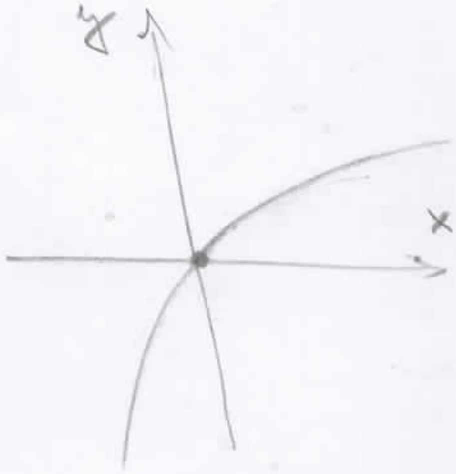
Závěr: f není hladká na $\mathbb{R}$, neboť $f'''(0)$ neexistuje

$f \in C^2(\mathbb{R})$



1. minitest RMF

Varianta A

4. 10. 2024

Rozhodněte a zdůvodněte, zda je funkce daná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x - 3x^2 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{6} \ln(1 + 6x) & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

hladká na $\mathbb{R}$. V opačném případě určete maximální p tak, že $f \in C^p(\mathbb{R})$. Nakreslete její graf.

$$\underbrace{\lim_{x \to 0_-} f(x)}_{0} = \underbrace{f(0)}_{\frac{1}{6}\ln 1 = 0} \implies f \in C(\mathbb{R})$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 6x, & x < 0 \\ \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{1+6x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0_-} f'(x)}_{1} = \underbrace{\lim_{x \to 0_+} f'(x)}_{\frac{1}{1+6 \cdot 0}} \implies f \in C^1(\mathbb{R})$$

$$f''(x) = \begin{cases} -6, & x < 0 \\ -\frac{6}{(1+6x)^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0_-} f''(x) = \lim_{x \to 0_+} f''(x) = -6 \implies \boxed{f \in C^2(\mathbb{R})}$$

$$f'''(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2 \cdot \frac{36}{(1+6x)^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0_-} f'''(x)}_{0} \neq \lim_{x \to 0_+} f'''(x)$$

Závěr: f není hladká, neboť $f^{IV}_-(0) \neq f^{IV}_+(0)$

tedy 4. derivace neexistuje

$f \in C^3(\mathbb{R})$

1. minitest RMF

Varianta B

4. 10. 2024

Rozhodněte a zdůvodněte, zda je funkce daná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{2}x) & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-x^2} & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

hladká na $\mathbb{R}$. V opačném případě určete maximální p tak, že $f \in C^p(\mathbb{R})$. Nakreslete její graf.

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = \cos 0 = 1 = f(0) \implies f \in C(\mathbb{R})$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x), & x<0 \\ -2x e^{-x^2}, & x \geq 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0_-} f'(x) = \lim_{x \to 0_+} f'(x) = 0$$

$$\implies f \in C^1(\mathbb{R})$$

$$f''(x) = \begin{cases} -2\cos(\sqrt{2}x), & x<0 \\ -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}, & x \geq 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0_+} f''(x) = \lim_{x \to 0_-} f''(x) = -2$$

$$\implies f \in C^2(\mathbb{R})$$

$$f'''(x) = \begin{cases} 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x), & x<0 \\ \underbrace{4x e^{-x^2} + 8x e^{-x^2} - 8x^3 e^{-x^2}}_{= e^{-x^2} \cdot (12x - 8x^3)}, & x \geq 0 \end{cases} \qquad f'''_-(0) = f'''_+(0) = 0$$

$$\implies f \in C^3(\mathbb{R})$$

$$f^{IV}(x) = \begin{cases} 4\cos(\sqrt{2}x), & x<0 \\ -2x e^{-x^2}(12x - 8x^3) + e^{-x^2} \cdot (12 - 24x^2), & x \geq 0 \end{cases} \qquad \underbrace{f^{IV}_-(0)}_{4} \neq \underbrace{f^{IV}_+(0)}_{12}$$

$$\implies f \notin C^4(\mathbb{R})$$