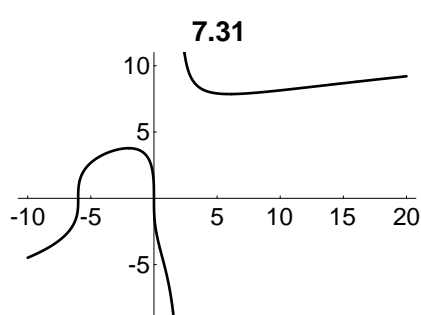
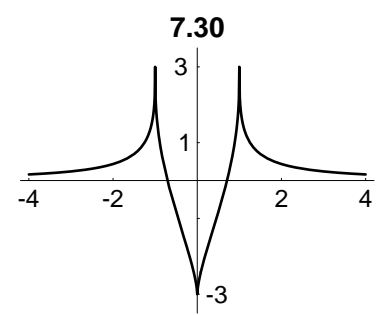
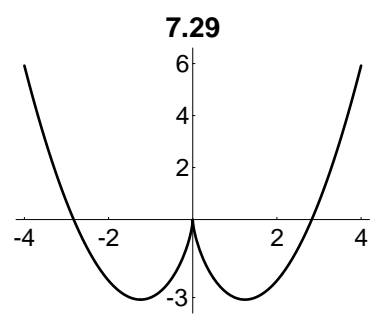
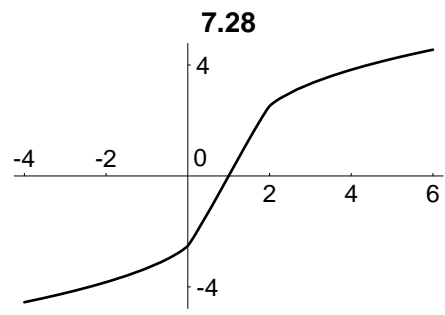
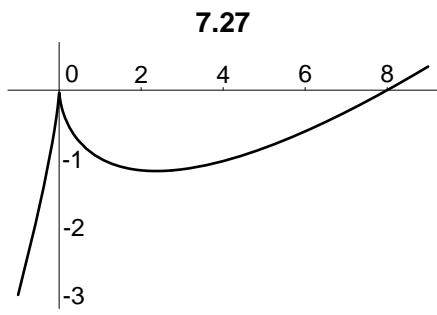
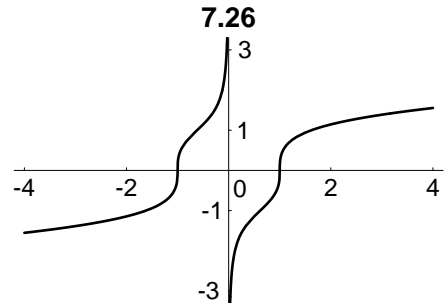
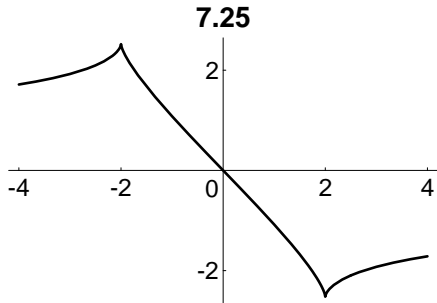
Protože f je sudá, jsou $x_{-k} := -x_k$ právě všechny záporné kořeny f' . Položíme-li ještě $x_0 := 0$, je $\nearrow : \langle x_{2k-1}, x_{2k} \rangle$; $\searrow : \langle x_{2k}, x_{2k+1} \rangle$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$; $\min = f(x_{\pm 1})$, $\max = f(0) = 1$.

