Úlohy z 1.týdne RMF

testované na cvičeních v 2.týdnu

25. září 2019

Úloha 1 Připomeňte si věty o záměně v Lebesgueově integrálu. Konkrétně věty o záměně $\int$ a lim (Lebesgue - integrabilní majoranta, Levi - monotónní posloupnost), dále pak záměnu lim dle parametru a integrálu a nakonec záměnu derivace dle parametru a integrálu.

Úloha 2 Připomeňte si definici skalárního součinu a ukažte, že na $C[a,b] \times C[a,b]$ (spojité funkce na intervalu $[a,b]$) je zobrazení

$$(f,g) \mapsto \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

skalárním součinem.

Úloha 3 Ukažte, že funkce

$$f(x) := \int_A g(x,y)\mathrm{d}y,$$

je spojitá na celém $\mathbb{R}$, kde g je spojitá ve svých proměnných na celém $\mathbb{R}^2$ a $A \subset \mathbb{R}$ je omezená.

Úloha 4 Zderivujte funkci

$$f(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos\left((a-\pi)x\right)\mathrm{d}x.$$

Úlohy z 2.týdne RMF

testované na cvičeních v 3.týdnu

25. září 2019

Úloha 1 Ukažte spojitost operace škálování nad prostorem testovacích funkcí, tj. definujeme-li pro $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ a pro $\varepsilon > 0$ testovací funkce

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

ukažte, že platí

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0.$$

Úloha 2 Rozhodněte, zda je následující zobrazení $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ prvkem $\mathscr{D}'$:

$$\begin{aligned} &a) \quad (f,\varphi) = \varphi(\pi),\\ &b) \quad (f,\varphi) = \varphi(0)^2. \end{aligned}$$

Úloha 3 Rozhodněte, zda je následující zobrazení $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ prvkem $\mathscr{D}'$:

$$\begin{aligned} &a) \quad (f_n,\varphi) = \varphi^{(n)}(\pi),\ n \in \mathbb{N},\\ &b) \quad (f,\varphi) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x). \end{aligned}$$

Úloha 4 Napište definici konvergence v $\mathscr{D}$, tj $\xrightarrow{\mathscr{D}}$. Napište definici zobecněných funkcí. Nakonec rozhodněte, zda $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}'$ a svou odpoveď zdůvodněte.

Úlohy z 3.týdne RMF

testované na cvičeních v 4.týdnu

10. října 2019

Úloha 1 Rozhodněte (a poskytněte zdůvodnění), zda platí

$$\delta(2x) = \frac{1}{2}\delta(x) \text{ či } \delta(2x) = 2\delta(x) \text{ v } \mathscr{D}'.$$

Úloha 2 Mějme $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a posloupnost $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}(\mathbb{R})$ definovanou vztahem

$$\psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{-\frac{1}{n},\frac{1}{n}}(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y,$$

kde $\varphi_{-\frac{1}{n},\frac{1}{n}}(y)$ je nezáporná testovací funkce splňující

$$\operatorname{supp} \varphi_{-\frac{1}{n},\frac{1}{n}}(y) = \langle -1/n, 1/n\rangle, \quad \text{a} \quad \int_R \varphi_{-\frac{1}{n},\frac{1}{n}}(y)\mathrm{d}y = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ukažte, že

$$\psi_n \overset{\mathscr{D}}{\to} \psi.$$

Úloha 3 Ukažte, že $\frac{1}{x\pm i\varepsilon} \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ pro $\varepsilon > 0$.

Úloha 4 Rozhodněte výpočtem, zda-li je pravdou[1], že $(|x|\theta(x))'' = \delta(x)$ v $\mathscr{D}'$.

[1]Lze užít více způsobů výpočtů a doporučuji jich vyzkoušet co nejvíce.

Úlohy z 4.týdne RMF
testované na cvičeních v 5.týdnu

19. října 2019

Úloha 1 Dokažte, že pro $\{f_n\} \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ a $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ splňující $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ platí vztah

$$\lim_{n\to\infty} f_n(Ax+b) = f(Ax+b) \quad \text{pro } A \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ reg. matici a } b \in \mathbb{R}^n.$$

Úloha 2 Upravte v $\mathscr{D}'$ výraz $\left(e^{|x|}\cos|x|\right)'''$.

