RMF - Úlohy z 3. týdne

Zobecněné funkce

12. 10. 2024

Rozhodněte a zdůvodněte, které z následujících zobrazení $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jsou zobecněné funkce, tj. prvky $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$.

a) $(f, \varphi) = \varphi(1) + \varphi'(2)$

b) $(f, \varphi) = \varphi(1) \cdot \varphi'(2)$

c) $(f, \varphi) = \lim\limits_{x \to 0} \sin(\varphi(x))$

d) $(f, \varphi) = \frac{\varphi(0)}{1+|\varphi'(1)|}$

e) $\lim\limits_{k \to \infty} \displaystyle\int_0^1 \varphi\Big(\frac{kx}{k+1}\Big)\, dx$

f) $(f, \varphi) = \varphi'(3) + \lim\limits_{x \to -1} \varphi(x) + \displaystyle\int_1^2 \varphi(x)\, dx$

g) $(f, \varphi) = \varphi'(3) \cdot \lim\limits_{x \to -1} \varphi(x) \cdot \displaystyle\int_1^2 \varphi(x)\, dx$

h) $(f, \varphi) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

i) $(f, \varphi) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\frac{1}{2}) \sin \frac{1}{x}}{y^2+1}\, dy\, dx$

j) $(f, \varphi) = ||A\vec{x}||_2,$ kde A je čtvercová regulární matice řádu 2 a $\vec{x} = (\varphi(0), \varphi'(0))$

Bonus - úlohy na rozmyšlení

2) Rozhodněte, zda lze pro danou posloupnost funkcí $f_n : M \to \mathbb{R}$ zaměnit pořadí limity a integrálu, tj. zda platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\, dx = \int_M (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\, dx$$

Pokud ano, podle které věty? Konvergují f_n stejnoměrně?

a) $f_n(x) = x^n, M = (0,1)$

b) $f_n(x) = \frac{n}{1+(nx)^2}, M = \mathbb{R}$

c) $f_n(x) = \frac{1}{x}\chi_{[\frac{1}{n},1]}(x), M = (0,1)$

d) $f_n(x) = \begin{cases} 2n - 4n^2|x - \frac{1}{2n}| & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}, \quad M = [0,1]$

3) Je dána hladká funkce

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

Definujme

$$f(x) := \frac{h(x)}{h(x) + h(1-x)}$$

Ukažte, že funkce

$$\varphi(x) = f(2+x) \cdot f(2-x),\ x \in \mathbb{R}$$

je testovací funkce.