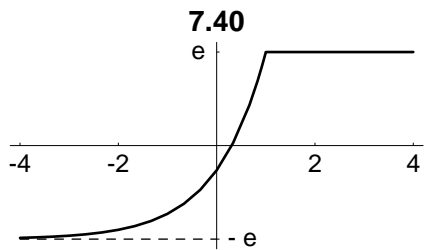
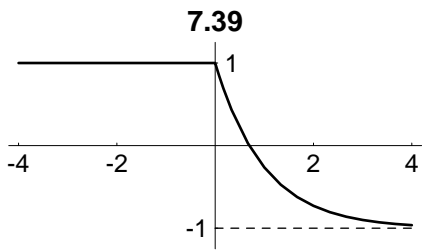
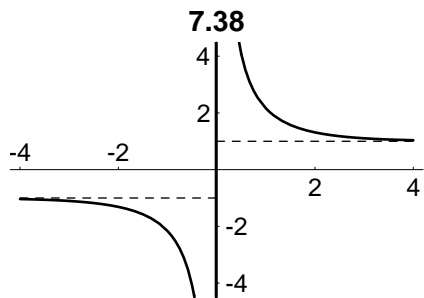
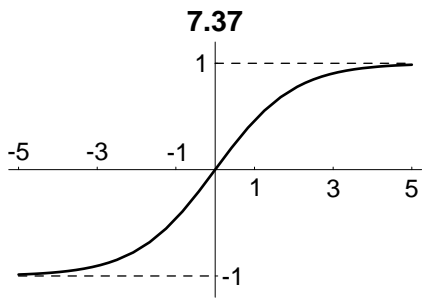
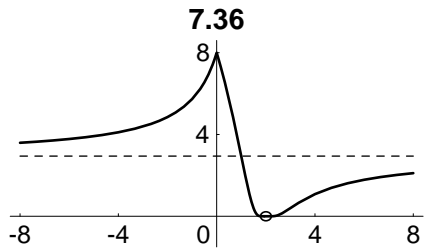
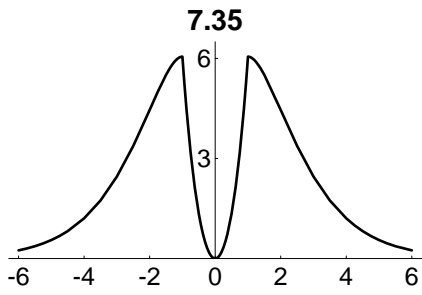
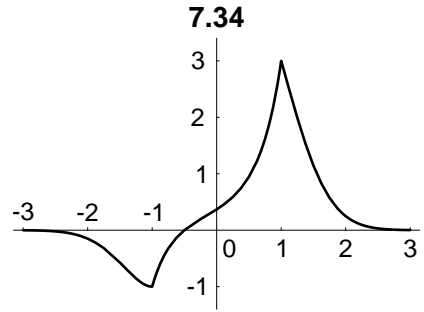
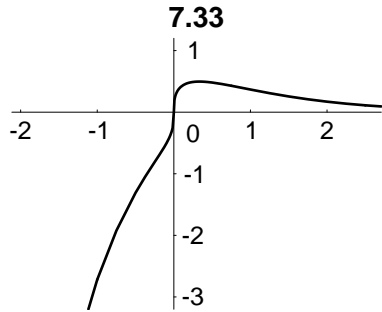
7.100. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup \mathbb{R}_+$; $f(\pm\infty\mp) = e$, $f(-1-) = +\infty$, $f(0+) = 1$; je $f'(x) = f(x)g(x)$, kde $g(x) := \lg(1 + 1/x) - 1/(x+1) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \pm\infty$, $g' > 0$ v $(-\infty, -1)$, $g' < 0$ v \mathbb{R}_+ , takže $g > 0$ a $f' > 0$ všude v $\mathcal{D}(f)$; $\nearrow : \langle -\infty, -1 \rangle, \mathbb{R}_+$; $\text{as}_{\pm\infty} : y = e$. (Poznámka. $f'(0+) = +\infty$ a ovšem též $f'(-1-) = +\infty$.)