Úloha 3 Ukažte, že $\operatorname{supp}\delta_{x_0} = \{x_0\}$ a nalezněte nosič charakteristické funkce intervalu (a,b) jakožto zobecněné funkce, tj. $\operatorname{supp}\chi_{(a,b)}(x)$.

Úloha 4 Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/n^2+x^2} =? \quad \text{v } \mathscr{D}'$$

Úlohy z 5.týdne RMF

testované na cvičeních v 6.týdnu

19. října 2019

Úloha 1 Nalezněte klasický i zobecněný nosič funkce $f(x) = \theta(x)(x-1)(x-2)\dots(x-n)$, $x \in \mathbb{R}$.

Úloha 2 Upravte v $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ výraz

$$\frac{\partial^6}{\partial x \partial y^3 \partial z^2} \left(\theta(x,y)y^2 \otimes \theta(z)\right).$$

Úloha 3 Vypočtěte klasickou konvoluci

$$\theta(x)e^{-ax} \star \theta(x)e^{-bx},$$

kde $a > 0$, $b > 0$ a to i pro $a = b$.

Úloha 4 Vypočtěte

$$1 \star x^3 \varphi_{(-1,1)}(x),$$

kde

$$\varphi_{(-1,1)}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{if } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{if } x \notin (-1,1) \end{cases}.$$

Všimněte si, že $1 \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ pro něž je klasická konvoluce definovaná. Dále vypočtěte

$$\delta \star \varphi$$

pro libovolné $\varphi \in \mathscr{D}$.

Úlohy z 6.týdne RMF

testované na cvičeních v 7.týdnu

31. října 2019

Úloha 1 Vypočtěte klasickou konvoluci

$$\theta(a-|x|)\star\theta(a/2-|x|),$$

kde $a>0$.

Úloha 2 Vypočtěte klasickou konvoluci

$$e^{-|x|}\star e^{-|x|}.$$

Úloha 3 Ukažte, že $\mathscr{S}'$ je uzavřený vůči zobecněné derivaci, tj $()' : \mathscr{S}' \mapsto \mathscr{S}'$.

Úloha 4 Rozhodněte, které ze zobecněných funkcí $e^{-x},\ \theta(x),\ \delta_{x_0}$ jsou temperované distribuce, tj v $\mathscr{S}'$.

Úlohy z 7.týdne RMF

testované na cvičeních v 8.týdnu

4. listopadu 2019

Úloha 1 Dokažte následující tvrzení o částečné Fourierově transformaci na prostoru $\mathscr{S}$:

$$D_\xi^\alpha \mathscr{F}_x[\varphi(x,y)](\xi,y) = \mathscr{F}_x[(ix)^\alpha \varphi(x,y)](\xi,y), \quad \varphi \in \mathscr{S}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Neopomeňte okomentovat své kroky.

Úloha 2 Vypočtěte částečnou Fourierovu transformaci vícerozměrné Diracovy delta funkce $\mathscr{F}_x[\delta(x,y)](\xi,y)$.

Úloha 3 Dokažte následující tvrzení o Fourierově transformaci na prostoru $\mathscr{S}'$:

$$\mathscr{F}[f(x-b)](\xi) = e^{ib\cdot\xi}\mathscr{F}[f(x)](\xi), \quad f \in \mathscr{S}', b \in \mathbb{R}^n.$$

Neopomeňte okomentovat své kroky.

Úloha 4 Vypočtěte fundamentální řešení lineárního diferenciálního operátoru $L = \frac{d}{dx^2} + a$, kde $a \in \mathbb{R}$ (tj. $(Lf)(x) = f''(x) + af(x)$).

Úlohy z 8.týdne RMF

testované na cvičeních v 9.týdnu

13. listopadu 2019

Úloha 1 Ukažte konzistenci zobecněné definice Laplaceovy transformace s klasickou Laplaceovou trnsformací, tj. pro f měřitelné na $\mathbb{R}$, splňující $f(t) = 0, \forall t \leq 0$ a $|f(t)| \leq Ce^{at}$, s.v. $t > 0$ pro jisté $C, a \in \mathbb{R}$ ukažte, že zobecněný a klasický Laplaceův obraz se shodují.

Úloha 2 Vypočtěte určitý integrál pomocí Laplaceovy transformace

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(bt)}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Úloha 3 Vypočtěte Laplaceův obraz funkcí $\sin(ax)$ a $\cos(bx)$.