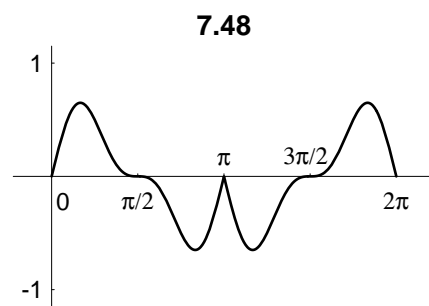
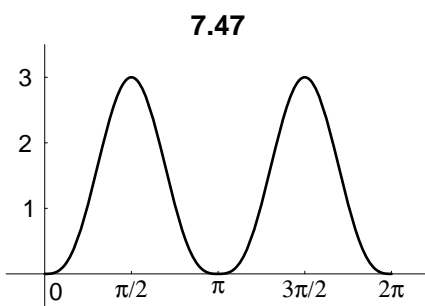
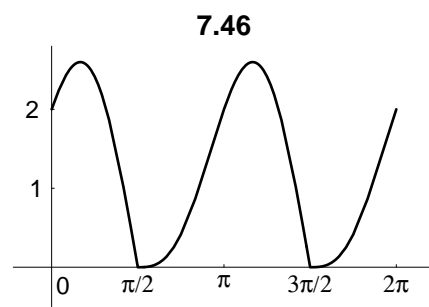
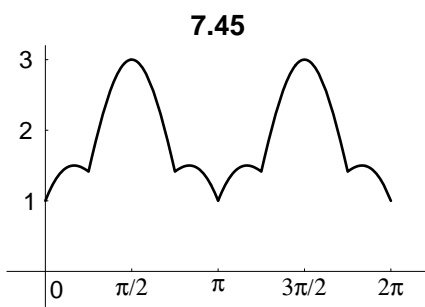
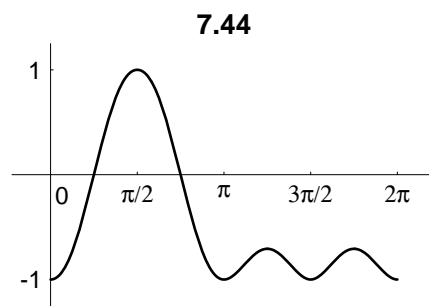
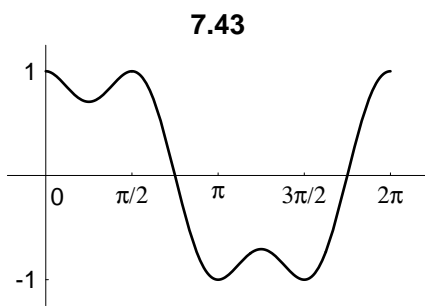
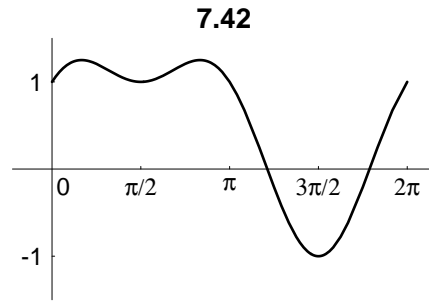
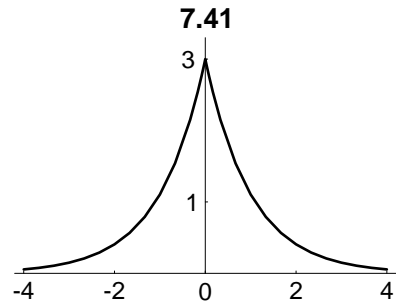


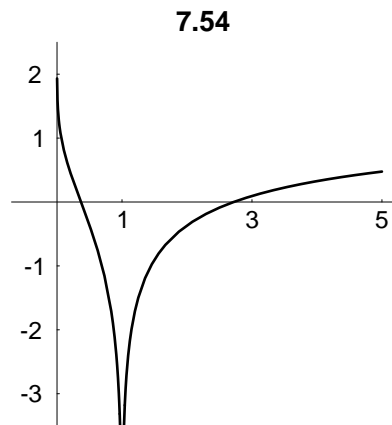
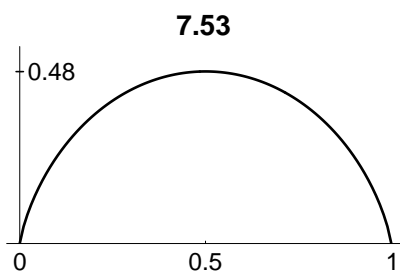
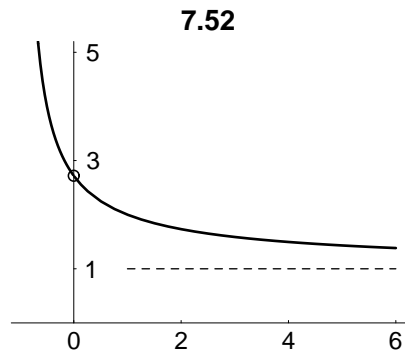
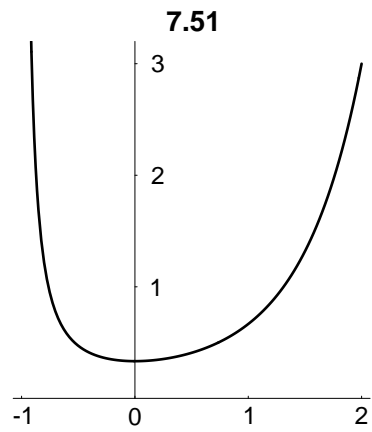