Úloha 4 Vypočtěte fundamentální řešení lineárního diferenciálního operátoru

$$Ly = y'' + 3y' + 2y.$$

Úlohy z 9.týdne RMF

testované na cvičeních v 10.týdnu

21. listopadu 2019

Úloha 1 Převeďte klasickou počáteční úlohu

$$u''(t) + 3u'(t) - 7u(t) = \sqrt{1 - t^2}, \quad u(0) = 1, u'(0) = -3$$

na zobecněnou úlohu, jejímž řešením získáme i řešení původní klasické úlohy (toto řešení není třeba hledat, pouze převeďte).

Úloha 2 Ukažte, že pro f dostatečně hladkou platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t f(t, \tau) \mathrm{d}\tau = f(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau) \mathrm{d}\tau.$$

Úloha 3 Dokažte vztah pro derivaci zobecněné Laplaceovy transformace (f uvažujme taková, pro něž je definována zobecněná Laplaceova transformace), tj

$$\mathscr{L}[\dot{f}(t)](p) = p\, \mathscr{L}[f(t)](p).$$

Úloha 4 Vypočtěte následující počáteční úlohu pro lineární PDR 1. řádu užitím metody charakteristik:

$$\partial_t u + (4 - x)\partial_x u = u, \quad u(x, 0) = e^{-x^2}.$$

Úlohy z 10.týdne RMF
testované na cvičeních v 11.týdnu

26. listopadu 2019

Úloha 1 Nalezněte klasické řešení počáteční úlohy z minulého týdne, tj

$$u''(t) + 3u'(t) - 7u(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad u(0) = 1, u'(0) = -3,$$

kde řešení ponechte ve tvaru integrálu, bude-li třeba. Doporučuji porovnat obdržený výsledek s výsledkem, který získáte z Vámi oblíbeného matematického softwaru (Mathematica, Maple,...).

Úloha 2 Nalezněte transformační vztahy převádějící parciální diferenciální rovnici

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

na normální tvar.

Úloha 3 Jaké klasické počáteční úloze odpovídá následující zobecněná úloha

$$u'' - 2u' + 3u = \theta(t) \cosh(3t) + \delta'(t)$$

jejímž řešením získáme i řešení oné klasické úlohy?

Úloha 4 Vypočtěte řešení počáteční úlohy rovnice vedení tepla s volbou pravé strany $f(t,x) = e^{-t} \cos x$ a počáteční podmínkou $u_0(x) = \cos(x)$ dopočítáním z nalezených vzorců pro obecné řešení této úlohy na přednášce. Vřele doporučuji zkusit dosadit toto explicitní řešení do původní klasické úlohy a zkontrolovat jeho správnost.

Úlohy z 11.týdne RMF

testované na cvičeních v 12.týdnu

6. prosince 2019

Úloha 1 Převeďte parciální diferenciální rovnici na normální tvar (nalézt transformační vztahy i provést transformaci)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Úloha 2 Dokažte jednoznačnost řešení v metodě postupných aproximací z přednášky.

Úloha 3 Ověřte, že $\varphi = \lambda \sum_{j=1}^{p} c_j u_j(x) + g(x)$ se značením z přednášky je skutečně řešením integrální rovnice s degenerovaným jádrem.

Úloha 4 Vypočtěte řešení integrální rovnice

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+y)\varphi(y)\mathrm{d}y + \sin(x).$$

Úlohy z 12.týdne RMF

testované na cvičeních v 13.týdnu

13. prosince 2019

Úloha 1 Vypočtěte řešení integrální rovnice

$$\varphi(x, y) = \lambda \int_0^1 \int_0^3 (x\xi)^2 y\eta\varphi(\xi, \eta) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi + xe^y.$$

Úloha 2 Dokažte, že Greenova funkce je spojitá na $[0, l] \times [0, l]$.

Úloha 3 Ověřte, že pro pevné $y \in [0, l]$ splňuje Greenova funkce rovnici $L\mathscr{G}(x, y) = \delta(y - x)$, kde L je eliptický operátor a $\mathscr{G}$ k němu příslušející Greenova funkce.

Úloha 4 Převeďte S-L úlohu

$$-(1 + x^2)u'' - 2xu' = \lambda u, \quad u(0) = u'(1) = 0$$

na integrální rovnici. Vřele doporučuji, zkuste i vyřešit tuto vzniknuvší integrální rovnici.