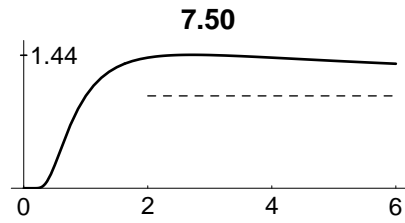
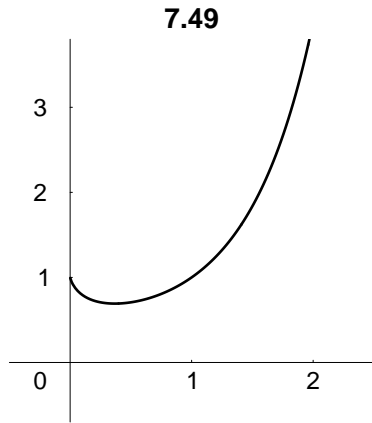


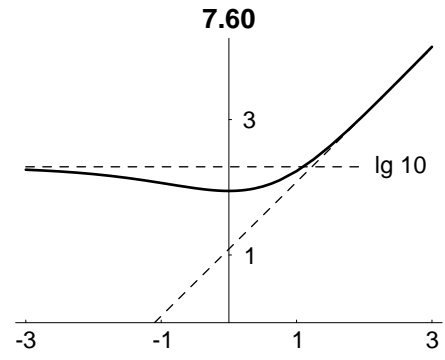
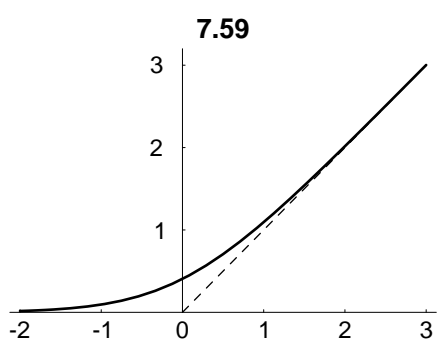
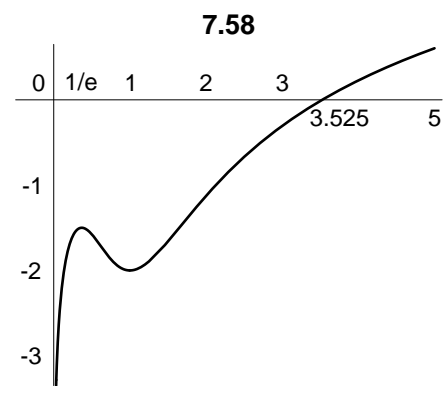
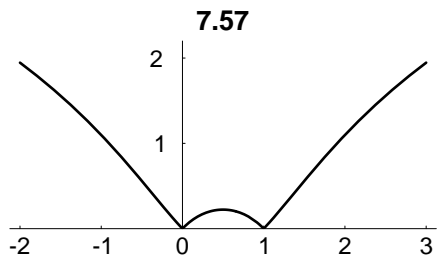
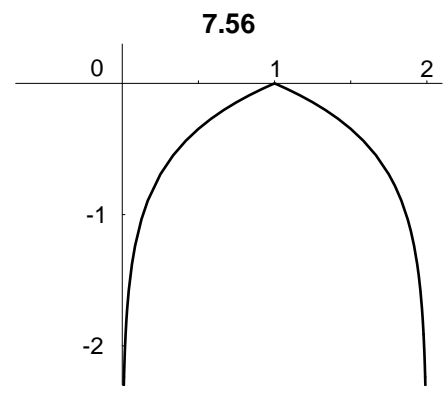
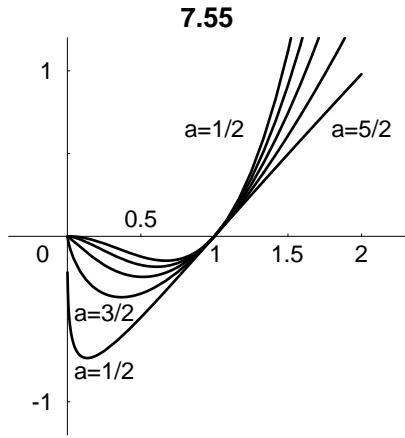


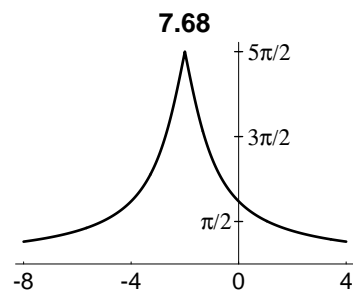
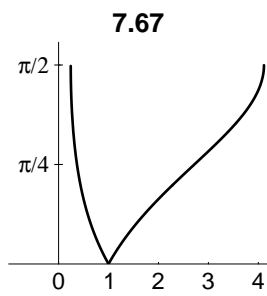
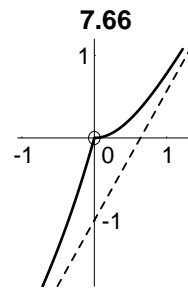
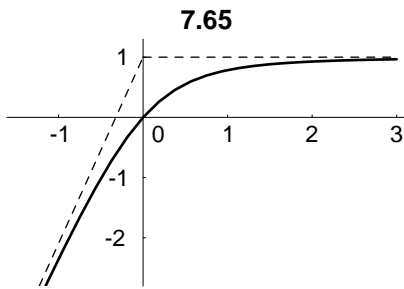
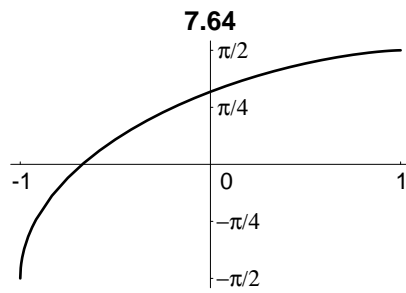
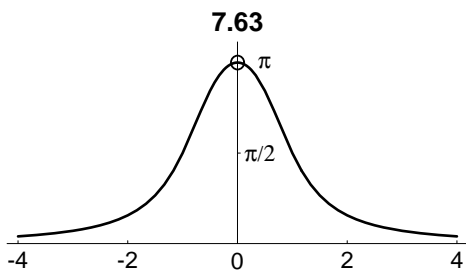
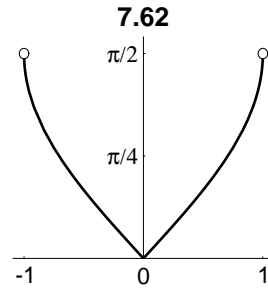
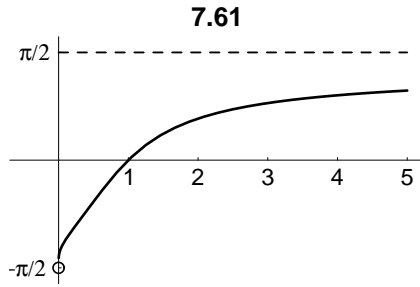


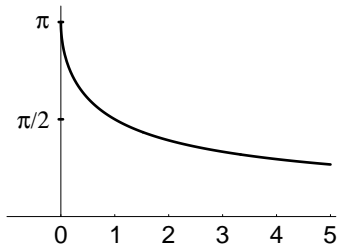
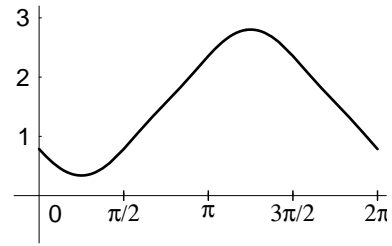
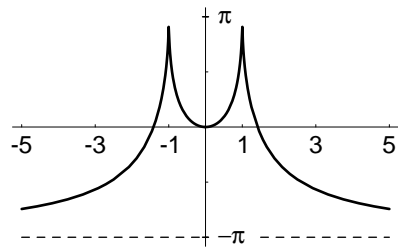
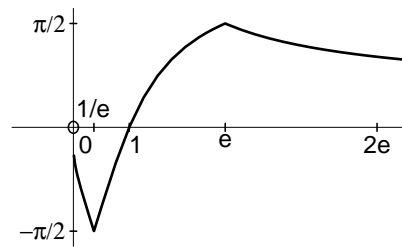
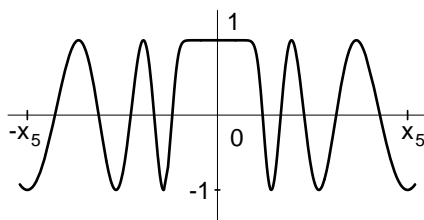
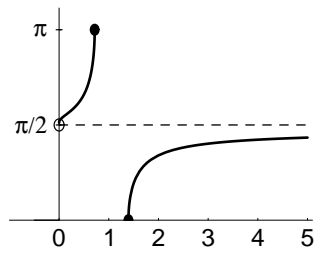
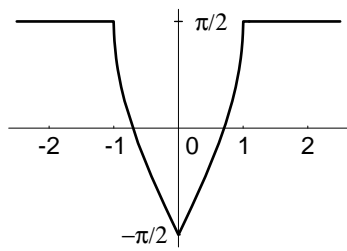










7.69**7.70****7.71****7.72****7.73****7.74****7.75****7.76**